Kapitel 1

Komplexe Zahlen

$\boxed{\downarrow 18.4.01}$

Motivation: die Gleichung $x^2 = -1$ hat offensichtlich keine reellen Lösungen, da $x^2 \geq 0$ für jedes reelle x gilt. Um auch diese Gleichung lösen zu können, muß man neue Zahlen einführen: die **komplexen Zahlen**. Die grundsätzliche Idee ist ganz einfach: man führt ein neues Symbol i ein, das $\sqrt{-1}$ repräsentieren soll. Es wird einzig und allein durch die Rechenregel $i^2 = -1$ festgelegt. Ansonsten behält man alle aus dem Reellen bekannten Rechenregeln einfach bei.

1.1 Definitionen

Definition 1.1: (Die komplexen Zahlen)

Die **Menge der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ *ist die Menge aller formalen Summen der Form*

$$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ nennt man x den **Realteil** *und y den* **Imaginärteil** *von z.*

Zahlen $z = x + i \cdot 0$ mit $y = 0$ nennt man **reell**, *schreibt auch kurz $z = x$ und identifiziert z mit $x \in \mathbb{R}$.*

Zahlen $z = 0 + i \cdot y$ mit $x = 0$ nennt man **imaginär** *und schreibt auch kurz $z = i \cdot y$.*

Der **Nullpunkt** *$z = 0 + i \cdot 0$ wird auch kurz als $z = 0$ geschrieben.*

Auf $\mathbb{C}$ definieren wir die Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in\mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in\mathbb{R}}$$

sowie die Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \underbrace{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)}_{\in\mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}_{\in\mathbb{R}}.$$

Interpretation 1.2:

Hinter dieser Definition der Multiplikation steckt $i^2 = -1$:

$$i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

Man braucht sich die formale Definition der Multiplikation nicht zu merken: man benutze einfach die üblichen aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln (Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$, Assoziativität $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ etc.), und setze beim Rechnen

$$i^2 = -1, \quad i^3 = (i^2) \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^3) \cdot i = (-i) \cdot i = -(i^2) = 1$$

usw. ein:

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot y_1 \cdot y_2$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 - y_1 \cdot y_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Folgerung 1.3:

Wir konstruieren eine Division für $z = x + i \cdot y \neq 0 + i \cdot 0 \equiv 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i \cdot y} = \frac{1}{x + i \cdot y} \cdot \frac{x - i \cdot y}{x - i \cdot y}$$

$$= \frac{x - i \cdot y}{(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y)} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 - (i \cdot y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Allgemein:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}{x_2^2 + y_2^2 + i \cdot (x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_2)}$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Definition 1.4: (komplexe Konjugation etc.)

Es werden folgende speziellen Operationen auf den komplexen Zahlen eingeführt:

$$\begin{array}{ccccc} \Re(z) & = & \Re(x + i \cdot y) & = & x \\ \Im(z) & = & \Im(x + i \cdot y) & = & y \\ |z| & = & |x + i \cdot y| & = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \overline{z} & = & \overline{x + i \cdot y} & = & x - i \cdot y \end{array}$$

(der **Realteil** *von z),*
(der **Imaginärteil** *von z),*
(der **Betrag** *von z),*
(das **komplex Konjugierte** *von z).*

Merkregel 1.5:

Die Division komplexer Zahlen läuft auf den Standardtrick „Erweitern mit dem komplex konjugierten Nenner hinaus“:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}.$$

Satz 1.6: (Rechenregeln)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: „Kommutativität“ und „Assoziativität“ von Multiplikation und Division

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_1}, \quad \left(\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}\right) \cdot \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1} \cdot \left(\frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3}\right),$$

„Linearität“ *von $\Re$, $\Im$ und Konjugation*

$$\Re(z_1+z_2) = \Re(z_1)+\Re(z_2), \quad \Im(z_1+z_2) = \Im(z_1)+\Im(z_2), \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2,$$

„Multiplikativität“ *des Betrags und der Konjugation*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

sowie die Beziehungen

$$|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z \cdot \overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

und die **„Dreiecksungleichung“***:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Beweis: Alles ist direkt nachzurechnen, z.B.

$$z \cdot \overline{z} = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

oder (wie schon oben durchgeführt):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Q.E.D.

Beispiel 1.7: In MuPAD wird $i = \sqrt{-1}$ durch `I` dargestellt: ↓19.4.02

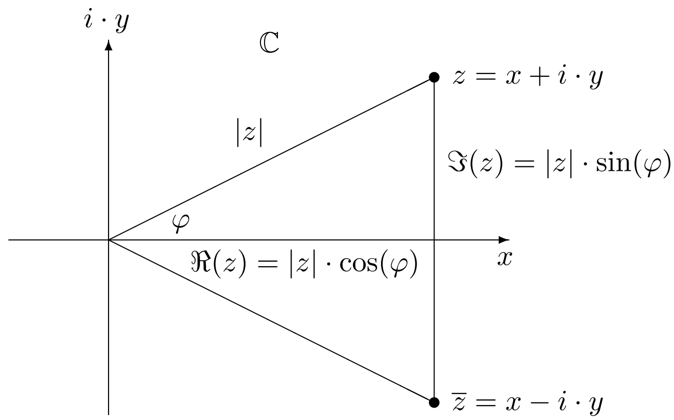
```
>> sqrt(-1)
                                        I
>> I^2
                                       -1
```

Die MuPAD-Funktionen `Re`, `Im`, `conjugate` und `abs` berechnen Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation und den Absolutbetrag:

```
>> z:= 2 + 3*I:
>> Re(z), Im(z), conjugate(z), abs(z)
                                            1/2
                          2, 3, 2 - 3 I, 13
```

Geometrische Interpretation 1.8:

*Man stellt sich üblicherweise die Menge der komplexen Zahlen als 2-dimensionale Ebene (**„die komplexe Ebene“**) vor:*



*Der Betrag von z ist der Abstand zum Ursprung, komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der x-Achse (**„die reelle Achse“**). Die y-Achse wird auch als **„imaginäre Achse“** bezeichnet.*

Geometrisch ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als $\mathbb{R}^2$: $x + i \cdot y \in \mathbb{C} \ \widehat{=}\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die komplexe Addition entspricht genau der Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Algebraisch besteht der Unterschied zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ darin, dass man auf $\mathbb{C}$ neben der Addition noch eine Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ hat, wohingegen es auf $\mathbb{R}^2$ keine interessante Multiplikation zweier Vektoren gibt, die wieder einen Vektor liefert (außer derjenigen, die $\mathbb{R}^2$ zu $\mathbb{C}$ macht).

Bemerkung 1.9: *Führt man den eingezeichneten Winkel φ zwischen dem „Vektor“ z und der reellen Achse ein, so gilt mit den aus der Schule bekannten Winkelfunktionen* sin *und* cos*:*

$$z = x + i \cdot y = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi).$$

Die Darstellung $z = x + i \cdot y$ nennt man die **Kartesische Darstellung** *der komplexen Zahl z durch Real- und Imaginärteil. Die Darstellung*

$$z = |z| \cdot \Big(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \Big)$$

durch den Betrag $|z|$ und den **„Polarwinkel“** $\varphi \in [0, 2\,\pi)$ *heißt* **Polardarstellung** *von z (φ heißt auch* **„das Argument von z“***). Wir werden später in Abschnitt 5.3 auf die Polardarstellung komplexer Zahlen zurückkommen, nachdem wir die komplexe Exponentialfunktion eingeführt haben.*

1.2 Nullstellen von Polynomen, der Fundamentalsatz der Algebra

Die Motivation zur Einführung der komplexen Zahlen war, Polynomgleichungen wie z.B. $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können. In der Tat stellt sich nun heraus, dass Polynome vom Grad n immer genau n (evtl. „entartete“) komplexe Nullstellen haben. Wir definieren zunächst „Entartung“ von Nullstellen, wobei wir auf die aus der Schule bekannte Differentiation zurückgreifen:

Definition 1.10: (Vielfachheit von Nullstellen)

Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine mehrfach differenzierbare Funktion (siehe Kapitel 6). Man nennt x^* eine Nullstelle der **„Vielfachheit“** *k (oder auch* **„k-fache Nullstelle“***), wenn*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Beispiel 1.11: (Mehrfache Polynomwurzeln)
Für das Polynom $p(x) = (x - x^*)^n$ mit $n > 0$ ist x^* eine n-fache Nullstelle:

$$p(x) = (x - x^*)^n, \quad p'(x) = n \cdot (x - x^*)^{n-1}, \quad p''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (x - x^*)^{n-2},$$
$$\ldots\ , \quad p^{(n-1)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (x - x^*), \quad p^{(n)}(x) = n!,$$

also

$$p(x^*) = (x^* - x^*)^n = 0,$$
$$p'(x^*) = n \cdot (x^* - x^*)^{n-1} = 0,$$

$$p''(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot (x^* - x^*)^{n-2} = 0,$$
$$\dots$$
$$p^{(n-1)}(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (x^* - x^*)^1 = 0,$$
$$p^{(n)}(x^*) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (x^* - x^*)^0 = n! \neq 0.$$

Beispiel 1.12: (Mehrfache Polynomwurzeln)
Seien $x_1, \ldots, x_k$ verschieden. Für das Polynom

$$p(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}$$

vom Grad $n = n_1 + \cdots + n_k$ sind $x_1, \ldots, x_k$ Nullstellen der Vielfachheit $n_1, \ldots n_k$. Der Nachweis geht analog zum letzten Beispiel: Betrachte eine der Nullstellen x_i und schreibe

$$p(x) = (x - x_i)^{n_i} \cdot f(x), \quad f(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \cancel{(x - x_i)^{n_i}} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}.$$

Über die aus der Schule bekannte Produktregel $(g \cdot f)' = g' \cdot f + g \cdot f'$ der Differentiation folgt

$$p(x) = (x - x_i)^{n_i} \cdot f(x),$$
$$p'(x) = n_i \cdot (x - x_i)^{n_i - 1} \cdot f(x) + (x - x_i)^{n_i} \cdot f'(x),$$
$$p''(x) = n_i \cdot (n_i - 1) \cdot (x - x_i)^{n_i - 2} \cdot f(x) + 2 \cdot n_i \cdot (x - x_i)^{n_i - 1} \cdot f'(x) + (x - x_i)^{n_i} \cdot f''(x)$$

usw., wobei f, f', f'' etc. Polynome sind. Die ersten $n_i - 1$ Ableitungen verschwinden an der Stelle $x = x_i$:

$$p(x_i) = 0^{n_i} \cdot f(x_i) = 0\ ,$$
$$p'(x_i) = 0^{n_i - 1} \cdot f(x_i) + 0^{n_i} \cdot f'(x_i) = 0$$
$$p''(x_i) = (..) \cdot 0^{n_i - 2} \cdot f(x_i) + (..) \cdot 0^{n_i - 1} \cdot f'(x_i) + 0^{n_i} \cdot f''(x_i) = 0$$

usw. Die n_i-te Ableitung verschwindet nicht:

$$p^{(n_i)}(x) = n_i! \cdot f(x) + (..) \cdot (x - x_i) \cdot f'(x) + \cdots + (x - x_i)^{n_i} \cdot f^{(n_i)}(x),$$

also $p^{(n_i)}(x_i) = n_i! \cdot f(x_i)$, wobei

$$f(x_i) = (x_i - x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \cancel{(x_i - x_i)^{n_i}} \cdot \ldots \cdot (x_i - x_k)^{n_k} \neq 0$$

gilt, da $x_i \neq x_1, \ldots, x_i \neq x_k$ vorausgesetzt ist. Damit ist x_i eine Nullstelle der Vielfachheit n_i.

Ein Polynom und seine Ableitungen

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

$$p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1$$

etc. ist natürlich auch für komplexe Zahlen x wohldefiniert und man kann daher nach (mehrfachen) komplexen Nullstellen fragen. Die Definition 1.10 der Vielfachheit wird dabei auch für komplexe Nullstellen beibehalten.

Wir rekapitulieren zunächst das in der Mathematik I des letzten Semesters schon vorgestellte Horner-Schema zur Polynomauswertung und Polynomdivision:

Satz 1.13: (Polynomauswertung und -division per Horner-Schema)
Für das Polynom $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ gilt für jedes $x^* \in \mathbb{C}$:

$$\frac{p(x) - p(x^*)}{x - x^*} = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1},$$

*wobei b_0, b_1 etc. durch die Rekursion (**„Horner-Schema“**)*

$$\boxed{\begin{array}{l} b_0 := a_n \ ; \\ \textit{for } k := 1 \textit{ to } n \textit{ do } \ b_k := b_{k-1} \cdot x^* + a_{n-k} \ ; \end{array}}$$

gegeben sind. Es gilt $b_n = p(x^*)$.

Beweis: Mit $b_0 = a_n$, $b_k - b_{k-1} \cdot x^* = a_{n-k}$ und $-b_{n-1} \cdot x^* = a_0 - b_n$ folgt

$$(x - x^*) \cdot \Big(b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1} \Big)$$

$$\begin{array}{llllllll} = b_0 \cdot x^n & + \ b_1 \cdot x^{n-1} & + \ b_2 \cdot x^{n-2} & + \ \cdots & + \ b_{n-1} \cdot x & & & \\ & - \ \underbrace{b_0 \cdot x^*} \cdot x^{n-1} & - \ \underbrace{b_1 \cdot x^*} \cdot x^{n-2} & - \ \cdots & - \ \underbrace{b_{n-2} \cdot x^*} \cdot x & - \ \underbrace{b_{n-1} \cdot x^*} & & \\ = a_n \cdot x^n & + \ a_{n-1} \cdot x^{n-1} & + \ a_{n-2} \cdot x^{n-2} & + \ \cdots & + \quad a_1 \cdot x & + \ a_0 & - & b_n \\ = p(x) - b_n. & & & & & & & \end{array}$$

Für $x = x^*$ folgt $0 = p(x^*) - b_n$ und damit

$$(x - x^*) \cdot \Big(b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1} \Big) = p(x) - p(x^*).$$

Q.E.D.

Das Horner-Schema liefert mittels $b_n = p(x^*)$ die Auswertung des Polynoms an einer Stelle x^* mit n Multiplikationen und $n-1$ Additionen. In der Tat ist es (für „dicht besetzte“ Polynome) das Standardschema, mit dem auf dem Rechner Polynomauswertungen implementiert werden. Bei der Auswertung werden gleichzeitig die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1}$ des **„Faktorpolynoms“** $(p(x) - p(x^*))/(x - x^*)$ mitgeliefert. Das Horner-Schema läuft auf die folgende Darstellung des Polynoms hinaus: $\boxed{\downarrow 25.4.02}$

$$p(x^*) = ((\ldots((a_n \cdot x^* + a_{n-1}) \cdot x^* + a_{n-2}) \cdot x^* + \cdots)\ldots) \cdot x^* + a_1) \cdot x^* + a_0.$$

$$\uparrow$$

$$b_0 = a_n$$

$$b_1 = a_n \cdot x^* + a_{n-1}$$

$$b_2 = a_n \cdot {x^*}^2 + a_{n-1} \cdot x^* + a_{n-2}$$

$$\ddots$$

$$b_n = a_n \cdot {x^*}^n + a_{n-1} \cdot {x^*}^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x^* + a_0 = p(x^*)$$

Ist x^* eine Nullstelle („Wurzel“) des Polynoms, so folgt $p(x)/(x - x^*) =$ Polynom(x). Es ergibt sich das schon in der Mathematik I vorgestellte Grundprinzip, dass man bei einer gegebenen Nullstelle einen „Linearfaktor“ $x - x^*$ vom Polynom abspalten kann:

Folgerung 1.14:

Ist x^* eine Wurzel des Polynoms p vom Grad $n > 0$, so gilt

$$p(x) = (x - x^*) \cdot q(x)$$

mit einem „Faktorpolynom“ $q(x) = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ vom Grad $n-1$, dessen Koeffizienten z.B. durch das Horner-Schema berechenbar sind.

Merke: *x^* ist dann und genau dann eine Wurzel, wenn sich der Linearfaktor $x - x^*$ vom Polynom abspalten läßt.*

Zwar hat nicht jedes Polynom reelle Nullstellen, aber es gilt das (zu beweisende) wichtige Prinzip:

> Jedes Polynom vom Grad > 0 hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle.

Setzen wir zur Motivation des kommenden Fundamentalsatzes 1.15 mal dieses Prinzip voraus. Es gilt $p(x) = (x - x^*) \cdot q(x)$ mit einer (garantiert existierenden) Nullstelle x^* von p. Die Nullstellen des Faktorpolynoms q sind offensichtlich wieder Nullstellen des Ausgangspolyms p. Hat man nun eine Nullstelle x^{**} von q, so kann man nach Folgerung 1.14 angewendet auf q einen weiteren Linearfaktor abspalten:

$$q(x) = (x - x^{**}) \cdot \tilde{q}(x), \quad \text{also} \quad p(x) = (x - x^{*}) \cdot (x - x^{**}) \cdot \tilde{q}(x)$$

mit einem Restpolynom $\tilde{q}$ vom Grad $n-2$. Dies setzt man fort, bis man nach n Schritten auf ein konstantes Polynom stößt, das keine Nullstellen mehr besitzt. Es folgt eine Faktordarstellung

$$p(x) = (x - x^{*}) \cdot (x - x^{**}) \cdot (x - x^{***}) \cdot \ldots \cdot (x - x^{*\cdots*}) \cdot a_n,$$

wobei a_n das zuletzt verbleibende konstante Restpolynom (vom Grad 0) ist. Vergleicht man die führenden Koeffizienten auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung, so sieht man sofort, dass das verbleibende konstante Restpolynom nichts anderes als der führende Koeffizient von $p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_0$ ist. Es folgt das Grundprinzip:

$$\boxed{\text{Jedes Polynom vom Grad } n > 0 \text{ hat genau } n \text{ komplexe Nullstellen.}}$$

Hierbei müssen wir aber etwas vorsichtig zählen, da in der Konstruktion die Nullstellen x^{*}, x^{**}, x^{***} etc. eventuell übereinstimmen können. Eine saubere Formulierung liefert der folgende fundamentale Satz:

Satz 1.15: (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1799)

Zu jedem Polynom $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n > 0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ gibt es komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_k$ (die Wurzeln) und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ (die Vielfachheiten) mit $n_1 + \cdots + n_k = n$, so dass

$$p(x) = a_n \cdot (x - z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - z_k)^{n_k}.$$

Für die Anzahl k der *unterschiedlichen* Wurzeln gilt hierbei $k \leq n$ wegen $n_1 + \cdots + n_k = n$.

zum Beweis: Wie in der Motivation gezeigt, braucht man nur zu beweisen, dass jedes Polynom vom Grad > 0 mindestens eine komplexe Nullstelle bezitzt. Dies ist je nach den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln aber gar nicht so einfach und sprengt unseren Rahmen hier. Typischerweise wird der Satz in Lehrbüchern über komplexe Funktionentheorie bewiesen. Ein „elementarer" Beweis findet sich z.B. unter:

`http://helios.mathematik.uni-kl.de/~luene/kleinodien/laplace.html`

Interpretation 1.16:

Nach Beispiel 1.12 sind $z_1, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$. Zählt man z_1 als n_1 Wurzeln, z_2 als n_2 Wurzeln etc., so ergeben sich insgesamt $n_1 + \cdots + n_k = n$ komplexe Wurzeln des Polynoms, und in der Tat erhalten wir in dieser Zählweise:

$$\boxed{\textit{Jedes Polynom vom Grad } n > 0 \textit{ hat genau } n \textit{ komplexe Nullstellen!}}$$

Über die Anzahl der **reellen** *Nullstellen hingegen kann man i.A. wenig aussagen (z.B. hat $p(x) = x^2 + 1$ überhaupt keine reelle Nullstellen).*

Merkregel 1.17:

Der Punkt x^* ist dann und genau dann eine Nullstelle eines Polynoms $p(x)$, wenn sich gemäß Folgerung 1.14 der Linearfaktor $x - x^*$ vom Polynom abfaktorisieren läßt. Die Vielfachheit von x^* gibt an, wie oft sich dieser Linearfaktor abspalten läßt. Man sollte eine Polynomwurzel besser als einen Linearfaktor ansehen. Der Fundamentalsatz besagt, dass sich ein Polynom vom Grad n immer in genau n Linearfaktoren aufspalten läßt.

Die Existenz der komplexen Wurzeln sagt nichts darüber aus, ob man diese Wurzeln in irgendeiner Weise explizit darstellen kann. In der Tat gibt es z.B. für Polynome vom Grad ≥ 4 keine allgemeingültige Lösungsformel mit Hilfe von (verschachtelten) Wurzeln. Numerisch kann man jedoch stets Gleitpunktapproximationen der Wurzeln finden.

Beispiel 1.18: In MuPAD ist `solve` für exakte Lösungen und `numeric::solve` für numerische Lösungen zuständig. Das folgende Polynom hat 9 Wurzeln, die sich (zufälligerweise) alle explizit darstellen lassen:

```
>> p:= x^9 + 2*x^7 - x^3 - 2*x:
>> solve(p = 0, x)

                1/2     1/2            1/2
{0, -1, 1, - I 2   , I 2   , - 1/2 I 3    - 1/2,

                1/2         1/2                 1/2
   1/2 - 1/2 I 3   , 1/2 I 3    - 1/2, 1/2 I 3    + 1/2}
```

Der numerische Gleichungslöser liefert Gleitpunktnäherungen der Wurzeln:

```
>> numeric::solve(p = 0, x)

{0.0, - 0.5 - 0.8660254038 I, - 0.5 + 0.8660254038 I,

   0.5 - 0.8660254038 I, 1.0, -1.414213562 I, 1.414213562 I,

   0.5 + 0.8660254038 I, -1.0}
```

Die zurückgegebenen Objekte {...} sind jeweils Mengen, deren Elementanordnung willkürlich vom System nach internen Kriterien bestimmt wird. Diese sehen für exakte Werte anders aus als für Gleitpunktnäherungen, so dass sich die Reihenfolge der Elemente beim exakten und beim numerischen Lösen unterscheiden kann (was im obigen Beispiel auch in der Tat der Fall ist).

Es fällt hierbei auf, dass die komplexen Wurzeln als komplex konjugierte Paare $x_k \pm i \cdot y_k$ auftauchen. Das ist kein Zufall und liegt daran, dass das eben betrachtete Polynom „reell“ ist (damit ist gemeint, dass die Koeffizienten reell sind).

Satz 1.19: (konjugierte Wurzelpaare reeller Polyome)

Ist z eine k-fache Nullstelle des Polynoms $p(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_0$ mit **reellen** *Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, so ist auch $\overline{z}$ eine k-fache Nullstelle des Polynoms. Bei reellen Polynomen tauchen nicht-reelle Wurzeln also immer in komplex-konjugierten Paaren auf.*

Beweis: Für ein reelles Polynom gilt wegen $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ offensichtlich

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}).$$

Also gilt $p(\overline{z}) = 0$ dann und genau dann, wenn $p(z) = 0$ gilt. Da mit p auch alle Ableitungen von p wieder reelle Polynome sind, stimmen auch die Vielfachheiten der Nullstellen z und $\bar{z}$ überein.

Q.E.D.

1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Diagonalisierung von Matrizen

Selbst wenn man sich als Lebensprinzip zu eigen gemacht hat, sich nur für reale (reelle) Dinge zu interessieren, kommt man oft doch nicht um komplexe Zahlen herum. Wir betrachten als Beispiel die (rein reelle) Aufgabenstellung:

$$\boxed{\text{Berechne } A^{1\,000\,000} \text{ für die Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Allgemein ist die Frage, ob es für Matrixpotenzen explizite Darstellungen gibt, mit denen sich die Berechnung über viele Matrixmultiplikationen vermeiden läßt. Wäre A eine Diagonalmatrix, so könnten wir das Ergebniss sofort explizit hinschreiben, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eine Standardmethode der Linearen Algebra besteht darin, allgemeine Matrizen durch Transformation auf Diagonalgestalt zu bringen (**„Diagonalisierung"**). Hierbei geht es um Eigenwerte und -vektoren. Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms sollten als Eigenwerte auch komplexe Zahlen in Betracht gezogen werden:

Satz 1.20: (Diagonalisierung von Matrizen)

Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$-Matrix mit den (eventuell komplexen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und den entsprechenden Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, also $A\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k$. Sei $T = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ die Matrix, deren Spalten aus diesen Eigenvektoren besteht. Es gilt

$$A\,T = T\,D \quad \textit{mit} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sind die Eigenvektoren linear unabhängig, so ist T invertierbar, und es folgt

$$A = T\,D\,T^{-1}.$$

Beweis: Nach Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$A\,T = A\,[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] = [A\,\vec{x}_1, \ldots, A\,\vec{x}_n]$$

(die Spalten eines Matrixproduktes bestehen aus der ersten Matrix wirkend auf die Spalten der zweiten Matrix). Mit

$$T\,D = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1\,\vec{x}_1, \ldots, \lambda_n\,\vec{x}_n]$$

und $A\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k$ folgt $A\,T = T\,D$.

Q.E.D.

Folgerung 1.21:

Mit einer Diagonalisierung $A = T\,D\,T^{-1}$ gilt

$$A^n = \underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A}\;\underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A}\;\cdots\;\underbrace{T\,D\,T^{-1}}_{A} = T\,D\,D \cdots D\,T^{-1} = T\,D^n\,T^{-1}.$$

Die Potenzen von A sind damit auf Potenzen der Diagonalform D von A zurückgeführt, wobei D^n sich ohne große Rechnung durch Potenzieren der Diagonalelemente ergibt.

Bemerkung 1.22: *Hat man einen Eigenwert λ_k der zu diagonalisierenden Matrix gefunden, so kann man nach 1.20* **irgendeinen** *dazugehörigen Eigenvektor $\vec{x}_k$ benutzen, die entsprechende Spalte von T zu besetzen. Nun sind Eigenvektoren aber nicht eindeutig: ist $\vec{x}_k$ ein Eigenvektor, so ist jedes Vielfaches $\vec{y}_k = c_k\,\vec{x}_k$ wieder ein Eigenvektor zum selben Eigenwert λ_k. Es gibt damit viele unterschiedliche Transformationsmatrizen T, während die Diagonalmatrix bis auf Umnummerierung der Eigenwerte eindeutig ist. Wie kann das sein? Antwort: die Transformationsmatrizen unterscheiden sich nur um eine Diagonalmatrix:*

$$\tilde{T} = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] = [c_1\,\vec{x}_1, \ldots, c_n\,\vec{x}_n] = \underbrace{[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}}_{C} = T\,C.$$

In der Diagonalisierung fällt die diagonale „Skalierungsmatrix" C heraus, da die Multiplikation von Diagonalmatrizen kommutativ ist:

$$A = \tilde{T}\,D\,\tilde{T}^{-1} = T\,C\,D\,(T\,C)^{-1} = T\,C\,D\,C^{-1}\,T^{-1}$$
$$= T\,D\,C\,C^{-1}\,T^{-1} = T\,D\,T^{-1}.$$

Bemerkung 1.23: *Da bei der Diagonalisierung die Invertierbarkeit von T wichtig ist, nützt es überhaupt nichts, triviale Eigenvektoren $\vec{x}_k = 0$ zu betrachten (die ja auch strenggenommen per Definition von Eigenvektoren gar nicht als Eigenvektoren zulässig sind).* ↓26.4.02

Die Aufgabenstellung der Diagonalisierung läuft darauf hinaus, die Eigenvektoren zu *allen* Eigenwerten zu finden. Sobald man eine Basis von linear unabhängigen Eigenvektoren gefunden hat, hat man die invertierbare Transformationsmatrix T gefunden, welche die betrachtete Matrix auf Diagonalform bringt. Sind alle Eigenwerte verschieden, so existiert immer eine Basis von linear unabhängigen Eigenvektoren. Bei entarteten Eigenwerten (mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms) ist dies jedoch nicht garantiert, und in der Tat gibt es nicht-diagonalisierbare Matrizen. Symmetrische reelle Matrizen sind immer diagonalisierbar, selbst wenn die (bei Symmetrie der Matrix automatisch reellen) Eigenwerte entartet sind.

Beispiel 1.24: Mittels Diagonalisierung können wir für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine explizite Darstellung von A^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ermitteln. Nach Satz 1.20 sind alle Eigenwerte und –vektoren zu bestimmen. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda\, E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda + 2$$

(hier ist E_2 die 2×2-Einheitsmatrix). Nach der Standardformel für die Nullstellen quadratischer Polynome ergeben sich die komplex konjugierten Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Die Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 findet man, indem man die Kernvektoren von $A - \lambda_k\, E_2$ ermittelt, d.h., die Gleichungen $(A - \lambda_k\, E_2)\, \vec{x}_k = A\, \vec{x}_k - \lambda_k\, \vec{x}_k = \vec{0}$ löst. Mit den Techniken der Mathematik I des letzten Semesters findet man die Lösungen

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot i \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix T wird spaltenweise aus diesen Eigenvektoren aufgebaut, die Inverse wird berechnet:

$$T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix} \;, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die Diagonalisierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}}_{T^{-1}}.$$

Dies liefert

$$A^n = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}}_{D^n} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}}_{T^{-1}}}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 2 \cdot i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \cdot (1+i)^n & \frac{1}{4} \cdot (1+i)^n \\ \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n & -\frac{i}{4} \cdot (1-i)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n & \frac{i}{4} \cdot (1+i)^n - \frac{i}{4} \cdot (1-i)^n \\ -i \cdot (1+i)^n + i \cdot (1-i)^n & \frac{1}{2} \cdot (1+i)^n + \frac{1}{2} \cdot (1-i)^n \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis muß als Potenz der reellen Matrix A reell sein. Dies ist in dieser Darstellung leider alles andere als offensichtlich. In der Tat brauchen wir noch einige grundsätzliche Überlegungen zu Potenzen komplexer Zahlen, die in Polarkoordinaten wesentlich einfacher zu handhaben sind als in Kartesischen Koordinaten. Wir werden später nach der Einführung der exp-Funktion für komplexe Zahlen hierauf genauer eingehen und in Beispiel 5.23 diese Darstellung von A^n noch weiter vereinfachen.