Probeklausur (zur Vorbereitung)

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Bonus	Σ
max Punkte:	10	12	13	13	13	13	13	13	100	(15)	100
erreichte Punkte:											

Note:

Kontrollieren Sie diese Klausur auf Vollständigkeit: sie sollte 8 Seiten haben (Aufgaben 1–8). Tragen Sie Name und Matrikelnummer **auf allen Seiten** ein. Lösungswege und Lösungen sind in die Klausurvorlage (evtl. auf die Rückseiten) einzutragen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung. **Die Klammerung der Klausur nicht lösen!**

Nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!

Dauer: 120 Minuten
Zulässige Hilfsmittel: 1 Lehrbuch + 1 Formelsammlung + Skript + 4 handschriftliche Seiten + nichtprogrammierbarer Taschenrechner

---

Aufgabe 1: (Quickies, 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Hier sind keine Begründungen erforderlich, nur 'ja' oder 'nein' ankreuzen!

a) Ein Punkt x mit $f'(x) = 0$ ist eine Extremstelle der Funktion $f(x)$.	○ ja	○ nein
b) An allen lokalen Extremstellen einer Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ gilt $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$.	○ ja	○ nein
c) Die Ableitung von $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \end{pmatrix}$ ist am Punkt $(x,y) = (0,0)$ invertierbar.	○ ja	○ nein
d) Für (glatte) Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt stets: $\int f(x) \cdot g''(x)\, dx = f(x) \cdot g'(x) - \int f'(x) \cdot g'(x)\, dx.$	○ ja	○ nein
e) $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{n^2 - 2}{n^2 + 2} = 1.$	○ ja	○ nein

Probeklausur. Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 2: (Kurvendiskussion, 5 + 4 + 3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphen von $f(x)$ an!

Lösung:
a) Suche die Extrema:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x\cdot 2\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Test auf Minimum/Maximum mittels zweiter Ableitung:

$$f''(x) = \frac{-2\cdot x\cdot(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot(2\cdot x)}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f''(-1) = \frac{2\cdot 2^2}{2^4} = \frac{1}{2} > 0, \quad f''(1) = \frac{-2\cdot 2^2}{2^4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Damit ist $x = -1$ nach Satz 2.27 der Vorlesung ein lokales Minimum und $x = 1$ ein lokales Maximum.

b) Die Grenzwerte sind

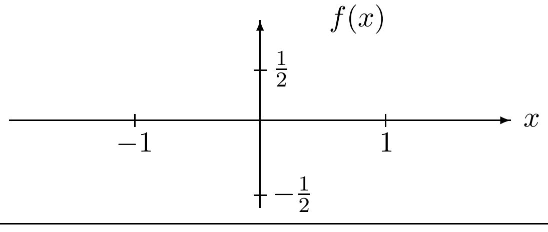
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) Minimum bei $x = -1$. Maximum bei $x = 1$.
b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

c) Skizze:



Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 3: (Elastizität, 5 + 3 + 5 Punkte)
Sei $f(x) = 25 - x^2$ die Nachfrage für ein Gut, das mit der Menge $0 \leq x \leq 5$ angeboten wird.

a) Bestimmen Sie die Elastizität $\epsilon_{f,x}(x)$ der Nachfrage f bezüglich der Angebotsmenge x.

b) Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage für die Angebotsmengen $x = 3$ und $x = 4$.

c) Für welche Angebotsmenge nimmt die Nachfrage um 2% ab, wenn die Angebotsmenge um 1% zunimmt?

Lösung:
a)

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \frac{-2 \cdot x \cdot x}{25 - x^2} = \frac{-2 \cdot x^2}{25 - x^2}.$$

b)

$$\epsilon_{f,x}(3) = \frac{-2 \cdot 3^2}{25 - 3^2} = -\frac{18}{16} = -1.125, \quad \epsilon_{f,x}(4) = \frac{-2 \cdot 4^2}{25 - 4^2} = -\frac{32}{9} \approx -3.556.$$

c) Es soll $\epsilon_{f,x}(x) = -2$ gelten:

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{-2 \cdot x^2}{25 - x^2} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot x^2}{25 - x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x^2 = 2 \cdot (25 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot x^2 = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{25}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \approx \pm 3.536.$$

Der Punkt $x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$ interessiert hier nicht, da nur $0 \leq x \leq 5$ betrachtet wird.

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\epsilon_{f,x}(x) = -\frac{2 \cdot x^2}{25 - x^2}$. b) $\epsilon_{f,x}(3) = -1.125$, $\epsilon_{f,x}(4) \approx -3.556$. c) $x = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.536$.

Probeklausur. Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 4: (Unbestimmte Integration, 5 + 8 Punkte)
Bestimme folgende Stammfunktionen:

$$a) \quad \int x \cdot \cos(x^2) \cdot e^{\sin(x^2)}\, dx, \qquad b) \quad \int (x+1)^2 \cdot \ln(x+1)\, dx.$$

Lösung:
a) Substitution $y = \sin(x^2)$, $dy = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)\, dx$.

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot e^{\sin(x^2)}\, dx = \frac{1}{2} \int e^y\, dy = \frac{1}{2} \cdot e^y + c = \frac{1}{2} \cdot e^{\sin(x^2)} + c.$$

b) Substitution $y = x + 1$, $dy = dx$:

$$\int (x+1)^2 \cdot \ln(x+1)\, dx = \int y^2 \cdot \ln(y)\, dy.$$

Nun partielle Integration:

$$\int \underbrace{y^2}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(y)}_{f}\, dy = \underbrace{\frac{y^3}{3}}_{g} \cdot \underbrace{\ln(y)}_{f} - \int \underbrace{\frac{y^3}{3}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{f'}\, dy$$

$$= \frac{y^3}{3} \cdot \ln(y) - \int \frac{y^2}{3}\, dy = \frac{y^3}{3} \cdot \ln(y) - \frac{y^3}{9} + c.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\int x \cdot \cos(x^2) \cdot e^{\sin(x^2)}\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{\sin(x^2)} + c.$

b) $\int (x+1)^2 \cdot \ln(x+1)\, dx = \frac{y^3}{3} \cdot \ln(y) - \frac{y^3}{9} + c.$

Probeklausur. Name: Vorname: Matrikelnummer:

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 5: (Bestimmte Integration, 7 + 6 Punkte)
Bestimme

$$a) \quad \int_0^1 t \cdot e^{t^2+2}\, dt, \qquad b) \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\, dt.$$

Lösung:
a) Substitution $y = t^2 + 2$, $dy = 2 \cdot t \cdot dt$.
Substitution der unteren Grenze: $t = 0 \Rightarrow y = 2$.
Substitution der oberen Grenze: $t = 1 \Rightarrow y = 3$.

$$\int_0^1 t \cdot e^{t^2+2}\, dt = \frac{1}{2} \int_2^3 e^y\, dy = \frac{1}{2} \Big[\, e^y \,\Big]_{y=2}^{y=3} = \frac{1}{2} \cdot \Big(e^3 - e^2\Big) \approx 6.348.$$

b) Substitution $y = 1 + \sin(t)$, $dy = \cos(t)\, dt$.
Substitution der unteren Grenze: $t = 0 \Rightarrow y = 1$.
Substitution der oberen Grenze: $t = \pi \Rightarrow y = 1$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\, dt = \int_1^1 \frac{1}{y}\, dt = 0.$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: a) $\int_0^1 t \cdot e^{t^2+2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \Big(e^3 - e^2\Big) \approx 6.348$, b) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\, dt = 0$.

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 6: (Etrema von Funktionen mehrerer Variabler, 5 + 3 + 5 Punkte)
Betrachten Sie die Erlösfunktion $E(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$, abhängig von den verkauften Mengen x_1, x_2 zweier Produkte. Die Kosten der Produktion von x_1, x_2 Einheiten dieser Produkte sei $K(x_1, x_2) = 1 + x_1 + 2 \cdot x_2 + x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. Bestimmen Sie die Werte x_1, x_2, an denen der Gewinn maximal wird, berechnen Sie den maximierten Gewinn! Zeigen Sie mit der Hesse–Matrix, daß es sich in der Tat um ein (lokales) Maximum handelt!

Lösung:
Der Gewinn ist

$$G(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - K(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2^2 - 1.$$

Kandidaten für Extremwerte sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 3 - 2 \cdot x_1 - x_2 = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 3 - x_1 - 2 \cdot x_2 = 0$$

bestimmt. Die (einzige) Lösung von

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 + 2 \cdot x_2 = 3$$

ist $x_1 = x_2 = 1$, der Gewinn ist dabei $G(1, 1) = 2$. Die Hesse–Matrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ist konstant und negativ definit ($-H$ ist nach Definition 5.22 der Vorlesung positiv definit, da $(-H)_{11} = 2 > 0$ und $\det(-H) = 3 > 0$). Damit liegt ein Maximum vor.

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $x_1 = 1$ (Einheiten), $x_2 = 1$ (Einheiten).
Der maximierte Gewinn ist: 2 (Geldeinheiten)

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 7: (Extrema mit Nebenbedingungen, 5 + 3 + 5 Punkte)
Eine Firma stellt gemäß der 'Produktionsfunktion' $P(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ (Einheiten) zwei Produkte her. Die Herstellungskosten pro Einheit sind 2 (Geldeinheiten) für das erste Produkt und 4 (Geldeinheiten) für das zweite Produkt. Berechne mittels Lagrangescher Multiplikatoren die 'Minimalkostenkombination' x_1, x_2 bei konstanter Produktion von $P(x_1, x_2) = 50$ Einheiten! Also: minimiere die Kosten unter der Nebenbedingung $P(x_1, x_2) = 50$.

Lösung:
Die Kosten $K(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$ sind unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) - 50 = x_1 \cdot x_2 - 50 = 0$ zu minimieren. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial K}{\partial x_2} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}, \quad g(x_1, x_2) = 0$$

für x_1, x_2, λ, also

$$2 = \lambda \cdot x_2, \quad 4 = \lambda \cdot x_1, \quad x_1 \cdot x_2 = 50.$$

Setzt man $\lambda = \frac{2}{x_2}$ (aus der ersten Gleichung) in die zweite Gleichung ein, ergeben sich die verbleibenden Gleichungen

$$4 = \frac{2 \cdot x_1}{x_2}, \quad x_1 \cdot x_2 = 50$$

für x_1, x_2. Es folgt $x_1 = 2 \cdot x_2$ aus der ersten dieser Gleichungen und damit dann $2 \cdot x_2 \cdot x_2 = 50$ aus der zweiten, also $x_2 = \sqrt{25} = 5$ (nur die positive Lösung ist hier interesssant). Mit $x_1 = 2 \cdot x_2$ folgt $x_1 = 10$.

Heuristische Probe, ob hier wirklich ein Minimum vorliegt. Die Kosten sind für die Minimalkostenkombination $K(10, 5) = 40$. Betrachten wir andere Werte mit $x_1 \cdot x_2 = 50$, z.B. $(x_1, x_2) = (5, 10)$ oder auch $(x_1, x_2) = (25, 2)$, so ergeben sich jeweils höhere Kosten $K(5, 10) = 50$, $K(25, 2) = 80$. Das sieht gut aus!

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

Ergebnis: $x_1 = 10$ (Einheiten), $x_2 = 5$ (Einheiten).

Hier sind Begründungen und nachvollziehbare Rechnungen erforderlich! Aus der Vorlesung oder den Übungen bekannte Sachverhalte können natürlich verwendet werden. **Tragen Sie das Endergebnis im 'Ergebnisfeld' ein!**

Aufgabe 8: (Differentialgleichungen, 10 + 3 Punkte)

a) Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = e^{-x^2}$.

b) Finde die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Lösung:

a) Löse zunächst die homogene DGL durch Separation:

$$\frac{dy}{dx} + 2 \cdot x \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2 \cdot x \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2 \cdot x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int 2 \cdot x \, dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -x^2 + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-x^2+\tilde{c}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{-x^2}.$$

Variation der Konstanten:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-x^2} \quad \text{eingesetzt in} \quad y'(x) + 2 \cdot x \cdot y = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = c'(x) \cdot e^{-x^2} + \underbrace{c(x) \cdot (-2 \cdot x \cdot e^{-x^2}) + 2 \cdot x \cdot y(x)}_{0} = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad c'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int 1 \, dx = x + c_1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-x^2} = (x + c_1) \cdot e^{-x^2}$$

(mit einer beliebigen Konstanten c_1).

b) Anpassen der Anfangsbedingung:

$$y(0) = (0 + c_1) \cdot e^{-0^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1.$$

Die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist damit

$$y(x) = (x + 1) \cdot e^{-x^2}.$$

Kontrolle:

$$y'(x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = e^{-x^2} + (x + 1) \cdot (-2 \cdot x \cdot e^{-x^2}) + 2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}, \quad \text{(ok)}$$

$$y(0) = (0 + 1) \cdot e^{-0^2} = 1. \qquad \text{(ok)}$$

Bei Bedarf auf der Rückseite weiterschreiben

a) Die allgemeine Lösung ist: $y(x) = (x + \text{const}) \cdot e^{-x^2}$.

b) Die spezielle Lösung ist: $y(x) = (x + 1) \cdot e^{-x^2}$.