Übungsblatt 9

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 32*: (Bestimmte Integrale) (1 + 1 + 1 Punkte)
Berechne

$$a)\quad \int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\,dt, \quad b)\quad \int_0^2 t \cdot e^{-t}\,dt, \quad c)\quad \int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin(t)^2}\,dt.$$

Musterlösung:
a) Mit der Stammfunktion

$$\int \sin(\pi \cdot t)\,dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot t) + c$$

folgt sofort

$$\int_0^{10} \sin(\pi \cdot t)\,dt = \left[\frac{-\cos(\pi \cdot t)}{\pi}\right]_{t=0}^{t=10} = \frac{1}{\pi} \cdot \Big(-\cos(10 \cdot \pi) + \cos(0) \Big) = 0.$$

b) Partielle Integration:

$$\int_0^2 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)}\,dt = [\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}]_{t=0}^{t=2} - \int_0^2 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{g(t)}\,dt$$

$$= \left[-t \cdot e^{-t}\right]_{t=0}^{t=2} + \int_0^2 e^{-t} dt = \left[-t \cdot e^{-t}\right]_{t=0}^{t=2} + \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=2}$$

$$= -2 \cdot e^{-2} - e^{-2} + e^0 = 1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0.594.$$

c) Substitution $y = \sin(t)$, $dy = \cos(t)\,dt$. Transformation der unteren Grenze: $t = 0 \Rightarrow y = \sin(0) = 0$. Transformation der oberen Grenze: $t = \pi \Rightarrow y = \sin(\pi) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin(t)^2}\,dt = \int_0^0 e^{y^2}\,dy.$$

Da die Intervallgrenzen übereinstimmen, ist das Integral 0: wir brauchen die Stammfunktion von e^{y^2} gar nicht zu kennen!

$$\int_0^{\pi} \cos(t) \cdot e^{\sin(t)^2}\,dt = 0.$$

Aufgabe 33: (Bestimmte Integrale, gerade und ungerade Funktionen)
Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = -f(t)$ heißt **„ungerade“**. Beispiele: $f(t) = t+t^3$, $f(t) = \sin(t)$. Zeige, daß für jede ungerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0.$$

Eine Funktion mit der Eigenschaft $f(-t) = f(t)$ heißt **„gerade“**. Beispiele: $f(t) = 1 + t^2$, $f(t) = \cos(t)$. Zeige, daß für jede gerade Funktion f und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(t)\, dt.$$

Anleitung:$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \int_{-a}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(t)\, dt$. Substituiere $y = -t$ im ersten Integral.

Musterlösung:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \int_{-a}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(t)\, dt.$$

Substituiere $y = -t$ im ersten Integral: $dy = -dt$. Transformation der Grenzen: $t = -a \Rightarrow y = a$, $t = 0 \Rightarrow y = 0$.

$$\int_{-a}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(t)\, dt = -\int_{a}^{0} f(-y)\, dy + \int_{0}^{a} f(t)\, dt$$
$$= \int_{0}^{a} f(-y)\, dy + \int_{0}^{a} f(t)\, dt = \pm \int_{0}^{a} f(y)\, dy + \int_{0}^{a} f(t)\, dt,$$

wobei für gerade Funktionen das + Zeichen, für ungerade Funktionen das − Zeichen gilt. Nennt man y wieder in t um:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \pm \int_{0}^{a} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(t)\, dt = \begin{cases} 2 \cdot \int_{0}^{a} f(t)\, dt & \text{für gerade Funktionen } f, \\ 0 & \text{für ungerade Funktionen } f. \end{cases}$$

Aufgabe 34*: (Uneigentliche Integrale) (1 + 1 + 2 Punkte)
Für welche Werte von n existieren die folgenden Integrale?

$$a) \quad \int_{1}^{\infty} t^n\, dt, \quad b) \quad \int_{0}^{1} t^n\, dt.$$

Berechne

$$c) \quad \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2}\, dt.$$

Musterlösung:
Es gilt

$$\int t^n\ dt = \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + c & (n \neq -1), \\ \ln(|t|) + c & (n = -1). \end{cases}$$

a) Der Integrand t^n hat für negatives n eine Singularität bei $t = 0$. Für $n \neq -1$:

$$\int_0^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \int_\epsilon^1 t^n\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=\epsilon}^{t=1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{\epsilon \to 0+0} \epsilon^{n+1}.$$

Für $n + 1 > 0$ existiert dieser Grenzwert (und ist $\frac{1}{n+1}$). Für $n + 1 < 0$ existiert er nicht (bzw. ist ∞; beachte $\frac{1}{n+1} < 0$). Für $n = -1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\ dt = \lim_{\epsilon \to 0+0} [\ln(|t|)]_{t=\epsilon}^{t=1} = -\lim_{\epsilon \to 0+0} \ln(|\epsilon|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_0^1 t^n\ dt = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{für } n > -1, \\ \infty & \text{für } n \leq -1. \end{cases}}$$

b) Für $n \neq -1$ gilt:

$$\int_1^\infty t^n\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_1^b t^n\ dt = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=1}^{t=b} = \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{b \to \infty} b^{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Für $n + 1 > 0$ existiert dieser Grenzwert nicht (bzw. ist ∞). Für $n + 1 < 0$ existiert der Grenzwert und ist $-\frac{1}{n+1}$. Für $n = -1$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{t}\ dt = \lim_{b \to \infty} [\ln(|t|)]_{t=1}^{t=b} = \lim_{b \to \infty} \ln(|b|) = \infty.$$

Ergebnis:

$$\boxed{\int_1^\infty t^n\ dt = \begin{cases} \infty & \text{für } n \geq -1, \\ -\frac{1}{n+1} & \text{für } n < -1. \end{cases}}$$

c) Substitution $y = t^2$, $dy = 2 \cdot t\ dt \Rightarrow t \cdot dt = \frac{dy}{2}$:

$$\int_{-\infty}^\infty t \cdot e^{-t^2}\ dt = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \int_a^b e^{-t^2}\ \underbrace{t \cdot dt}_{dy/2} \right) = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{a^2}^{b^2} e^{-y}\ dt \right)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} \left[-e^{-y} \right]_{y=a^2}^{y=b^2} \right) = \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to \infty} (e^{-a^2} - e^{-b^2}) \right)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(e^{-a^2} - \lim_{b \to \infty} e^{-b^2} \right) = \lim_{a \to -\infty} e^{-a^2} = 0.$$

Aufgabe 35: (Substitution und partielle Integration) (etwas anspruchsvoller)
Zeige
$$\int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-t} \ dt = \int_0^\infty e^{-y^2} \ dy.$$
(Anleitung: Substitution $y = \sqrt{t}$, dann geeignete partielle Integration). Welchen Wert liefert MuPAD für das Integral?

Musterlösung:
Mit $y = \sqrt{t}$ ($\Rightarrow dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \ dt = \frac{1}{2 \cdot y} \ dt$):
$$\int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-t} \ dt = \int_0^\infty y \cdot e^{-y^2} \cdot \underbrace{2 \cdot y \ dy}_{dt}.$$
Nun partielle Integration (hier braucht man „Augenmaß“, was zu tun ist):
$$\int_0^\infty \underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^{-y^2} \cdot 2 \cdot y}_{g'(y)} \ dy = [\underbrace{y}_{f(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)}]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty \underbrace{1}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(-e^{-y^2})}_{g(y)} \ dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \ dy$$
Die Randterme fallen dabei weg:
$$\Big[y \cdot (-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=\infty} = \lim_{b \to \infty} \Big[y \cdot (-e^{-y^2})\Big]_{y=0}^{y=b} = \lim_{b \to \infty} \Big(- b \cdot e^{-b^2}\Big) - 0 \cdot (-e^{-0^2}) = 0$$
(vergleiche dazu auch Beispiel 4.43 der Vorlesung). MuPAD liefert als Wert:

```
>> int(sqrt(t)*exp(-t), t = 0..infinity)

                                 1/2
                               PI
                               -----
                                 2

>> int(exp(-y^2), y = 0..infinity)

                                 1/2
                               PI
                               -----
                                 2
```

Aufgabe 36: (MuPAD und numerische Integration)
Studiere einige Beispiele der Hilfeseiten zu MuPAD's numerischen Integrierern `numeric::int` und `numeric::quadrature`. Berechne den Wert von $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\pi + \sqrt{t} + \sin(t)} \ dt$ auf 10 Dezimalstellen genau!

Musterlösung:

```
>> numeric::int(exp(-t^2)/(PI + sqrt(t) + sin(t)), t = 0..infinity)

                                0.2094116015
```

Aufgabe 37*: (Konsumentenrente mit MuPAD) (2 Punkte)

Beachte Beispiel 4.40 der Vorlesung. Betrachte die Nachfragefunktion $p(x) = e^{-3\cdot x} + 1 - \frac{x^2}{x^2+27}$. Der aktuelle Marktpreis $p_0 = p(x_0)$ sei so gewählt, daß der Erlös $E(x) = x \cdot p(x)$ maximiert ist. Berechne die Konsumentenrente auf mindestens 3 Dezimalstellen genau!

Musterlösung:
Definition der Nachfragefunktion:

```
>> p := x -> exp(-3*x) + 1 - x^2/(x^2 + 27):
```

Finde das Maximum von $E(x) = x \cdot p(x)$ als Nullstelle von $E'(x)$:

```
>> numeric::solve(diff(x*p(x), x) = 0, x)

                          {5.196126673}
```

Zuweisung des Maximums an x_0:

```
>> x0 := %[1]
                           5.196126673
```

Zuweisung des aktuellen Marktpreises:

```
>> p0 := p(x0)
                          0.5000026476
```

Berechnung der Konsumentenrente:

```
>> Konsumentenrente = numeric::int(p(x), x = 0..x0) - x0*p(x0)

                 Konsumentenrente = 1.816291878
```

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag, 26.6.01, zu Beginn der Vorlesung.}}$

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 9, Abgabe: 26.6.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 14–16, P1510 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	32*	33	34*	35	36	37*	$\sum$
max Punkte	3	–	4	–	–	2	
erreicht:							