MATHE B FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER — Sommersemester 01
WALTER OEVEL — 5. 6. 2001

Übungsblatt 8

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 28*: (partielle Integration) (1 + 1 + 2 Punkte)
Berechne unter Angabe von Zwischenschritten:

$$a)\quad \int x\cdot\sin(x)\,dx,\qquad b)\quad \int x^2\cdot\ln(x)\,dx,\qquad c)\quad \int \sin(x)\cdot e^x\,dx.$$

Anleitung zu b): Beachte Beispiel 4.11 der Vorlesung.
Anleitung zu c): zweimalige partielle Integration. Beachte auch Beispiel 4.13 der Vorlesung.

Musterlösung:
a)

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx.$$

$$= -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + c\ .$$

b) Analog zu Beispiel 4.11 der Vorlesung:

$$\int \underbrace{x^2}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{g(x)}\,dx$$

$$= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + c\ .$$

c)

$$\int \sin(x)\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)\cdot e^x\,dx$ wurde durch $\int\cos(x)\cdot e^x\,dx$ ausgedrückt. Eine zweite partielle Integration:

$$\int \cos(x)\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\sin(x))}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$

$$= \cos(x)\cdot e^x + \int \sin(x)\cdot e^x\,dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int\sin(x)\cdot e^x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \sin(x)\cdot e^x\,dx &= \sin(x)\cdot e^x - \textstyle\int\cos(x)\cdot e^x\,dx\\
&= \sin(x)\cdot e^x - \cos(x)\cdot e^x - \textstyle\int\sin(x)\cdot e^x\,dx\\
\Rightarrow\quad 2\cdot\textstyle\int\sin(x)\cdot e^x\,dx &= x(\sin(x)-\cos(x))\cdot e^x + c\\
\Rightarrow\quad \textstyle\int\sin(x)\cdot e^x\,dx &= \tfrac{1}{2}\cdot\Big(\sin(x)-\cos(x)\Big)\cdot e^x + \tilde{c}.
\end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\frac{c}{2}$ in $\tilde{c}$ umbenannt.)

Aufgabe 29*: (Substitution) (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Berechne unter Angabe von Zwischenschritten:

$$a) \quad \int e^{2\cdot x+3}\ dx, \quad b) \quad \int \cos(x)\cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\ dx$$

$$c) \quad \int \frac{\sin(\ln(2\cdot x+3))}{2\cdot x+3}\ dx, \quad d) \quad \int x\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(\cos(x^2))\ dx.$$

Musterlösung:
a) Substituiere $y = 2\cdot x+3$ ($\Rightarrow dy = 2\cdot dx$):

$$\int e^{2\cdot x+3}\ dx = \int e^y\ \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot x+3}}{2} + c.$$

b) Substituiere $y = 2\cdot\sin(x)+3$ ($\Rightarrow dy = 2\cdot\cos(x)\cdot dx$):

$$\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot\sin(x)+3}\ dx = \int e^y\ \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{2\cdot\sin(x)+3}}{2} + c.$$

c) Substituiere $y = \ln(2\cdot x+3)$ ($\Rightarrow dy = \frac{2}{2\cdot x+3}\ dx$):

$$\int \frac{\sin(\ln(2\cdot x+3))}{2\cdot x+3}\ dx = \int \sin(y)\ \frac{dy}{2} = -\cos(y) = -\frac{1}{2}\cdot\cos(\ln(2\cdot x+3)) + c.$$

d) Substituiere $y = \cos(x^2)$ ($\Rightarrow dy = -2\cdot x\cdot\sin(x^2)\cdot dx$):

$$\int x\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(\cos(x^2))\ dx = \int \sin(y)\ \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2}\cdot(-\cos(y)) = \frac{1}{2}\cdot\cos(\cos(x^2)).$$

Aufgabe 30*: (Partialbruchzerlegung) (1 + 2 Punkte)
Berechne unter Angabe von Zwischenschritten:

$$a) \quad \int \frac{2\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)}\ dx, \quad b) \quad \int \frac{x^2+2}{(x-1)\cdot(x-2)}\ dx.$$

Musterlösung:
a) Ansatz

$$\frac{2\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a\cdot(x-2)+b\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$2\cdot x = a\cdot(x-2)+b\cdot(x+1) = (a+b)\cdot x + (b-2\cdot a).$$

Es folgen die Gleichungen

$$2 = a+b, \quad 0 = b-2\cdot a$$

mit der Lösung $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$. Also:

$$\int \frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot (x-2)} \; dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x-2} \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \ln(|x+1|) + \frac{4}{3} \cdot \ln(|x-2|) + c.$$

b) Zunächst Polynomdivision, um den Zählergrad zu reduzieren. Beachte $(x-1) \cdot (x-2) = x^2 - 3 \cdot x + 2$:

$$\begin{array}{lcccc} x^2 + 2 & : & x^2 - 3 \cdot x + 2 & = & 1 \\ \underline{x^2 - 3 \cdot x + 2} & & & & \\ \quad 3 \cdot x & & & & \end{array}$$

also

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x-2)} = 1 + \frac{3 \cdot x}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Partialbruchzerlegung des verbleibenden Bruchs:

$$\frac{3 \cdot x}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a \cdot (x-2) + b \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Vergleich der Zähler:

$$3 \cdot x = a \cdot (x-2) + b \cdot (x-1) = (a+b) \cdot x + (-2 \cdot a - b).$$

Es folgen die Gleichungen

$$3 = a + b, \quad 0 = -2 \cdot a - b$$

mit der Lösung $a = -3$, $b = 6$. Also:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x-2)} = 1 - \frac{3}{x-1} + \frac{6}{x-2}.$$

Es folgt:

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x-2)} \; dx = \int \left(1 - \frac{3}{x-1} + \frac{6}{x-2} \right) dx = x - 3 \cdot \ln(|x-1|) + 6 \cdot \ln(|x-2|) + c.$$

Aufgabe 31: (MuPAD)

Überprüfe mit der Funktion `partfrac` MuPADs die in Aufgabe 30) benötigten Partialbruchzerlegungen und die resultierenden Stammfunktionen.

Musterlösung:

a)

```
>> partfrac(2*x/((x + 1)*(x - 2)), x)

                       2           4
                   --------- + ---------
                   3 (x + 1)   3 (x - 2)

>> int(%, x)
                 2 ln(x + 1)   4 ln(x - 2)
                 ----------- + -----------
                      3             3
```

b)

```
>> partfrac((x^2 + 2)/((x - 1)*(x - 2)), x)

                         6       3
                       ----- - ----- + 1
                       x - 2   x - 1

>> int(%, x)
                 x - 3 ln(x - 1) + 6 ln(x - 2)
```

ABGABE: Dienstag, 19.6.01, zu Beginn der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 8, Abgabe: 19.6.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 14–16, P1510 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	28*	29*	30*	31	$\sum$
max Punkte	4	4	3	–	
erreicht:					