Übungsblatt 7

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Bei der folgenden Aufgabe handelt es sich um ein individualisertes „Miniprojekt", in das die Matrikelnummer eingeht (jeder hat seine eigene Aufgabe). Es ist nur das in c) gefragte Endergebnis auf dem beigefügten Formblatt abzugeben. Dementsprechend gibt es keinerlei Teilpunkte: das Ergebnis ist entweder 'richtig' oder 'falsch'.

Aufgabe 27*: (Differentialrechnung in der Ökonomie) (12 Punkte)
Ein neuer Kleinwagen soll auf dem deutschen Markt eingeführt werden. Man plant, zwischen 16 000 und 22 000 DM für dieses Modell zu fordern. Zur Festlegung des Preises hat die schon in Aufgabe 21 aktive Marketingabteilung eine Meinungsumfrage beauftragt. Man schätzte, daß es insgesamt etwa 15 000 000 potentielle Kunden in Deutschland gibt. Aus dieser Zielgruppe wurde eine „repräsentative" Teilgruppe von 1 000 Personen befragt. Die Frage *„Wieviel DM darf dieses Modell maximal kosten, damit Sie es kaufen würden?"* wurde von den insgesamt 1 000 Befragten folgendermaßen beantwortet:

maximaler Preis	16 000	17 000	18 000	19 000	20 000	21 000	22 000	(in DM)
wurde angegeben von	8	12	13	18	14	12	2	Befragten

(Die restlichen 921 Befragten gaben an, an dem Auto nicht interessiert zu sein). Setze voraus, daß diese Umfrage in der Tat repräsentativ ist, d.h., daß die Nachfrage unter den 1 000 Befragten auf die 15 000 000 potentiellen Kunden der Zielgruppe hochgerechnet werden kann.

a) Konstruiere analog zu Aufgabe 21 aus diesen Daten eine polynomiale Modellfunktion $x(p)$ für die Gesamtnachfrage x in Deutschland in Abhängigkeit vom Preis p.

b) Die Gesamtkosten $K(x)$ der Produktion von insgesamt x Autos sei gegeben durch

$$K(x) = 200\,000\,000 + \Big(8\,000 + \frac{M}{1000} + 300 \cdot m\Big) \cdot x\,.$$

Hierbei sei M Deine Matrikelnummer und m die letzte Ziffer Deiner Matrikelnummer. In dieser Modellfunktion stellt $8\,000 + \frac{M}{1000} + 300 \cdot m$ die Materialkosten des Wagens (in DM) dar. Die fixen Kosten (Entwicklung des Modells etc.) seien 200 000 000 (DM).

c) Finde den Marktpreis p, für den der Gewinn $G(p) = p \cdot x(p) - K(x(p))$ maximal wird. Liefere diesen Marktpreis bis auf ± 1 DM genau als Lösung auf dem beigefügten Formblatt ab.

Musterlösung:
a) Ansatz der Absatzfunktion als Polynom. Da 7 Daten vorliegen, kann man 7 unbekannte Parameter $c_0, \ldots, c_6$ in den Ansatz einbauen:

```
>> x:= p -> c0 + c1*p + c2*p^2 + c3*p^3 + c4*p^4 + c5*p^5 + c6*p^6:
```

Aufstellen der Gleichungen für $c_0, \ldots, c_6$: Da von den 15 000 000 potentiellen Kunden nur 1 000 befragt wurden, werden die Umfrageergebnisse mit dem Faktor 15 000 „hochgerechnet":

```
>> gleichung1:= x(16000) = (8 + 12 + 13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung2:= x(17000) =     (12 + 13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung3:= x(18000) =          (13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung4:= x(19000) =               (18 + 14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung5:= x(20000) =                    (14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung6:= x(21000) =                         (12 + 2)*15000:
   gleichung7:= x(22000) =                               2 *15000:
```

Lösen der Gleichungen:

```
>> solve({gleichung1, gleichung2, gleichung3, gleichung4,
          gleichung5, gleichung6, gleichung7},
         {c0, c1, c2, c3, c4, c5, c6})

{[c0 = -40914195000, c1 = 52466933/4, c2 = -41945203/24000,

   c3 = 9911/80000, c4 = -23651/4800000000,

   c5 = 417/4000000000000, c6 = -11/12000000000000000]}
```

Mit `assign` werden die Gleichungen in Zuweisungen verwandelt:

```
>> assign(%[1])
>> x(p)
                       2         3           4
52466933 p   41945203 p    9911 p     23651 p
---------- - ----------- + ------- - ---------- +
    4           24000       80000    4800000000

           5                  6
      417 p              11 p
   ------------- - ----------------- - 40914195000
   4000000000000   12000000000000000
```

Kontrolle: für die in der Tabelle vorhandenen Preise müssen sich nach Konstruktion die in der Tabelle vorhandenen Absätze ergeben:

```
>> x(i*1000)/15000 $ i = 16..22

                   79, 71, 59, 46, 28, 14, 2
```

b) Die Kostenfunktion wird für die Matrikelnummer $M = 1234567$ definiert:

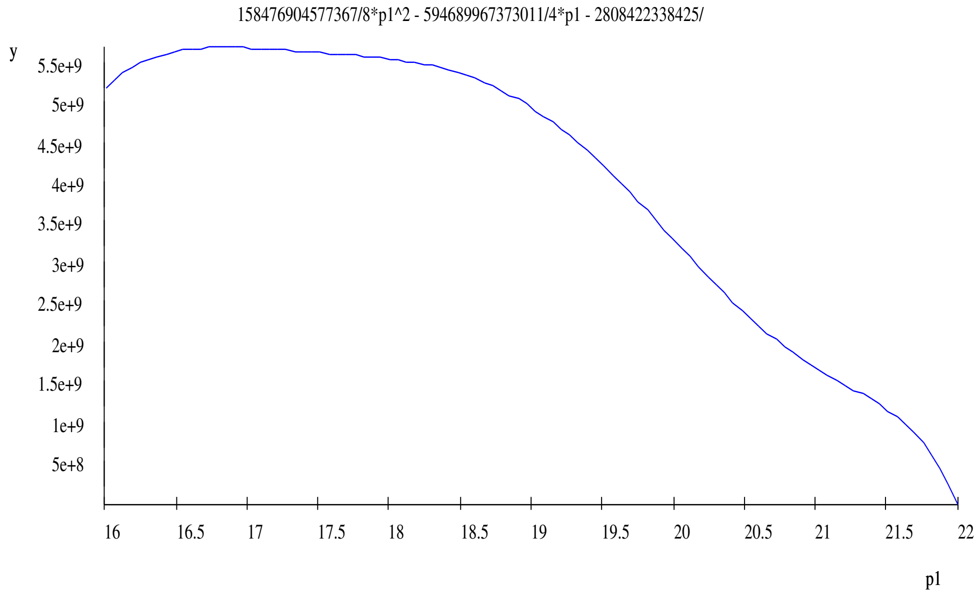
```
>> M:= 1234567: m:= 7:
>> K:= x -> 200000000 + (8000 + M/1000 + 300*m)*x:
```

c) Die Gewinnfunktion:

```
G:= p -> p*x(p) - K(x(p))
```

Mit der Option `Ticks = 10` erreicht man, daß weitere Achsenmarken in einen Funktionsplot eingefügt werden. Der Preis wird in Einheiten von 1 000 DM eingegeben:

```
>> plotfunc2d(G(p*1000), p = 16..22, Ticks = 10)
```



Der Graphik entnimmt man, daß der maximale Gewinn bei einem Preis zwischen 16 500 DM und 17 000 DM erzielt wird. Genauer: die Extremstellen sind numerisch als Nullstellen der Ableitungsfunktion zu berechnen.

```
>> numeric::solve(diff(G(p), p) = 0, p)

{12303.28325, 16810.10174, 17676.44139 + 569.3356421 I,

   17676.44139 - 569.3356421 I, 21364.79742 + 532.251826 I,

   21364.79742 - 532.251826 I}
```

Einige dieser Nullstellen (die mit I $= \sqrt{-1}$) sind komplex und uninteressant. Graphisch ist klar, daß $p = 16\,810.101...$ das Maximum ist. Also ist der optimale Preis 16 810 DM.

Anmerkung für die Korrekteure der Übungen: die folgende MuPAD–Prozedur berechnet zu jeder Matrikelnummer M den optimalen Preis. **Achtung:** die Polynom-Interpolation ist numerisch instabil. Sollten Studenten das Interpolationspolynom mit Gleitpunktzahlen berechnen, so kann das Endergebnis bei `DIGITS` $= 10$ wegen Rundungsfehlern bereits um bis zu ± 1 DM abweichen. Damit sind Lösungen mit Abweichungen bis zu ± 2 DM als 'richtig' zu akzeptieren.

```
Loesung:= proc(M)
local gleichung1, gleichung2, gleichung3, gleichung4,
      gleichung5, gleichung6, gleichung7,
      x, m, K, G, p, result;
begin
   m:= M - 10*trunc(M/10);
   delete c0, c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7:
   x:= p -> c0 + c1*p + c2*p^2 + c3*p^3 + c4*p^4 + c5*p^5 + c6*p^6:
   gleichung1:= x(16000) = (8 + 12 + 13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
   gleichung2:= x(17000) =     (12 + 13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
```

```
  gleichung3:= x(18000) =          (13 + 18 + 14 + 12 + 2)*15000:
  gleichung4:= x(19000) =               (18 + 14 + 12 + 2)*15000:
  gleichung5:= x(20000) =                    (14 + 12 + 2)*15000:
  gleichung6:= x(21000) =                         (12 + 2)*15000:
  gleichung7:= x(22000) =                               2 *15000:
  solve({gleichung1, gleichung2, gleichung3, gleichung4,
         gleichung5, gleichung6, gleichung7},
         {c0, c1, c2, c3, c4, c5, c6}):
  assign(%[1]):
  K:= x -> 200000000 + (8000 + M/1000 + m*300)*x:
  G:= p -> p*x(p) - K(x(p)):
  // p:= genident("p"):
  // plotfunc2d(G(p*1000), p = 16..22, Ticks = 10);
  p:= numeric::solve(diff(G(p), p) = 0, p):
  // eliminate all non-real roots:
  result:= map(p, x -> if type(x) = DOM_FLOAT then
                       x else null() end);
  // eliminate all real roots outside search range:
  result:= map(result, x -> if 16000 <= x and x <= 22000 then
                       x else null() end):
  // pick maximum
  result:= map(result, x -> if G''(x) < 0 then
                       x else null() end):
  if nops(result) <> 1 then
     error("could not find a unique maximum"):
  end_if:
  op(result):
end:
```

Z.B.:

```
>> Loesung(1234567)
                          16810.10174
>> Loesung(5555555)
                          18692.02003
>> Loesung(6012345)
                          18818.25683
```

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag, 12.6.01, zu Beginn der Vorlesung.}}$

Nur das beiliegende Formblatt abgeben, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe und Lösung leserlich(!) angeben.

Nur dieses Formblatt abgeben!

Mathe B für WiWi, Blatt 7, Abgabe: 12.6.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer (**unbedingt angeben!**):

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- □ Di 14–16, P1510 Ettler (Gruppe 1)
- □ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- □ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- □ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- □ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- □ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- □ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- □ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- □ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- □ keine Gruppenzugehörigkeit

Lösung der Aufgabe 27: Der Marktpreis, der den Gewinn maximiert, ist $p =$ $\boxed{\qquad\qquad \text{DM.}}$

Aufgabe	27*
max Punkte	12
erreicht:	