Übungsblatt 6

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 22*: (Ableiten) (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Differenziere:

a) $\sin(x-5)^7$, b) $\sqrt{x^2+1}$, c) $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x+1}$,

d) $\dfrac{\sin(x+1)}{\cos(x-1)}$, e) $e^{(x^2)} \cdot \ln(2 \cdot x)$, f) $x^{(x^2)}$.

Anleitung zu f): nach Bemerkung 1.71 der Vorlesung gilt $x^y = e^{y \cdot \ln(x)}$.

Musterlösung:
a) Kettenregel (beachte $\frac{d}{dy} y^7 = 7 \cdot y^6$):

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x-5)^7 = 7 \cdot \sin(x-5)^6 \cdot \frac{d}{dx}\sin(x-5)$$
$$= 7 \cdot \sin(x-5)^6 \cdot \cos(x-5) \cdot \frac{d}{dx}(x-5) = 7 \cdot \sin(x-5)^6 \cdot \cos(x-5).$$

MuPAD:

```
>> diff(sin(x - 5)^7, x)
                                        6
                 7 cos(x - 5) sin(x - 5)
```

b) Kettenregel (beachte $\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$):

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

MuPAD:

```
>> diff(sqrt(x^2 + 1), x)

                       x
                  -----------
                    2      1/2
                  (x  + 1)
```

c) Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}x^2\right) \cdot (x+1) - x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx}(x+1)\right)}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2 \cdot x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1\ .$$

Dies ist nicht überraschend, da sich die Ausgangsfunktion vereinfachen läßt:

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x+1} = x - 1.$$

MuPAD:

```
>> diff(x^2/(x + 1) - 1/(1 + x), x)
                                                     2
                    1           2 x          x
                 -------- + ----- - --------
                         2   x + 1            2
                 (x + 1)              (x + 1)

>> normal(%)
                               1
```

d) Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{\sin(x+1)}{\cos(x-1)} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\sin(x+1)\right)\cdot\cos(x-1) - \sin(x+1)\cdot\left(\frac{d}{dx}\cos(x-1)\right)}{\cos(x-1)^2}$$

$$= \frac{\cos(x+1)\cdot\cos(x-1) + \sin(x+1)\cdot\sin(x-1)}{\cos(x-1)^2}.$$

MuPAD:

```
>> diff(sin(x + 1)/cos(x - 1), x)

             cos(x + 1)   sin(x - 1) sin(x + 1)
             ---------- + --------------------
             cos(x - 1)                 2
                                cos(x - 1)

>> normal(%)

        cos(x - 1) cos(x + 1) + sin(x - 1) sin(x + 1)
        ---------------------------------------------
                                    2
                          cos(x - 1)
```

e) Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ e^{(x^2)}\cdot\ln(2\cdot x) = \left(\frac{d}{dx}e^{(x^2)}\right)\cdot\ln(2\cdot x) + e^{(x^2)}\left(\frac{d}{dx}\ln(2\cdot x)\right)$$

$$= 2\cdot xe^{(x^2)}\cdot\ln(2\cdot x) + e^{(x^2)}\cdot\frac{2}{2\cdot x} = e^{(x^2)}\left(2\cdot x\cdot\ln(2\cdot x) + \frac{1}{x}\right).$$

MuPAD:

```
>> diff(exp(x^2)*ln(2*x), x)

                      2
                 exp(x )                    2
                 ------- + 2 x ln(2 x) exp(x )
                    x
```

f) Kettenregel (mit $\frac{d}{dy}e^y = e^y$):

$$\frac{d}{dx}\ x^{(x^2)} = \frac{d}{dx}\ e^{x^2\cdot\ln(x)} = e^{x^2\cdot\ln(x)}\cdot\frac{d}{dx}\ \left(x^2\cdot\ln(x)\right)$$

$$= x^{(x^2)}\cdot\left(2\cdot x\cdot\ln(x) + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{(x^2)}\cdot\left(2\cdot x\cdot\ln(x) + x\right) = x^{(x^2)}\cdot x\cdot\left(2\cdot\ln(x)+1\right).$$

MuPAD:

```
>> diff(x^(x^2), x)
                                2         2
                               x     2  x   - 1
                  2 x ln(x) x    + x   x

>> factor(%);
                            2
                           x
                      x x    (2 ln(x) + 1)
```

Aufgabe 23: (Die Ableitung von Umkehrfunktionen)
Betrachte $f(x) = \sin(x)$ über dem Definitionsbereich $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Es gibt eine Umkehrfunktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (warum?). Diese Umkehrfunktion wird üblicherweise mit 'arcsin' bezeichnet. Berechne $\arcsin'(\frac{1}{4})$. (Beachte Satz 2.17 der Vorlesung.)

Musterlösung:
Auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist sin streng monoton steigend mit dem Bildbereich

$$-1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \leq \sin(x) \leq \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

für $x \in D$, siehe:

```
>> plotfunc2d(sin(x), x = -PI/2 .. PI/2)
```

Damit ist sin auf D invertierbar. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt nach 2.17:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Wegen $\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$ gilt $\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin(y)^2}$. Für $y = \arcsin(x) \in D$ gilt $\cos(y) \geq 0$, also $\cos(y) = +\sqrt{1 - \sin(y)^2}$. Damit ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Speziell folgt:

$$\arcsin'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

MuPAD:

```
>> arcsin'(x), arcsin'(1/4)

                                 1/2
           1          4 15
       -----------, -------
             2 1/2     15
       (1 - x )
```

Aufgabe 24: (Höhere Ableitungen und Taylor–Polynome)

a) Berechne die Werte der ersten 3 Ableitungen von $f(x) = \sin(x) - x$ am Nullpunkt.

b) Berechne das Taylor–Polynom $T_3(x)$ der Funktion $f(x) = \sin(x) - x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeige damit, daß die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3} & \text{für } x \neq 0, \\ -\frac{1}{6} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

am Nullpunkt stetig ist.

Musterlösung:
a)

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \sin(x) - x \quad ; \quad f(0) = 0, \\ f'(x) &=& \cos(x) - 1 \quad ; \quad f'(0) = 1 - 1 = 0, \\ f''(x) &=& -\sin(x) \quad ; \quad f''(0) = 0, \\ f'''(x) &=& -\cos(x) \quad ; \quad f'''(0) = -1. \end{array}$$

b) Mit

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

folgt

$$\sin(x) - x \approx T_3(x) = \frac{-1}{3!} \cdot x^3 = -\frac{x^3}{6}.$$

Damit gilt für kleine x

$$g(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3} \approx \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6} \ ,$$

wobei im Grenzwert $x \to 0$ das $\approx$ zu $=$ wird.

Aufgabe 25*: (l'Hospital) (2 Punkte)

Berechne mittels der l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ unter Angabe von Zwischenschritten.

Musterlösung:
Zweifache Anwendung von l'Hospital (solange eine $\frac{0}{0}$–Situation vorliegt):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos(x))}{\frac{d}{dx} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2 \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin(x)}{\frac{d}{dx} 2 \cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

MuPAD:

```
>> limit((1 - cos(x))/x^2, x = 0)

                         1/2
```

Aufgabe 26*: (Extrema, MuPAD) (2 Punkte)

Finde (z.B. mittels MuPAD) alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = (x - 2 \cdot x^3) \cdot e^{-x^2}$. Ermittle über die zweiten Ableitungen, ob es sich jeweils um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

Musterlösung:

```
>> f:= x -> (x - 2*x^3)*exp(-x^2):
>> factor(f'(x))

                 2             2                   2
         exp(- x ) (2 x + 2 x  - 1) (- 2 x + 2 x  - 1)

>> extrema:= solve(f'(x) = 0, x)

     {    1/2                1/2   1/2          1/2       }
     {   3                  3     3            3          }
     { - ---- - 1/2, 1/2 - ----, ---- - 1/2, ---- + 1/2 }
     {    2                  2     2            2         }

>> float(%)

   {-1.366025404, -0.3660254038, 0.3660254038, 1.366025404}

>> float(f''(extrema[i])) $ i = 1..4

     -2.928902093, 4.435855751, -4.435855751, 2.928902093
```

Damit ist $x_1 = -1.366...$ ein lokales Maximum, $x_2 = -0.366...$ ein lokales Minimum, $x_3 = 0.366...$ ein lokales Maximum, $x_4 = 1.366...$ ein lokales Minimum. Siehe auch

```
>> plotfunc2d(f(x), x = -3..3)
```

Die Extremwerte sind:

```
>> float(f(extrema[i])) $ i = 1..4

    0.577488063, -0.2343516549, 0.2343516549, -0.577488063
```

ABGABE: Dienstag, 5.6.01, zu Beginn der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 6, Abgabe: 5.6.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, H7.321 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	22*	23	24	25*	26*	$\sum$
max Punkte	6	–	–	2	2	
erreicht:						