Übungsblatt 5

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 17: (Umkehrfunktionen)

a) Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$. Bestimme den Wertebereich $f(D)$! Benutze dabei (ohne Beweis), daß die Funktion streng monoton steigend ist. Bestimme die Umkehrfunktion!

b) Betrachte die Funktion $f(x) = 2^{10 \cdot x}$ auf dem Definitionsbereich $D = R$. Bestimme den Wertebereich und die Umkehrfunktion!

Musterlösung:
a) Die Funktion ist monoton steigend, beginnt bei $x = 0$ mit $f(0) = 0$ und steigt bis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Der Wertebereich ist damit $f(D) = [0, 1)$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y \cdot (1 + x^2) = y + y \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y \cdot x^2 = y$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-y) \cdot x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{y}{1-y} \quad \overset{(x\geq 0)}{\Longleftrightarrow} \quad x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

b) Es gilt

$$f(x) = 2^{10 \cdot x} = e^{\ln(2^{10 \cdot x}} = e^{10 \cdot x \cdot \ln(2)}.$$

Mit $x \in \mathbb{R}$ nimmt $10 \cdot x \cdot \ln(2)$ alle Werte in $\mathbb{R}$ an, damit nimmt $e^{10 \cdot x \cdot \ln(2)}$ den gesamten Bildbereich der Exponentialfunktion als Werte an. Der Wertebereich ist also $(0, \infty)$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{\ln(y)}{10 \cdot \ln(2)}$:

$$y = e^{10 \cdot x \cdot \ln(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = 10 \cdot x \cdot \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(y)}{10 \cdot \ln(2)}.$$

Aufgabe 18*: (Der natürliche Logarithmus) (1 + 2 Punkte)
Beachte Beispiel 1.70 der Vorlesung.

a) Löse die Gleichung $2^x = 10 \cdot 3^{4 \cdot x}$ unter Angabe von Zwischenschritten.

b) Betrachte noch einmal Beispiel 1.33 der Vorlesung:

$$K_n = K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \ .$$

Nach wievielen Jahren ist mein Kapital aufgebraucht, wenn mit dem jährlichen Zinssatz p verzinst wird und ich jährlich die Rente R entziehe? Finde eine allgemeine Formel für n als Ausdruck in K_0, R und p! Wann ist das Kapital aufgebraucht, wenn ich bei 5% Zinsen jährlich 10% des Anfangskapitals als Rente entziehe?

Musterlösung:
a)

$$2^x = 10 \cdot 3^{4\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(10 \cdot 3^{4\cdot x}) = \ln(10) + \ln(3^{4\cdot x})$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(2) = \ln(10) + 4 \cdot x \cdot \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(2) - 4 \cdot x \cdot \ln(3) = \ln(10)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (\ln(2) - 4 \cdot \ln(3)) = \ln(10)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(10)}{\ln(2) - 4 \cdot \ln(3)} = \frac{2.30258...}{0.6931... - 4 \cdot 1.0986...} \approx -0.6221... \; .$$

b) Die Gleichung $K_n = 0$ ist nach n aufzulösen:

$$0 = K_n = K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = K_0 \cdot p \cdot (1+p)^n - R \cdot (1+p)^n + R$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = (K_0 \cdot p - R) \cdot (1+p)^n + R \quad \Leftrightarrow \quad (R - K_0 \cdot p) \cdot (1+p)^n = R$$
$$\Leftrightarrow \quad (1+p)^n = \frac{R}{R - K_0 \cdot p} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\Big((1+p)^n\Big) = \ln\Big(\frac{R}{R - K_0 \cdot p}\Big)$$
$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(1+p) = \ln\Big(\frac{R}{R - K_0 \cdot p}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n = \frac{\ln\Big(\frac{R}{R - K_0 \cdot p}\Big)}{\ln(1+p)}.}$$

Hierbei ist $R > K_0 \cdot p$ vorausgesetzt, damit das Argument des ln positiv ist (anderenfalls würde ich jährlich weniger als den Zinszuwachs $K_0 \cdot p$ entziehen, d.h., das Kapital würde wachsen und wäre niemals aufgebraucht). Für $R = 0.1 \cdot K_0$ und $p = 0.05$ ergibt sich

$$n = \frac{\ln\Big(\frac{0.1 \cdot K_0}{0.1 \cdot K_0 - K_0 \cdot 0.05}\Big)}{\ln(1.05)} = \frac{\ln\Big(\frac{0.1}{0.1 - 0.05}\Big)}{\ln(1.05)} = \frac{\ln\Big(\frac{0.1}{0.05}\Big)}{\ln(1.05)} = \frac{\ln(2.0)}{\ln(1.05)}.$$

Das Kapital wäre nach etwa 14 Jahren aufgebraucht:

```
>> ln(2.0)/ln(1.05)
                                14.20669908
```

Aufgabe 19: (MuPAD und die trigonometrischen Funktionen)

a) Zeichne die Graphen von $\cos(x)$ und $\sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)$ in eine gemeinsame MuPAD-Graphik!

b) Zeige mit „Satz und Definition 1.74“ der Vorlesung: $\sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \cos(x)$.

c) Lies die Hilfeseite der MuPAD-Funktion `expand`. „Expandiere“ `sin(PI/2 - x)`, `cos(2*x + PI)`, `sin(10*x)`.

Musterlösung:
a) In der Graphik

```
>> plotfunc2d(sin(PI/2 - x), cos(x), x = -5..5)
```

ist nur eine Funktion sichtbar. Erklärung:

b) Mit dem Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$ folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \cdot \cos(x) - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} \cdot \sin(x) = \cos(x).$$

c)

```
>> expand(sin(PI/2 - x))
                             cos(x)
>> expand(cos(2*x + PI))
                             2         2
                       sin(x)  - cos(x)
>> expand(sin(10*x))

                 9             9                      3       7
   10 cos(x) sin(x)  + 10 cos(x)  sin(x) - 120 cos(x)  sin(x)  +

             5       5                7       3
   252 cos(x)  sin(x)  - 120 cos(x)  sin(x)
```

Aufgabe 20: (MuPAD, Vorübung zu Aufgabe 21)

a) Lies die Hilfeseite zu `solve`, bzw. studiere die Beispiele dieser Hilfeseite. Löse die Gleichungen

$$x + y + z = 3, \quad x - y + 2 \cdot z = 0, \quad z = 10 \cdot x - 5 \cdot y$$

nach x, y, z auf.

b) Lies die Hilfeseite zu `assign`. Beachte speziell Beispiel 5 dieser Hilfeseite. Weise das in a) berechnete Ergebnis den Bezeichnern `x, y, z` zu!

Musterlösung:

```
>> solve({x + y + z = 3, x - y + 2*z, z = 10*x - 5*y}, {x, y, z})

              {[x = 33/37, y = 63/37, z = 15/37]}
```

Die Lösungen sollen den Bezeichnern `x, y, z` zugewiesen werden:

```
>> assign(%[1])

               [x = 33/37, y = 63/37, z = 15/37]
```

In der Tat haben nun `x, y, z` als Werte die entsprechenden Lösungswerte:

```
>> x, y, z
                      33/37, 63/37, 15/37
```

Aufgabe 21*: (Woher stammen Modellfunktionen?) (6 Punkte)

Ein neues Produkt soll auf dem Markt eingeführt werden. Man plant, zwischen 10 und 20 DM für das Produkt zu fordern. Zur Festlegung des Preises hat die Marketingabteilung eine Meinungsumfrage gestartet. Die Frage *„Wieviel DM darf dieses Produkt maximal kosten, damit Sie es kaufen würden?“* wurde von insgesamt 100 Befragten folgendermaßen beantwortet:

max Preis (in DM)	10	13	16	20	
wurde angegeben von	10	15	10	5	Befragten

(Die restlichen 60 Befragten gaben an, an dem Produkt gar nicht interessiert zu sein). Aufgabe: aus diesen Daten soll eine Nachfragefunktion $x(p)$ „gebastelt“ werden (p = Preis, x = Nachfrage = Anzahl der abgesetzten Produkte auf je 100 Personen der Bevölkerung).

Setze die Nachfragefunktion als ein Polynom $x(p) = c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + c_3 \cdot p^3$ an. Die unbekannten Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$ sollen so gewählt werden, daß sie zu den obigen Daten passen. Z.B. ist bei einem Preis von $p = 13$ die Nachfrage $x(13) = 15 + 10 + 5 = 30$. Damit ergibt sich eine Gleichung

$$x(13) = c_0 + c_1 \cdot 13 + c_2 \cdot 13^2 + c_3 \cdot 13^3 = 30$$

für die unbekannten Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$. Aus den Daten lassen sich 4 solcher Gleichungen hinschreiben, aus denen man $c_0, \ldots, c_3$ bestimmen kann. Dies ist ein Fall für MuPADs `solve`–Kommando. Siehe auch Aufgabe 20.

a) Berechne die so zu konstruierende Modellfunktion $x(p)$ (also: bestimme die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$)!

b) Welche Nachfrage pro 100 potentiellen Kunden sagt dieses Modell für einen Preis von $p = 14$ (DM) voraus?

c) Schätze durch eine Graphik ab, für welchen Preis p der Erlös $p \cdot x(p)$ maximal wird. Wie groß ist der maximale Erlös ungefähr (im Rahmen der graphischen Genauigkeit)?

Musterlösung:
a) Ansatz der Absatzfunktion als Polynom:

```
>> x:= p -> c0 + c1*p + c2*p^2 + c3*p^3:
```

Aufstellen der Gleichungen für $c_0, \ldots, c_3$:

```
>> gleichung1:= x(10) = 10 + 15 + 10 + 5:
>> gleichung2:= x(13) =      15 + 10 + 5:
>> gleichung3:= x(16) =           10 + 5:
>> gleichung4:= x(20) =                5:
```

Lösen der Gleichungen:

```
>> solve({gleichung1, gleichung2, gleichung3, gleichung4}, {c0, c1, c2, c3})

  {[c0 = -5975/63, c1 = 4369/126, c2 = -347/126, c3 = 4/63]}
```

Mit `assign` werden die Gleichungen in Zuweisungen verwandelt:

```
>> assign(%[1])
>> x(p)
                              2      3
               4369 p   347 p    4 p
               ------ - ------ + ---- - 5975/63
                126      126      63
```

Kontrolle: für die in der Tabelle vorhandenen Preise müssen sich nach Konstruktion die in der Tabelle vorhandenen Absätze ergeben:

```
>> x(10), x(13), x(16), x(20)

                         40, 30, 15, 5
```

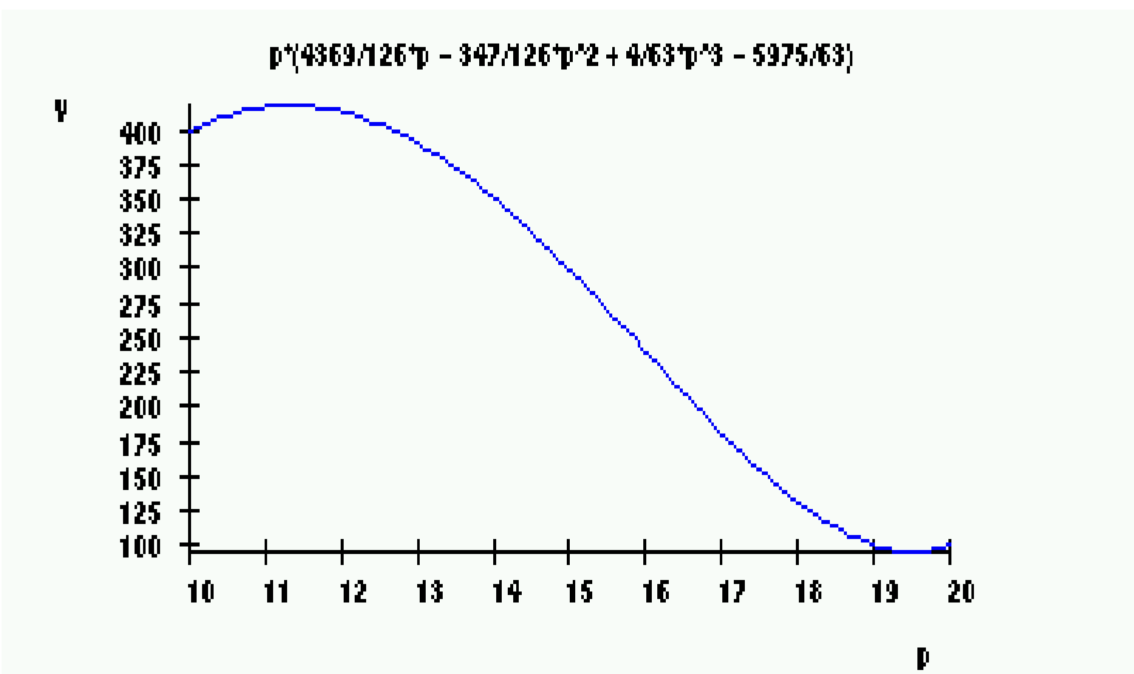
b) Für $p = 14$ sagt die Modellfunktion folgenden Absatz voraus:

```
>> x(14) = float(x(14))

                     526/21 = 25.04761905
```

c) Mit der Option `Ticks = 10` erreicht man, daß weitere Achsenmarken in einen Funktionsplot eingefügt werden:

```
>>  plotfunc2d(p*x(p), p = 10..20, Ticks = 10)
```



Der Graphik entnimmt man, daß der maximale Erlös von etwa 425 DM (pro 100 potentiellen Kunden) bei einem Preis zwischen 11 und 12 DM erzielt wird.

ABGABE: Dienstag, 29.5.01, zu Beginn der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 5, Abgabe: 29.5.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, H7.321 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	17	18*	19	20	21*	$\sum$
max Punkte	–	3	–	–	6	
erreicht:						