Ü b u n g s b l a t t 4

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 13*: (Reihen, Majorantenkriterium) (3 Punkte)

Studiere noch einmal Beispiel 1.39 der Vorlesung. Finde unter den (wenigen) uns aus der Vorlesung als konvergent bekannten Reihen eine Majorante $\sum_i b_i$ für die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \cdot (2 \cdot i + 1)}$$

und zeige damit, daß dieser Wert existiert. Was liefert MuPAD als Wert?

Musterlösung:
Für großes i gilt

$$i^2 \cdot (2 \cdot i + 1) = i^2 \cdot 2 \cdot i \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2 \cdot i}\right)}_{\approx 1} \approx 2 \cdot i^3.$$

Damit bietet es sich an, als potentielle Majorante $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot i^3}$ zu betrachten (aus der Vorlesung wissen wir, daß $\sum_i \frac{1}{i^3}$ konvergiert, damit auch $\sum_i \frac{1}{2 \cdot i^3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \frac{1}{i^3}$). Damit verbleibt nur zu zeigen, daß (für hinreichend großes i) gilt:

$$\frac{1}{|i^2 \cdot (2 \cdot i + 1)|} = \frac{1}{i^2 \cdot (2 \cdot i + 1)} \leq \frac{1}{2 \cdot i^3}.$$

Dies ist aber sicherlich erfüllt für alle $i \geq 1$, da

$$i^2 \cdot (2 \cdot i + 1) = 2 \cdot i^3 + i^2 > 2 \cdot i^3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{i^2 \cdot (2 \cdot i + 1)} < \frac{1}{2 \cdot i^3}.$$

MuPAD liefert als Wert:

```
>> sum(1/i^2/(2*i + 1), i=1..infinity);

                                   2
                                 PI
                      4 ln(2) + --- - 4
                                 6

>> float(%);
                         0.417522789
```

Aufgabe 14: (Stetigkeit)

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{für } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Ist die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig? Berechne den links- und rechtsseitigen Grenzwert für $x \to 1$. Ist die Funktion an der Stelle $x = 1$ links- oder rechtsseitig stetig?

Musterlösung:
Die Funktion $f_1(x) = 2 \cdot x$ (definiert auf ganz $\mathbb{R}$) ist sicherlich stetig, damit gilt für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to 1-0} f_1(x) = f_1(1) = 2.$$

Da f und f_1 für $x < 1$ übereinstimmen, folgt auch

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 2.$$

Die Funktion $f_2(x) = x^2 + 2$ (definiert auf ganz $\mathbb{R}$) ist sicherlich stetig, damit gilt für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to 1+0} f_2(x) = f_2(1) = 3.$$

Da f und f_2 für $x > 1$ übereinstimmen, folgt auch

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 3.$$

Mit $f(1) = 1^2 + 2 = 3$ ist f an der Stelle $x = 1$ damit rechtsseitig stetig, aber nicht linksseitig stetig (vergleiche Satz 1.58 der Vorlesung). Insgesamt ist f an der Stelle $x = 1$ unstetig.

Aufgabe 15*: (Stetigkeit) (2 + 1 + 2 Punkte)
Betrachte die Funktionen

$$a)\ f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}, \quad b)\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^4 + x^2 + 1}, \quad c)\ f(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x-2}.$$

Bestimme alle Stellen, an denen diese Funktionen (möglicherweise) unstetig sein können! Ist die Funktion in a) an der Stelle $x = -1$ unstetig? Befrage MuPAD (`limit`)! Ist die Funktion in c) irgendwo unstetig?
(Genauer: lassen sich die Definitionslücken an potentiellen Problemstellen durch Definition geeigneter Werte so „stopfen“, daß die Funktion dort stetig wird?)

Musterlösung:
Nach der Merkregel 1.50 der Vorlesung sind die möglichen Unstetigkeitsstellen diejenigen Werte von x, für die irgendwo „durch 0 geteilt wird“.

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. An der Stelle $x = 1$ behauptet MuPAD, daß dort kein Problem vorliegt: der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 1$ existiert:

```
>> limit((x^3 + 1)/(x^2 - 1), x = 1)

                              -3/2
```

In Aufgabe 16 wird gezeigt, daß sich die Definitionslücke bei $x = -1$ in der Tat stetig beheben läßt.

b) Keinerlei Probleme hier, da der Nenner nicht 0 werden kann: $x^4 + x^2 + 1 \geq 1$. (Beachte: die Werte x^2 und x^4 können niemals negativ werden).

c) Ein potentielles Problem ist $x = 2$. Bei genauerem Hinschauen stellt sich aber heraus:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2.$$

Setzt man $f(2) = 0$, so gilt $f(x) = x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit wird f ganz offensichtlich stetig.

Aufgabe 16: (MuPAD)
Lies die Hilfeseite der Funktion `discont` (engl.: „discontinuity“ = Unstetigkeit). Untersuche damit die Funktionen aus Aufgabe 15.a) und 15.c). Benutze **`plotfunc2d`**, um diese Funktionen zu zeichnen und graphisch auf Unstetigkeiten zu überprüfen! Lies die Hilfeseite zu `normal`. Lasse **`normal`** auf die Funktionen aus Aufgabe 15.a) und 15.c) los!

Musterlösung:
Die Funktion `discont` liefert alle **potentiellen** Unstetigkeitsstellen (was nicht heißt, daß diese Stellen wirklich Unstetigkeitsstellen sind).

a)

```
>> f:= (x^3 + 1)/(x^2 - 1):
>> discont(f, x)
                              {-1, 1}
```

Mit

```
>> plotfunc2d(f, x = -2..2)
```

wird klar, daß die Stelle $x = 1$ in der Tat eine Unstetigkeitsstelle (Pol) ist. Die einseitigen Grenzwerte sind

```
>> limit(f, x = 1, Left), limit(f, x=1, Right)

                       -infinity, infinity
```

An der Stelle $x = -1$ liegt graphisch keine Unstetigkeit vor, die Funktion `limit` bestätigt dies: die einseitigen Grenzwerte existieren und stimmen überein:

```
>> limit(f, x = -1, Left) = limit(f, x=-1, Right)

                           -3/2 = -3/2
```

Erklärung, warum bei $x = -1$ keine wirkliche Unstetigkeit vorliegt:

```
>> Zaehler = factor(x^3 + 1), Nenner = factor(x^2 - 1)

                    2
  Zaehler = (- x + x  + 1) (x + 1), Nenner = (x - 1) (x + 1)
```

Damit läßt sich f zu

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

umschreiben. Hiermit ist klar, daß wirklich nur $x = 1$ eine Problemstelle ist. Das Kürzen gemeinsamer Faktoren wird automatisch durch `normal` erledigt:

```
>> f = normal(f)
                          3         2
                         x  + 1   x  - x + 1
                         ------ = ----------
                          2          x - 1
                         x  - 1
```

c) Die Graphik

```
>> f:= (x^2 - 4*x + 4)/(x - 2):
>> plotfunc2d(f, x = 0..4)
```

zeigt an der potentielle Unstetigkeitsstelle $x = 2$

```
>> discont(f, x)
                              {2}
```

nichts Verdächtiges. Die Erklärung wurde in Aufgabe 15 schon geliefert:

```
>> f = normal(f)
                      2
                     x  - 4 x + 4
                     ------------ = x - 2
                        x - 2
```

Abgabe: Dienstag, 22.5.01, zu Beginn der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 4, Abgabe: 22.5.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, H7.321 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	13*	14	15*	16	$\sum$
max Punkte	3	–	5	–	
erreicht:					