Übungsblatt 3

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 9*: (Reihenwerte) (4 Punkte)
Studiere noch einmal Beispiel 1.38 der Vorlesung. Finde eine Zerlegung der Form $\frac{1}{i\cdot(i+2)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+2}$ (finde geeignete Koeffizienten a und b). Berechne analog zu Beispiel 1.38 eine explizite Formel für die Summe

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+2)},$$

und bestimme den Reihenwert $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+2)}$ unter Angabe von Zwischenschritten.

Musterlösung:
Die entscheidende Beobachtung ist:

$$a_i = \frac{1}{i\cdot(i+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{i} - \frac{\frac{1}{2}}{i+2}$$

(man bringe $\frac{\frac{1}{2}}{i} - \frac{\frac{1}{2}}{i+2}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} a_i &= \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\frac{1}{2}}{i} - \frac{\frac{1}{2}}{i+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+2}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} \Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} \Big) \\
&= \tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{2\cdot(n+1)} - \tfrac{1}{2\cdot(n+2)}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+2)} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{5}{12} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} - \frac{1}{2\cdot(n+2)}\Big) \\
&= \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Probe mit MuPAD:

```
>> sum(1/i/(i+2), i=2..n)
                        2
          3 n + 5 n  - 8
         -----------------
                        2
         36 n + 12 n  + 24
```

Durch eine sogenannte „Partialbruchzerlegung“ (engl: „partial fraction“) mittels der Funktion `partfrac` kann dieser Term in die Form gebracht werden, wie er oben schriftlich berechnet wurde:

```
>> partfrac(%, n)
                        1           1
            5/12 - --------- - ---------
                   2 (n + 2)   2 (n + 1)


>> sum(1/i/(i+2), i=2..infinity)

                         5/12
```

Aufgabe 10: (Die Exponentialreihe)
Berechne **ohne technische Hilfsmittel** den Wert exp(0.1) über die Reihendarstellung $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ auf 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt genau.

Musterlösung:

$$\begin{array}{rcll}
\exp(0.1) & = & & 1 + 0.1 + \dfrac{0.1^2}{2} + \dfrac{0.1^3}{6} + \dfrac{0.1^4}{24} + \cdots \\
& = & & 1 \\
& & + & 0.1 \\
& & + & 0.005 \\
& & + & 0.000166666... \\
& & + & 0.000004166... \\
& & + & \ldots \\
\hline
& = & & 1.1051708...
\end{array}$$

Offensichtlich trägt nach dem Summanden 0.00016666 kein weiterer Term mehr zur 4-ten Nachkommastelle bei. Kontrolle mit MuPAD:

```
>> exp(0.1)
                    1.105170918
```

Aufgabe 11*: (Die Exponentialreihe) (3 Punkte)
Studiere noch einmal Beispiel 1.37 der Vorlesung. Gegeben sei ein jährlicher Zinssatz p. Wie groß muß p ungefähr sein, damit der Unterschied zwischen dem jährlichen und dem kontinuierlichen Verzinsungsmodell einen Prozentpunkt ausmacht?
Anleitung: das jährliche Verzinsungsmodell liefert einen Wachstumsfaktor $1+p$ pro Jahr, das kontinuierliche einen Faktor e^p. Die Frage ist: für welches p entspricht e^p dem Wachstumsfaktor $1+p+0.01$ (d.h., p ist effektiv um einen Prozentpunkt ($= 0.01$) erhöht)? Benutze die ersten drei Terme der Exponentialreihe von e^p, um eine approximative Lösung der Gleichung $e^p = 1+p+0.01$ zu finden.

Musterlösung:
Bei jährlicher Verzinsung wächst ein Kapital nach einem Jahr um den Faktor $1+p$, bei kontinuierlicher Verzinsung um den Faktor e^p. Die Frage ist, wie groß p sein muß, damit e^p einem Faktor $1+p+0.01$ jährlicher Verzinsung entspricht, also

$$e^p = 1 + p + 0.01 \ .$$

Mit $e^p = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \cdots \approx 1 + p + \frac{p^2}{2}$ entspricht dies

$$\frac{p^2}{2} = 0.01 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 = 0.02 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \sqrt{0.02} = 0.1414...$$

Also: ab einem Prozentsatz von etwa 14% entspricht der Zinseszinszugewinn durch kontinuierliche Verzinsung etwa 1%.

Aufgabe 12: (MuPAD)
Lies die MuPAD–Hilfeseite zu `numeric::solve` (alternativ: `numeric::fsolve`). Speziell: studiere die Beispiele der Hilfeseite.
a) Finde numerische Approximationen der Lösungen der Gleichungen

$$x^4 = 4 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 2, \quad x = e^{-x}.$$

b) Bestimme den in Aufgabe 11 gefragten Prozentsatz auf 10 Dezimalstellen genau. Es gibt 2 Lösungen der Gleichung $e^p = 1 + p + 0.01$, die den Prozentsatz bestimmt! Finde über die Hilfeseite zu `numeric::solve` bzw. `numeric::fsolve` eine geeignete Aufrufform, mit der man diese Funktion so steuern kann, daß die sinnvolle Lösung gefunden wird!

Musterlösung:

```
>> numeric::solve(x^4 - 4*x^3 + 8*x - 2, x)

    {-1.334414218, 0.2580362157, 1.741963784, 3.334414218}

>> numeric::solve(x = exp(-x), x)

                              {0.5671432904}
```

In Aufgabe 11 war der gesuchte Prozentsatz p durch die Gleichung $e^p = 1 + p + 0.01$ bestimmt:

```
>> numeric::solve(exp(p) = 1 + p + 0.01, p)

                              {-0.144834751}
```

Ein negativer Prozentsatz macht keinen Sinn: `numeric::solve` findet die „falsche“ Lösung. In der Tat hat die Gleichung $e^p = 1 + p + 0.01$ zwei Lösungen, betrachte dazu:

```
>> plotfunc2d(exp(p) , 1 + p + 0.01, p = -0.2..0.2)
```

Zum Finden der positiven Lösung wird ein Suchintervall für p angegegeben (wir wissen aus Aufgabe 11 bereits, daß die für die gesuchte Lösung $p \approx 0.14$ gilt):

```
>> numeric::solve(exp(p) = 1 + p + 0.01, p = 0..1)

                              {0.1381651224}
```

Der gesuchte Prozentsatz beträgt also $p = 13.816...\%$.

$\boxed{\text{ABGABE: Dienstag, 15.5.01, zu Beginn der Vorlesung.}}$

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 3, Abgabe: 15.5.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ◻ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ◻ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ◻ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ◻ Do 16–18, H7.321 Ettler (Gruppe 1)
- ◻ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ◻ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ◻ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ◻ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ◻ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ◻ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	9*	10	11*	12	$\sum$
max Punkte	4	–	3	–	
erreicht:					