Ü b u n g s b l a t t 2

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 4*: (Summen, Reihen, Grenzwerte) (1+1+1 Punkte)
Bestimme die angegebenen Summen bzw. Reihen unter Angabe von Zwischenschritten:

$$\text{a)}\ \sum_{i=3}^{n-1} i, \quad \text{b)}\ \sum_{i=2}^{12}(7\cdot 5^i), \quad \text{c)}\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{3^i}{4^i}.$$

Musterlösung:

a) Bekannt ist $\sum_{i=1}^{n} i = n\cdot(n+1)/2$. Hiermit folgt

$$\sum_{i=3}^{n-1} i = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} i\Big) - 1 - 2 = \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2} - 3$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)}{2} - 3 = \frac{n^2-2\,n-6}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n-3)}{2}.$$

b) Bekannt ist $\sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$. Hiermit folgt

$$\sum_{i=2}^{12}(7\cdot 5^i) = 7\cdot\Big(\sum_{i=2}^{12}5^i\Big) = 7\cdot\Big(\Big(\sum_{i=0}^{12}5^i\Big) - 5^0 - 5^1\Big)$$

$$= 7\cdot\Big(\frac{5^{13}-1}{5-1} - 1 - 5\Big) = 7\cdot\Big(\frac{5^{13}-1}{4} - 6\Big) = 2\,136\,230\,425.$$

c) Bekannt ist $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$, falls $|p|<1$. Hiermit folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3^i}{4^i} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^i\Big) - \frac{3^0}{4^0} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Aufgabe 5: (MuPAD)
Lese die MuPAD–Hilfeseite zu `sum` (interaktiv durch `?sum` aufzurufen).

a) Bestimme explizite Formeln für $\sum_{i=1}^{n} i^2$ und $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=4}^{2\,n} i^2$ für $n\to\infty$.

Musterlösung:
a)

```
>> sum(i^2, i=1..n) = factor(sum(i^2, i=1..n))

                     2    3
             n   n    n
             - + -- + -- = 1/6 n (n + 1) (2 n + 1)
             6   2    3

>> sum(i^3, i=1..n) = factor(sum(i^3, i=1..n))

                 2    3    4
                n    n    n         2        2
                -- + -- + -- = 1/4 n  (n + 1)
                4    2    4
```

b)

```
>> limit(1/n^3*sum(i^2, i=4..2*n), n=infinity);

                                8/3
```

Aufgabe 6*: (arithmetische Summen) (3 Punkte)

Walter möchte eine Anschaffung vornehmen, für die er 1 200 DM benötigt. Ein Bankkredit würde ihn 7% Jahreszinsen kosten (er würde den Kredit nach Ablauf eines Jahres zurückzahlen). Alternativ besitzt er ein (leeres) Konto, auf dem ihn ein Überziehungskredit 11% Jahreszins kosten. Durch sparsamen Lebenswandel wäre er in der Lage, jeden Monat 100 DM auf das Konto einzuzahlen. Beim Überziehungskredit berechnet die Bank monatlich die fälligen Zinsen, fordert diese aber erst am Ende des Jahres ein. Welche Variante ist günstiger?

Musterlösung:
Seien $S_0 = 1\,200$ die Schulden. Der Bankkredit würde $0.07 \cdot S_0$ DM $= 84$ DM Zinsen kosten.
Beim Überziehungskredit mit dem jährlichen Zinssatz von $p = 0.11$ und den „Ratenzahlungen“ $R = 100$ würde ihm die Bank nach einem Jahre für

den ersten Monat $S_0 \cdot \frac{p}{12}$ Zinsen,

den zweiten Monat $(S_0 - R) \cdot \frac{p}{12}$ Zinsen,

den dritten Monat $(S_0 - 2 \cdot R) \cdot \frac{p}{12}$ Zinsen,

...

den zwölften Monat $(S_0 - 11 \cdot R) \cdot \frac{p}{12}$ Zinsen

fordern. (Zu Beginn des 13-ten Monats wäre die Schuld getilgt.) Die Zinsforderungen addieren sich auf zu (beachte $\sum_{i=1}^{n} i = n \cdot (n+1)/2$):

$$\sum_{i=1}^{12}(S_0 - (i-1)\cdot R) \;\cdot\; \frac{p}{12} = \Big(12 \cdot S_0 - R \cdot \sum_{i=1}^{12}(i-1)\Big) \;\cdot\; \frac{p}{12} = \Big(12 \cdot S_0 - R \cdot \sum_{i=1}^{11} i\Big) \;\cdot\; \frac{p}{12}$$

$$= \Big(12 \cdot S_0 - R \cdot \frac{11 \cdot 12}{2}\Big) \cdot\; \frac{p}{12} = S_0 \cdot p - R \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot p}{2 \cdot 12} = S_0 \cdot p - R \cdot \frac{11 \cdot p}{2}$$

$$= 1\,200 \cdot 0.11 - \frac{100 \cdot 11 \cdot 0.11}{2} = 71.5.$$

Die Überziehungskredit-Variante ist damit günstiger.

Aufgabe 7: (Kaptialaufbau durch Renteneinzahlung)

Bei der Geburt eines Kindes richtet eine Familie ein Konto ein, das jährlich 5.5% Zinsen bringt. Zu jedem Geburtstag wird ein fester Betrag R eingezahlt. Wo groß muss die jährliche Einzahlung R sein, damit das Kind an seinem 18-ten Geburtstag 100 000 DM zur Verfügung hat?
Anleitung: Nach der Einzahlung der n-ten Rate beträgt das Kapital mit Zinseszinsen $R \cdot q^n + R \cdot q^{n-1} + \cdots + R$ mit $q = 1 + p$.

Musterlösung:
Jede Einzahlung vergrößert sich pro Jahr um den Faktor $q = 1 + p$. Nach n Jahren mit dem Zinssatz p ist

- die bei Geburt eingezahlte Rate auf $R\,q^n$ gewachsen,
- die beim ersten Geburtstag eingezahlte Rate auf $R\,q^{n-1}$ gewachsen,
- die beim zweiten Geburtstag eingezahlte Rate auf $R\,q^{n-2}$ gewachsen,
- $\cdots$
- die beim $(n-1)$-ten Geburtstag eingezahlte Rate auf $R\,q$ gewachsen.
- Die beim n-ten Geburtstag eingezahlte Rate ist R.

Das ergibt (zusammen mit der beim n-ten Geburtstag eingezahlten Rate) ein Kapital von

$$R \cdot q^n + R \cdot q^{n-1} + \cdots + R\,q + R = R \cdot (q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1) = R \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = R \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Damit dies 100 000 DM ergibt, muß als jährliche Rate eingezahlt werden:

$$R \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 100\,000 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{100\,000 \cdot (q-1)}{q^{n+1} - 1} = \frac{100\,000 \cdot 0.055}{1.055^{19} - 1} = 3\,115.005\ldots\,.$$

Aufgabe 8*: (Kaptialabbau durch Rentenauszahlung) (1 + 1 + 1 Punkte)

Betrachte Beispiel 1.33 der Vorlesung. Ein Kapital K_0 wird mit dem jährlichen Zinssatz von 5% verzinst. Welchen Bruchteil des Startkapitals K_0 kann ich mir als Rente jährlich auszahlen lassen, wenn ich vorhabe, mein Kapital in a) 5 Jahren, b) 10 Jahren, c) 20 Jahren aufzubrauchen?

Musterlösung:
Die „Sparkassenformel" aus Beispiel 1.33 der Vorlesung für den Kapitalabbau durch Auszahlung einer festen Rente R bei einem Zinssatz p besagt, daß das Kapital K_n zu Beginn des n-ten Jahres

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \overset{(q=1+p)}{=} K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

beträgt. Nach n Jahren soll das Kapital verbraucht sein, also

$$K_n = 0 = K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \quad \Rightarrow \quad R = K_0 \cdot \frac{p \cdot (1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

Mit $p = 0.05$ ergibt sich für $n = 5$ bzw. $n = 10$ bzw. $n = 20$ Jahre:

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad R = K_0 \cdot \frac{0.05 \cdot 1.05^5}{1.05^5 - 1} = K_0 \cdot 0.2309...,$$

$$n = 10 \quad \Rightarrow \quad R = K_0 \cdot \frac{0.05 \cdot 1.05^{10}}{1.05^{10} - 1} = K_0 \cdot 0.1295...,$$

$$n = 20 \quad \Rightarrow \quad R = K_0 \cdot \frac{0.05 \cdot 1.05^{20}}{1.05^{20} - 1} = K_0 \cdot 0.0802....$$

Man kann also jeweils etwa 23% bzw. 13% bzw. 8% des Startkapitals jährlich als Rente entziehen.

ABGABE: Dienstag, 8.5.01, in der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 2, Abgabe: 8.5.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

□	Di 16–18,	D1.328	Koch	(Gruppe 2)
□	Do 9–11,	P7203	Kaminski	(Gruppe 7)
□	Do 14–16,	H4.113	Koch	(Gruppe 4)
□	Do 16–18,	H7.321	Ettler	(Gruppe 1)
□	Do 16–18,	D1.338	Hufnagel	(Gruppe 5)
□	Fr 11–13,	N4.325	Hufnagel	(Gruppe 3)
□	Fr 11–13,	P1611	Morschel	(Gruppe 6)
□	Fr 11–13,	D1.338	Kaminski	(Gruppe 8)
□	Fr 11–13,	D1.328	Ettler	(Gruppe 9)
□	keine Gruppenzugehörigkeit			