Übungsblatt 13

Dieses Aufgabenblatt dient als Übungsmaterial. Abgabe und Korrektur sind nicht vorgesehen.

Aufgabe 48: (Extremwerte mit Nebenbedingungen)
Finde alle Punkte (x, y, z), an denen die Funktion $f(x, y, z) = \dfrac{y+z}{1+x^2}$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ haben kann.

Musterlösung:
Die zu lösenden Gleichungen sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &\Rightarrow&\quad \frac{-2 \cdot x \cdot (y+z)}{(1+x^2)^2} = \lambda \cdot 2 \cdot x,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &\Rightarrow&\quad \frac{1}{1+x^2} = \lambda \cdot 2 \cdot y,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &\Rightarrow&\quad \frac{1}{1+x^2} = \lambda \cdot 2 \cdot z
\end{aligned}$$

sowie die Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = 2 \cdot \lambda \cdot y = 2 \cdot \lambda \cdot z$$

folgt $y = z$ (man beachte $\lambda \neq 0$, da sonst $\frac{1}{1+x^2} = 0$ gelten müßte, was nicht sein kann). Wir setzen $z = y$ in die 4 Gleichungen ein, wobei die zweite und dritte identisch werden (denn die haben wir benutzt, um $z = y$ herauszufinden):

$$\frac{-4 \cdot x \cdot y}{(1+x^2)^2} = \lambda \cdot 2 \cdot x, \quad \frac{1}{1+x^2} = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad \frac{1}{1+x^2} = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 1. \qquad (\#)$$

Setzen wir $x \neq 0$ **voraus**, können wir die erste Gleichung durch $2 \cdot x$ teilen. Damit verbleiben dann 3 Gleichungen für x, y, λ:

$$\frac{-2 \cdot y}{(1+x^2)^2} = \lambda, \quad \frac{1}{1+x^2} = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 1.$$

Wir eliminieren λ aus der ersten Gleichung. Einsetzen liefert zwei verbleibende Gleichungen für x, y:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{-4 \cdot y^2}{(1+x^2)^2}, \quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 1,$$

also

$$-4 \cdot y^2 = 1 + x^2, \quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 1.$$

Hier können wir nun abbrechen: die erste Gleichung kann keine (reelle) Lösung haben, denn $-4y^2 \leq 0$ und $1 + x^2 \geq 1$.

Damit verbleibt nur noch die Möglichkeit $x = 0$ (die obige Rechnung, die zu keinem Ziel führte, lief unter der Voraussetzung $x \neq 0$). Zusammen mit $y = z$ vereinfacht dies die Gleichungen (#) zu

$$0 = 0, \quad 1 = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad 1 = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad 2 \cdot y^2 = 1.$$

Die zweite und dritte Gleichung sind identisch und liefern einen (nicht interessierenden) Wert für λ, sobald y bekannt. Aus der vierten Gleichung folgt $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mit $x = 0$, $z = y$ existieren also zwei Kandidaten

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (x, y, z) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

für Extrema.

Aufgabe 49: (Differentialgleichungen, Separation)
Finde alle 'isoelastischen' Funktionen, d.h., bestimme die allgemeine Form der Funktionen $f(x)$, die die Eigenschaft haben, daß die Elastizität $\epsilon_{f,x}(x)$ konstant ist.

Musterlösung:
Die Elastizität einer Funktion war definiert als

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

Setzen wir dies gleich einer Konstanten ϵ, so ergibt sich eine Differentialgleichung für f:

$$\epsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\epsilon}{x}.$$

Mit $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ lassen sich die Variablen sofort trennen:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\epsilon}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{\epsilon}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\epsilon}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(|y|) = \epsilon \ln(|x|) + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \ln(|x|^\epsilon) + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{\ln(|x|^\epsilon)+\tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{\ln(|x|^\epsilon)}$$

$$\Rightarrow \quad y = c \cdot |x|^\epsilon$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Damit ist die allgemeinste Form einer isoelastischen Funktion $f(x) = c \cdot |x|^\epsilon$, wobei ϵ die konstante Elastizität ist.

Aufgabe 50: (Differentialgleichungen, Separation)

a) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y^2 = 0$.

b) Bestimme die spezielle Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y^2 = 0$ mit $y(1) = 1$.

Musterlösung:
a) Separation:

$$y' - x^2 \cdot y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + \frac{c}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{x^3 + c}.$$

Hierbei wurde die Integrationskonstante als $\frac{c}{3}$ eingeführt, damit das Ergebnis hübscher aussieht.

b) Anpassen der Konstanten c an die Anfangsbedingung:

$$y(1) = -\frac{3}{1^3 + c} \quad \Rightarrow \quad \frac{-y(1)}{3} = \frac{1}{1+c} \quad \Rightarrow \quad 1 + c = \frac{3}{-y(1)} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{-y(1)} - 1.$$

Für $y(1) = 1$ ergibt sich $c = -4$, also ist die spezielle Lösung zu dieser Anfangsbedingung

$$y(x) = -\frac{3}{x-4} = \frac{3}{4-x}.$$

Aufgabe 51: (Differentialgleichungen, Variation der Konstanten)

a) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$.

b) Bestimme die spezielle Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$ mit $y(1) = 1$.

Musterlösung:
a) Wir brauchen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = x^2 \cdot y$. Wir benutzen direkt die Lösungsformel aus Beispiel 6.16 der Vorlesung:

$$y_h(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von x^2 ist, also z.B. $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Die homogene Lösung ist damit

$$y_h(x) = c \cdot e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Nun 'Variation der Konstanten'. Ansatz für die inhomogene DGL:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}}.$$

In die DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$ eingesetzt ergibt sich

$$c'(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} + c(x) \cdot x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 \cdot c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = x^5$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}\, dx$$

Es verbleibt, die Stammfunktion von $x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$ zu finden. Substitution $z = -\frac{x^3}{3}$, $dz = -x^2\, dx$:

$$\int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}\, dx = \int x^5 \cdot e^z \, \frac{-dz}{x^2} = \int (-x^3) \cdot e^{-z}\, dz = 3 \cdot \int z \cdot e^z\, dz.$$

Partielle Integration:

$$3 \cdot \int \underbrace{z}_{f} \cdot \underbrace{e^z}_{g'}\, dz = 3 \cdot \underbrace{z}_{f} \cdot \underbrace{e^z}_{g} - 3 \cdot \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^z}_{g}\, dz = 3 \cdot z \cdot e^z - 3 \cdot e^z + \tilde{c}.$$

Rücksubstitution $z = -\frac{x^3}{3}$:

$$c(x) = \int x^5 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}\, dx = 3 \cdot z \cdot e^z - 3 \cdot e^z = -x^3 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} - 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{3}} + \tilde{c}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y' - x^2 \cdot y = x^5$ ist damit

$$y(x) = c(x) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = \Big(- x^3 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} - 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{3}} + \tilde{c} \Big) \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = -x^3 - 3 + \tilde{c} \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

mit einer beliebigen Konstanten $\tilde{c}$.

b) Anpassen der Anfangsbedingung:

$$y(1) = -1^3 - 3 + \tilde{c} \cdot e^{\frac{1^3}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} \cdot e^{\frac{1^3}{3}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} \cdot 5 \cdot e^{-\frac{1}{3}}.$$

Die spezielle Lösung zu dieser Anfangsbedingung ist damit

$$y(x) = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} = -x^3 - 3 + 5 \cdot e^{\frac{x^3 - 1}{3}}.$$
