Übungsblatt 11

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 43*: (zweite partielle Ableitungen) (2 + 2 Punkte)
Bestimme alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen

$$a) \quad f(x,y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad b) \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + x \cdot y \cdot z.$$

Musterlösung:
a) Die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2 \cdot y}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^4} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^3} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wegen der Symmtrie zweiter Ableitungen muß die folgende Rechnung dasselbe Resultat ergeben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^3} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

b) Die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x + y \cdot z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y + x \cdot z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot y.$$

Die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Aufgabe 44*: (Hesse-Matrix und definite Matrizen) (3 Punkte)
Charakterisiere die Punkte x, y, an denen die Hesse-Matrix der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y + \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$$

positiv bzw. negativ definit ist (Definition 5.22 der Vorlesung)!

Musterlösung:
Die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x - 2 \cdot y + x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y - 2 \cdot x - y^2.$$

Die Hesse-Matrix am Punkt $\vec{x} = (x, y)$ ist

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot x & -2 \\ -2 & 2 - 2 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\det(H(\vec{x})) = (2 + 2 \cdot x) \cdot (2 - 2 \cdot y) - (-2)^2 = 4 \cdot x - 4 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y. = 4 \cdot (x - y - x \cdot y).$$

Kontrolle mit MuPAD:

```
>> f:= x^2 + y^2 - 2*x*y + x^3/3 - y^3/3: linalg::hessian(f, [x, y])

                  +-                     -+
                  |  2 x + 2,      -2     |
                  |                       |
                  |      -2,    - 2 y + 2 |
                  +-                     -+

>> linalg::det(%)
                       4 x - 4 y - 4 x y
```

Wo ist H positiv definit? Es muss gelten

$$H_{11} = 2 + 2 \cdot x > 0, \quad \det(H(\vec{x})) = 4 \cdot (x - y - x \cdot y) > 0,$$

also

$$1 + x > 0, \quad x - y - x \cdot y > 0,$$

also

$$x > -1, \quad x > (1 + x) \cdot y$$

also (es wird durch $1 + x > 0$ geteilt):

$$\boxed{x > -1, \quad y < \frac{x}{1 + x}.}$$

Wo ist H negativ definit? Es muss gelten

$$(-H)_{11} = -2 - 2 \cdot x > 0, \quad \det(-H(\vec{x})) = 4 \cdot (x - y - x \cdot y) > 0,$$

also

$$1 + x < 0, \quad x - y - x \cdot y > 0,$$

also

$$x < -1, \quad x > (1 + x) \cdot y$$

also (es wird durch $1 + x < 0$ geteilt):

$$\boxed{x < -1, \quad y > \frac{x}{1 + x}.}$$

Aufgabe 45*: (Extremwerte) (2 + 2 Punkte)
Betrachte die Funktion $f(x,y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^3$.

a) Bestimme alle Punkte (x,y), die lokale Extrema von f sein können!

b) Finde mittels der Hesse–Matrix heraus, ob es sich jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt!

Musterlösung:
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x - 2 \cdot y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot x + 3 \cdot y^2.$$

An den Extremstellen müssen diese Werte verschwinden, d.h., es sind die Gleichungen

$$x - y = 0, \quad -2 \cdot x + 3 \cdot y^2 = 0$$

zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt $y = x$. In die zweite Gleichung eingesetzt liefert dies

$$-2 \cdot x + 3 \cdot x^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $x = 0$ bzw. $x = \frac{2}{3}$. Die beiden Kandidaten für Extremstellen sind also

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{und} \quad (x,y) = \Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

b) Die Hesse–Matrix ist

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\det(H(\vec{x})) = 12 \cdot y - 4.$$

Für den Punkt $(x,y) = (0,0)$ ist

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

weder positiv noch negativ definit, denn die Determinante ist negativ (-4). Der Ursprung ist also ein Sattelpunkt. Für den Punkt $(x,y) = \big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\big)$ ist

$$H\Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit (das Element links oben ist positiv, die Determinante ist positiv). Dieser Punkt ist also ein Minimum.

Das Minimum ist in einer groben Graphik kaum als solches erkennbar. Daher wird in der folgenden MuPAD-Graphik nur eine kleine Umgebung des Minimums $x = 0.666...$, $y = 0.666...$ dargestellt, wodurch das Minimum deutlicher wird:

```
>> plotfunc3d(x^2 - 2*y*x + y^3, x = 0.5 .. 0.8, y = 0.5 .. 0.8)
```

Aufgabe 46: (Extremwerte mit MuPAD-Unterstützung)

Betrachte die Funktion $f(x, y) = \dfrac{1 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$.

a) Bestimme alle Punkte (x, y), die lokale Extrema von f sein können!

b) Finde mittels der Hesse–Matrix heraus, ob es sich jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt!

Musterlösung:
a) Der Gradient berechnet sich als:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2 \cdot x \cdot (1 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2 \cdot (x^2 + 2) \cdot y}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

```
>> f:= (1 - y^2)/(1 + x^2 + y^2):
>> factor(diff(f, x)), factor(diff(f, y))

                                         2
      2 (y + 1) (y - 1) x   (-2) (x  + 2) y
      -------------------, ---------------
          2    2     2          2    2     2
        (x  + y  + 1)        (x  + y  + 1)
```

An den Extremstellen müssen diese Werte verschwinden, d.h., es sind die Gleichungen

$$x \cdot (1 - y^2) = 0, \quad (x^2 + 2) \cdot y = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt zwingend $y = 0$, aus der ersten Gleichung dann zwingend $x = 0$. Die Berechnung der zweiten Ableitungen ist etwas mühselig; sie werden daher per MuPAD berechnet:

```
>> fxx:= diff(f, x, x): fxy:= diff(f, x, y):
   fyx:= diff(f, y, x): fyy:= diff(f, y, y):
```

Dann wird $x = 0, y = 0$ gesetzt. Beim Aufruf `fxx` etc. werten sich die zweiten Ableitungen automatisch an dieser Stelle aus:

```
>> x:= 0: y:= 0: fxx, fxy, fyx, fyy

                       -2, 0, 0, -4
```

Die Hesse–Matrix am Nullpunkt

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit, denn

$$-H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich positiv definit. Damit ist der Ursprung ein lokales Maximum. Die Graphik

```
>> delete x, y:
>> plotfunc3d(f, x = -2..2, y=-2..2)
```

bestätigt dies.

$\boxed{\text{ABGABE: Dienstag, 10.7.01, zu Beginn der Vorlesung.}}$

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 11, Abgabe: 10.7.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 14–16, P1510 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	43*	44*	45*	46	$\sum$
max Punkte	4	3	4	–	
erreicht:					