Übungsblatt 10

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 38*: (partielle Ableitungen) (1 + 1 + 2 Punkte)
Berechne die Ableitungsmatrix der folgenden Funktionen:

$$a)\quad f(x,y) = x\cdot y + \sin(x) + \cos(y), \qquad b)\quad \vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - x\cdot z \\ x\cdot y + e^{y\cdot z} \end{pmatrix}.$$

c) An welchen Punkten x, y, z ist die Ableitung von $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^y \\ x - y \\ x\cdot y\cdot z \end{pmatrix}$ invertierbar?

Musterlösung:
a)

$$f'(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \Big(y + \cos(x), x - \sin(y)\Big).$$

b)

$$\vec{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot x - z & 0 & -x \\ y & x + z\cdot e^{y\cdot z} & y\cdot e^{y\cdot z} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\vec{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot x & e^y & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ y\cdot z & x\cdot z & x\cdot y \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\det \vec{f}'(x,y,z) = x\cdot y\cdot(-2\cdot x - e^y).$$

Die Matrix $\vec{f}'(x,y,z)$ ist überall dort invertierbar, wo die Determinante nicht verschwindet, d.h., überall, außer auf der y-z-Ebene (dort ist $x = 0$), der x-z-Ebene (dort ist $y = 0$) und auf der Punktmenge $\{(-\frac{1}{2}\cdot e^y, y, z);\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 39*: (Kettenregel) (3 Punkte)

Betrachte die durch $f(x,y,z) = x + y + z$ und $\vec{g} : (u,v) \in \mathbb{R} \quad \mapsto \begin{pmatrix} u \\ u\cdot v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ gegebenen Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$. Berechne die Ableitung von $h(u,v) = f(\vec{g}(u,v))$ einmal „direkt“ durch partielle Ableitungen von $h(u,v)$, dann unter Anwendung der Kettenregel 5.9. Vergleiche!

Musterlösung:
Mit $\vec{x} = (x,y,z)^T = \vec{g}(u,v) = (u, u\cdot v, u^2 + v^2)^T$:

$$h(u,v) = x(u,v) + y(u,v) + z(u,v) = u + u\cdot v + u^2 + v^2.$$

Die Ableitung (der Gradient) ist:

$$h'(u,v) = \Big(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\Big) = \Big(1 + v + 2\cdot u, u + 2\cdot v\Big).$$

Per Kettenregel $h'(u,v) = f'(\vec{g}(u,v)) \cdot g'(u,v)$:

$$h'(u,v) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 2 \cdot u & 2 \cdot v \end{pmatrix} = \Big(1 + v + 2 \cdot u, u + 2 \cdot v\Big).$$

Aufgabe 40: (MuPAD)
Studiere einige Beispiele auf der Hilfeseite der MuPAD–Routine `plotfunc3d`. Zeichne die Funktion $h(u,v)$ aus Aufgabe 39.

Musterlösung:

```
>> h := (u, v) -> u + u*v + u^2 + v^2:
>> plotfunc3d(h(u, v), u = -5..5, v = -5..5)
```

Aufgabe 41: (MuPAD)
Bestimme (mittels `numeric::solve` bzw. `numeric::fsolve`) numerische Approximationen der Lösungen von

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^y + x^3 \\ y^2 \cdot e^x - x^2 + y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gibt eine Lösung mit $y \in (0,1)$ sowie eine Lösung mit $y \in (-1,0)$. Finde beide Lösungen (durch Übergabe geeigneter Suchintervalle an die MuPAD-Funktionen).

Musterlösung:
Mehrere Gleichungen können als Listen `[Gleichung1, Gleichung2, ...]` oder als Mengen `{Gleichung1, Gleichung2, ...}` übergeben werden. Dasselbe gilt für die Unbestimmten, nach denen aufgelöst werden soll:

```
>> numeric::solve([x*exp(y) + x^3 = 1, y^2*exp(x) - x^2 + y^4 = 2],
                  [x, y])

            {[x = 0.3666304502, y = 0.9528634212]}
```

Durch Angabe eines Suchintervalls können spezielle Lösungen ermittelt werden. Hier wird die Suche auf $y \in [-1,0]$ eingeschränkt:

```
>> numeric::solve([x*exp(y) + x^3 = 1, y^2*exp(x) - x^2 + y^4 = 2],
                  [x, y = -1 .. 0])

            {[x = 0.8683998539, y = -0.9227491553]}
```

Aufgabe 42*: (Homogene Funktionen) (1 + 1 + 1 + 3 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen sind homogen, welchen Homogenitätsgrad haben sie (gegebenenfalls)?

$$a)\quad f(x,y)=x^2\cdot y^3-x\cdot y^4+y^5,\quad b)\quad f(x,y,z)=\frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2},\quad c)\quad f(x_1,x_2)=1+e^{\frac{x_1}{x_2}}.$$

d) Verifiziere für den Fall b) die Eulersche Homogenitätsrelation (siehe Beispiel 5.11 der Vorlesung).

Musterlösung:
a)

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y) &= (\lambda\cdot x)^2\cdot(\lambda\cdot y)^3-(\lambda\cdot x)\cdot(\lambda\cdot y)^4+(\lambda\cdot y)^5 \\ &= \lambda^5\cdot(x^2\cdot y^3-x\cdot y^4+y^5)=\lambda^5\cdot f(x,y). \end{aligned}$$

b)

$$f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y,\lambda\cdot z)=\frac{\Big((\lambda\cdot x)^2-(\lambda\cdot y)^2\Big)\cdot(\lambda\cdot z)}{(\lambda\cdot x)^2+(\lambda\cdot y)^2}=\frac{\lambda^3}{\lambda^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2}=\lambda\cdot f(x,y,z).$$

c)

$$f(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2)=1+e^{\frac{\lambda\cdot x_1}{\lambda\cdot x_2}}=1+e^{\frac{x_1}{x_2}}=f(x_1,x_2).$$

Damit sind alle Funktionen homogen, a) vom Grad 5, b) vom Grad 1, c) vom Grad 0.

d) Die Eulersche Homogenitätsrelation für b):

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
&= x\cdot\Big(\frac{2\cdot x\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot x\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{(x^2+y^2)^2}\Big)+y\cdot\Big(-\frac{2\cdot y\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot y\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{(x^2+y^2)^2}\Big)+z\cdot\Big(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big) \\
&= \frac{2\cdot x^2\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot x^2\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2\cdot y^2\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot y^2\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2} \\
&= \frac{2\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2} \\
&= \frac{2\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2}-\frac{2\cdot(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2}+\frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2} \\
&= \frac{(x^2-y^2)\cdot z}{x^2+y^2}=f(x,y,z).
\end{aligned}$$

Dies wurde durch die Eulersche Homogenitätsrelation $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=r\cdot f(x,y,z)$ mit dem Homogenitätsgrad $r=1$ vorausgesagt.

ABGABE: Dienstag, 3.7.01, zu Beginn der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 10, Abgabe: 3.7.01

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

- ☐ Di 14–16, P1510 Ettler (Gruppe 1)
- ☐ Di 16–18, D1.328 Koch (Gruppe 2)
- ☐ Do 9–11, P7203 Kaminski (Gruppe 7)
- ☐ Do 14–16, H4.113 Koch (Gruppe 4)
- ☐ Do 16–18, D1.338 Hufnagel (Gruppe 5)
- ☐ Fr 11–13, N4.325 Hufnagel (Gruppe 3)
- ☐ Fr 11–13, P1611 Morschel (Gruppe 6)
- ☐ Fr 11–13, D1.338 Kaminski (Gruppe 8)
- ☐ Fr 11–13, D1.328 Ettler (Gruppe 9)
- ☐ keine Gruppenzugehörigkeit

Aufgabe	38*	39*	40	41	42*	$\sum$
max Punkte	4	3	–	–	6	
erreicht:						