Übungsblatt 1

Wir bieten an, bearbeitete Aufgaben zu korrigieren, falls sie zum unten angegebenen Zeitpunkt abgeliefert werden. Mit $*$ und Punktangaben gekennzeichnete Aufgaben können dazu verwendet werden, Bonus–Punkte zu erwerben.

Aufgabe 1*: (Folgen und Grenzwerte) (1+1+1+1+1+2 Punkte)

Bestimme, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert unter Angabe der benutzten Zwischenschritte:

$$\text{a) } x_n = 2 - \frac{3}{n}, \quad \text{b) } x_n = \frac{2\,n^2}{n^2+1}, \quad \text{c) } x_n = \frac{n^3-1}{n^2+1},$$

$$\text{d) } x_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}, \quad \text{e) } x_n = \frac{n^3-1}{n^4+1}, \quad \text{f) } x_n = \Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{3\,n}.$$

Musterlösung:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(2-\frac{3}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} 2 \ - \ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 2 - 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2 - 3\cdot 0 = 2\ .$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2}{n^2\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\Big(1-\frac{1}{n^3}\Big)}{n^2\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} n \ \cdot \ \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \ \cdot \ \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n^3}\Big)}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)} = \lim_{n\to\infty} n \ \cdot \ \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \infty \ \cdot \frac{1-0}{1+0} = \infty.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\Big(1-\frac{1}{n^3}\Big)}{n^3\cdot\Big(1+\frac{1}{n^3}\Big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n^3}\Big)}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n^3}\Big)} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\cdot\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\;\cdot\;\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\;\cdot\;\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\;\cdot\;\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}} = 0\cdot\frac{1-0}{1+0} = 0.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3\,n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{3} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{3} = \left(e^2\right)^3.$$

Der numerische Wert ist

```
>> float(exp(2))^3

                    403.4287935
```

Aufgabe 2: (MuPAD)

Lese die MuPAD–Hilfeseite zu `limit` (interaktiv durch `?limit` aufzurufen).

a) Überprüfe mit MuPAD die in Aufgabe 1 ermittelten Grenzwerte.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $x_n = \left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{2\,n^2}$.

c) Lese mit `?!` die MuPAD–Hilfeseite zur (aus der Schule bekannten) Fakultätsfunktion $n! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$. Betrachte den Grenzwert der Folge $x_n = n^n/n!$ (den MuPAD nicht berechnen kann). Erzeuge Gleitpunktapproximationen (siehe `?float`) der ersten 10 Folgenglieder und stelle eine Vermutung über die Konvergenzeigenschaft dieser Folge auf!

Musterlösung:

a)

```
>> limit(2 - 3/n, n = infinity)

                        2

>> limit(2*n^2/(n^2 + 1), n = infinity)

                        2

>> limit((n^3 - 1)/(n^2 + 1), n = infinity)

                     infinity
```

```
>> limit((n^3 - 1)/(n^3 + 1), n = infinity)

                        1

>> limit((n^3 - 1)/(n^4 + 1), n = infinity)

                        0
```

b)

```
>> limit((1 + 2/n^3)^(2*n^2), n = infinity)

                        1
```

c) MuPAD kann den Grenzwert nicht bestimmen:

```
>> limit(n^n/n!, n = infinity)

                     /    n                  \
                     |   n                   |
                limit| -------, n = infinity |
                     \ fact(n)               /
```

Gleitpunktapproximationen:

```
>> x := n -> float(n^n/n!):  x(n) $ n = 1..10

     1.0, 2.0, 4.5, 10.66666667, 26.04166667, 64.8, 163.4013889,

             416.1015873, 1067.627009, 2755.731922
```

Vermutung: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. (Diese Vermutung ist in der Tat richtig.)

Aufgabe 3*: (Unterjährige und stetige Verzinsung) (4 Punkte)

Betrachte Beispiel 1.19 der Vorlesung. Ein Kapital von 10 000 DM wird mit einem jährlichen Zinssatz von 7% angelegt. Auf welchen Betrag wächst das Kapital nach 5 Jahren bei a) jährlicher, b) halbjährlicher, c) monatlicher, d) kontinuierlicher Verzinsung? Benutze jeweils MuPAD, um (evtl. mittels `float`) Gleitpunktapproximationen der Werte zu ermitteln.

Musterlösung:
Teilt man das Jahr in n Zeitabschnitte ein, so ergibt sich mit dem Zinssatz p ein Anstieg des Grundkapitals K_0 pro Jahr um den Faktor $(1+p/n)^n$. Nach 5 Jahren um den Faktor $((1+p/n)^n)^5 = (1+p/n)^{5\,n}$:
a)

```
>> K0 := 10000: p:= 0.07:
>> n := 1: K5 := K0 * (1 + p/n)^(5*n);

                           14025.51731
```

b)

```
>> n := 2: K5 := K0 * (1 + p/n)^(5*n);

                          14105.98761
```

c)

```
>> n := 12: K5 := K0 * (1 + p/n)^(5*n);

                          14176.2526
```

d) Da wir ein symbolisches `n` brauchen, wird der vorherige Wert von `n` mittels `delete` gelöscht:

```
>> delete n:  K5 := K0* limit((1 + p/n)^(5*n), n = infinity);

                          14190.67549
```

ABGABE: Freitag, 27.4.01, in der Vorlesung.

Bearbeitungen bitte heften! Beiliegendes Formblatt vorheften, Name, Vorname, Matrikelnummer, Gruppe leserlich(!) angeben.

Dieses Formblatt bitte bei der Abgabe von Übungen vorn anheften und ausfüllen!

Mathe B für WiWi, Blatt 1

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe (**unbedingt ankreuzen!**):

☐	Di 16–18,	D1.328	Koch	(Gruppe 2)
☐	Do 9–11,	P7203	Kaminski	(Gruppe 7)
☐	Do 14–16,	H4.113	Koch	(Gruppe 4)
☐	Do 16–18,	H7.321	Ettler	(Gruppe 1)
☐	Do 16–18,	D1.338	Hufnagel	(Gruppe 5)
☐	Fr 11–13,	P1611	Morschel	(Gruppe 6)
☐	Fr 11–13,	N4.325	Hufnagel	(Gruppe 3)
☐	Fr 11–13,	D1.338	Kaminski	(Gruppe 8)
☐	Fr 11–13,	D1.328	Ettler	(Gruppe 9)
☐	keine Gruppenzugehörigkeit			