W. Oevel

Mathematik B für Wirtschaftswissenschaftler

Veranstaltungsnr: 172060

Skript zur Vorlesung, Universität Paderborn, Sommersemester 2001

Inhalt

Literatur

Einige Referenzen für diese Vorlesung. Die folgenden Bücher scheinen akzeptabel, die Vorlesung wird sich (soweit sinnvoll) an den Sprachgebrauch dieser Bücher anlehnen. Es gibt sicherlich darüberhinaus viele weitere Bücher, die den behandelten Stoff analog abdecken.

[Tie99] JÜRGEN TIETZE: Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1999.

[Sch00] JOCHEN SCHWARZE: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Band 2: Differential- und Integralrechnung. Herne: Verlag deutsche Wirtschafts-Briefe GmbH 2000.

[Nol90] WALTER NOLLAU: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Stuttgart: Teubner 1993.

Bei Defiziten in der Schulmathematik schaue man z.B. auch in

[Sch96] JOCHEN SCHWARZE: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Band 1: Grundlagen. Herne: Verlag deutsche Wirtschafts-Briefe GmbH 1996.

Kapitel 1

Grundlagen der Analysis (Rückblick auf die Schule)

1.1 Bezeichnungen, Notation, Rechenregeln

$\boxed{\downarrow 17.4.01}$

Notation 1.1:

Folgende Standardbezeichnungen und Symbole sollten aus der Schule bekannt sein und werden auch hier verwendet werden:

- **Mengen:** $\{1, 2, 3, x, y, z\}$,
- **Elemente von Mengen:** $x \in A$ *bedeutet „x ist aus der Menge A"*,
- **Vereinigung:** $A \cup B = \{x;\ x \in A$ *oder* $x \in B\}$,
- **Durchschnitt:** $A \cap B = \{x;\ x \in A$ *und* $x \in B\}$,
- **Teilmengen:** $A \subset B$ *heißt: alle Elemente von A sind auch in B enthalten,*
- **Differenzmengen:** $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$,
- $\mathbb{N}$ = *die Menge der natürlichen Zahlen* $\{1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z}$ = *die Menge der ganzen Zahlen* $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{Q}$ = *die Menge der rationalen Zahlen* $= \{\frac{z}{n}; z \in \mathbb{Z}; n \in N\}$,
- $\mathbb{R}$ = *die Menge der reellen Zahlen,*
- **Intervalle:**

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, && \text{„offene" Intervalle,}\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, && \text{„geschlossene" Intervalle,}\\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, && \text{„halboffene" Intervalle,}\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, && \text{„halboffene" Intervalle,}
\end{aligned}
$$

- **„Unendlich“**: $\pm\infty$,
- **Wurzel:** $x = \sqrt{y}$ *ist die* **positive** *Lösung von* $x^2 = y$.

Elementare Rechenregeln 1.2:

Einige aus der Schule bekannte Rechenregeln fürs Potenzieren:

- $x^0 = 1$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$,
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$,
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}$

1.2 Folgen und Grenzwerte

Die Grundlage der Analysis ist der Begriff des Grenzwertes, der hier rekapituliert werden soll:

1.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 1.3: (Folgen)

Eine **Folge** $(x_n) = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$, *manchmal auch* $(x_n) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, *ist eine Zuordnung*

$$\text{Index } n \in \mathbb{N} \ (\text{bzw. } \mathbb{N}_0) \longrightarrow \ \text{Wert } x_n \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.4:

a) $x_n = (-1)^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

b) $x_n = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

c) $x_n = 1 - \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \ldots)$.

d) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist

$$(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \ldots) \approx (2.0, 2.25, 2.3703..., 2.4414..., 2.4883..., \ldots).$$

Beispiel 1.5: Einige simple Berechnungen mit MuPAD 2.0. Folgen können z.B. als Funktionen definiert werden:

```
>> x := n -> (1 + 1/n)^n
                              n -> (1 +  1/n)^n
```

Der „Folgengenerator" `$` dient zur Erzeugung von Folgen:

```
>> x(n) $ n = 1..5

              2, 9/4, 64/27, 625/256, 7776/3125
```

Gleitpunktnäherungen werden durch `float` erzeugt:

```
>> float(x(n)) $ n = 1..5

         2.0, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832
```

Zunächst die formale Definition von „Konvergenz" und „Grenzwert", die etwas abschreckend sein mag, aber (keine Angst!) im WiWi-Kontext später auch nicht wirklich benutzt werden wird:

Definition 1.6: (Grenzwerte von Folgen)

Eine Folge (x_n) heißt **„konvergent"**, *wenn eine reelle Zahl x^* existiert, sodaß sich (intuitiv) „alle Zahlen x_n für großes n dem Wert x^* beliebig genau annähern". Formal: zu jedem noch so kleinen $\epsilon > 0$ läßt sich eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ angeben, sodaß $|x_n - x^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$. Anschaulich: alle Werte x_n weichen für $n \geq N(\epsilon)$ maximal um den Wert ϵ vom Grenzwert ab.*

Der Wert x^* heißt dann **„Grenzwert"** **(„Limes")** *der Folge (x_n). Schreibweise:*

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n \ .$$

Eine nicht konvergierende Folge heißt **„divergent"**.

Satz 1.7: (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Grenzwerte sind eindeutig, d.h., zu (x_n) gibt es höchstens ein x^* mit der obigen Eigenschaft.

Einige einfache Beispiele mit formalem Beweis:

Beispiel 1.8: Die konstante Folge $(x_n) = (c, c, c, \ldots)$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = c$, denn für alle n gilt

$$|x_n - x^*| = |c - c| = 0 \leq \epsilon \ ,$$

wie auch immer $\epsilon > 0$ vorgegeben wird. Formal: zu $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = 1$.

Nun ja, im obigen Beispiel war sogar das formale $N(\epsilon)$–Kriterium sehr einfach zu handhaben. Im nächsten Beispiel wird es ein klein wenig komplizierter:

Beispiel 1.9: Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Formaler Beweis: zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq N(\epsilon)$:

$$|x_n - x^*| = |x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\epsilon)} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Und noch ein Beispiel, diesmal ohne formalen Beweis:

Beispiel 1.10: Sei $x_n = c^n$ mit einer Zahl $c \in (-1, 1)$ (also: $|c| < 1$). Diese Folge konvergiert gegen den Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Z.B.:

$$c = 0.5: \quad (c^n) = (0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ 0.0625,\ 0.03125\ldots).$$

Für $|c| \geq 1$ gilt diese Aussage nicht! Z.B.:

$$c = 1: \quad (c^n) = (1, 1, 1, 1, \ldots) \quad \text{(konvergiert gegen 1),}$$
$$c = 2: \quad (c^n) = (2, 4, 8, 16, \ldots) \quad \text{(divergiert, bzw. „konvergiert gegen } \infty\text{“).}$$

Beispiel 1.11: Einige Berechnungen mit MuPAD 2.0:

```
>> x := n -> c^n
                              n -> c^n
>> x(n) $ n = 1..10

                2    3    4    5    6    7    8    9    10
            c, c  , c  , c  , c  , c  , c  , c  , c  , c
```

Grenzwerte werden mit `limit` berechnet. Die Hilfeseite dazu wird mittels `?limit` angefordert:

```
>> ?limit
```

Ohne Weiteres kann der Grenzwert nicht bestimmt werden, da er ja von den Eigenschaften von c abhängt:

```
>> limit(x(n), n = infinity)
Warning: cannot determine sign of ln(c) [stdlib::limit::limitMRV]

                              n
                      limit(c  , n = infinity)
```

Nehmen wir an, es gilt $0 < c < 1$:

```
>> assume(0 < c < 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                    0
```

Nehmen wir an, $c > 1$:

```
>> assume(c > 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                 infinity
```

Ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge:

Beispiel 1.12: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist nicht konvergent (hat keinen Grenzwert). Formaler Beweis (etwas abschreckend?): zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich kein $N(\epsilon)$ finden. Angenommen, ein Grenzwert x^* existiert. Dann müßte $N(\epsilon)$ existieren mit

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |x_{n+1} - x^*| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon)$. Es würde folgen:

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n \underbrace{-x^* + x^*}_{=0} - x_{n+1}| \leq |x_n - x^*| + |x^* - x_{n+1}| \leq \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Für die betrachtete Folge gilt aber $|x_n - x_{n+1}| = 2$ für jedes n. Widerspruch! Damit muß die Annahme „es existiert x^*“ falsch gewesen sein.

Man sieht: die formale Definition mit ϵ und $N(\epsilon)$ ist eigentlich nur was für die Mathematiker (das sind i.A. Formalisten). Wie geht man stattdessen beim praktischen Rechnen vor? Es gibt Rechenregeln! Damit läßt sich ϵ und $N(\epsilon)$ praktisch immer verbannen:

Satz 1.13: (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (x_n), (y_n) konvergierende Folgen, sei c eine konstante Zahl. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, **falls** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ **gilt (!)**,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$ *vorausgesetzt).*

Beispiel 1.14: Wir wissen bereits, daß konstante Folgen $x_n = c$ gegen c konvergieren, und daß $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert („eine Nullfolge ist"). Durch Einsatz der Rechenregeln folgt unmittelbar: ↓20.4.01

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \cdot 0 = 0,$$

usw., d.h.:

Alle Folgen der Form $x_n = \frac{1}{n^k}$ mit positiven Potenzen k sind Nullfolgen.

Manchmal muß man etwas manipulieren und umschreiben:

Beispiel 1.15:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 + \frac{1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2\ .$$

Hierbei wurde die Zahl 2 als konstante Folge angesehen und benutzt, daß wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ schon kennen. Man sieht, mit etwas Geschick eingesetzt, machen die Rechenregeln die Berechnung von Grenzwerten oft sehr einfach. Manchmal muß man allerdings „tricksen":

Beispiel 1.16:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\Big)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ +\ 1\Big)}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}\ +\ 1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0.$$

Manchmal helfen alle Rechenregeln nichts, und man muß sich auf die Hilfe der Mathematiker verlassen, die z.B. folgende Konvergenzaussage beweisen können:

Satz und Definition 1.17:

Sei c eine reelle Zahl. Die Folge $x_n = (1 + \frac{c}{n})^n$ konvergiert gegen einen von c abhängenden Grenzwert $x^*(c)$, der auch als e^c oder auch als $\exp(c)$ bezeichnet wird. Die Funktion $\exp : c \mapsto e^c$ heißt **„Exponential-Funktion“**. *Der spezielle Grenzwert $e = e^1$ für $c = 1$ heißt* **„Eulersche Zahl“**:

$$e = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \approx 2.71828\ldots\ .$$

Beispiel 1.18: Einige Rechnungen mit MuPAD 2.0: die Exponentialfunktion heißt `exp`:

```
>> limit((1 + 1/n)^n, n = infinity);

                          exp(1)
```

Mit % wird auf den letzten Wert zugegriffen:

```
>> float(%);
                       2.718281829

>> exp(20) = exp(20.0)

                 exp(20) = 485165195.4
```

Die Exponentialfunktion kann mittels `plotfunc2d` gezeichnet werden. Falls `x` vorher einen Wert zugewiesen bekommen hatte, muß dieser zunächst mittels `delete` gelöscht werden:

```
>> delete x:
>> plotfunc2d(exp(x), x = -2..3)
```

Beispiel 1.19: („unterjährige und stetige Verzinsung“)
Ein Startkapital K_0 wird fest angelegt und jährlich mit dem zeitlich konstanten Zinssatz p verzinst (z.B., $p = 0.05$ entspricht einem Zinssatz von 5%). In jedem Jahr wächst das Kapital um den Faktor $1 + p$ an, wenn die Zinsen am Ende des Jahres ausbezahlt werden („ganzjährige Verzinsung“), d.h., nach einem Jahr ist K_0 auf $K_1 = K_0 \cdot (1 + p)$ angewachsen.
Nehmen wir an, die Zinsen werden monatlich ausgezahlt (mit dem monatlichen Zinssatz $p/12$) und „verzinseszinsen“ sich ebenfalls, so vergrößert sich das Kapital in jedem Monat um den Faktor $1 + \frac{p}{12}$, d.h., nach einem Jahr ist das Kapital auf

$$K_1 = K_0 \cdot \Big(1 + \frac{p}{12}\Big)^{12}$$

angewachsen („unterjährige Verzinsung", hier: „monatliche Verzinsung").
Bei wöchentlicher Verzinsung wächst das Kapital pro Woche jeweils um den Faktor $1 + \frac{p}{52}$, also in einem Jahr auf

$$K_1 = K_0 \cdot \Big(1 + \frac{p}{52}\Big)^{52} .$$

Bei täglicher Verzinsung wächst das Kapital pro Tag jeweils um den Faktor $1 + \frac{p}{365}$, also in einem Jahr auf

$$K_1 = K_0 \cdot \Big(1 + \frac{p}{365}\Big)^{365} .$$

Man kann dieses Spiel weiter treiben und von „stündlicher Verzinsung" oder „minütlicher Verzinsung" reden. Im Grenzfall („kontinuierliche Verzinsung") läuft dies auf das Folgende hinaus: zerlege das Jahr in n gleiche Zeitabschnitte. Am Ende jedes Zeitabschnitts vermehrt sich das Kapital um den Faktor $1 + \frac{p}{n}$, nach n Abschnitten (also am Ende des Jahres) ist das Kapital auf

$$K_1 = K_0 \cdot \Big(1 + \frac{p}{n}\Big)^{n}$$

angewachsen. „Stündliche"/„minütliche"/„sekündliche"/... Verzinsung heißt, daß man immer kleinere Zeitabschnitte betrachtet, d.h., den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachtet:

$$K_1 = \lim_{n\to\infty} K_0 \cdot \Big(1 + \frac{p}{n}\Big)^{n} = K_0 \, e^p \ .$$

Zahlenbeispiel: Startkapital$K_0 = 1\,000$ (DM oder Euro oder Islandkronen), Zinsatz $p = 0.05 \equiv 5\%$. Bei ganzjähriger Verzinsung hat man nach einem Jahr $K_1 = 1\,050$, bei kontinuierlicher Verzinsung $K_1 = 1\,000 \cdot \exp(0.05) \approx 1\,051.27$.

1.2.2 Unendliches

Die „unendlichen Werte" $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen, sondern dienen nur als nützliche Abkürzungen, um gewisse Situationen zu beschreiben. Wir lassen $\pm\infty$ als Grenzwerte zu:

Definition 1.20: ($\pm\infty$ als Grenzwert)

- *Eine Folge* (x_n) **„konvergiert gegen ∞"**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c > 0$ überschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, sodass $x_n \geq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ .$$

- *Eine Folge* (x_n) **„konvergiert gegen $-\infty$"**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c < 0$ unterschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, sodass $x_n \leq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ .$$

Beispiel 1.21: Die Folgen $x_n = n$, $x_n = n^2$, $x_n = \sqrt{n}$, $x_n = 2^n$ konvergieren gegen ∞. $\boxed{\downarrow 24.4.01}$
Die Folgen $x_n = -n$, $x_n = -2 \cdot n^2$, $x_n = -\sqrt{n}$, $x_n = -(2^n)$ konvergieren gegen $-\infty$.

Beispiel 1.22: Achtung: die Folgen $x_n = (-1)^n \cdot n$ (also $(-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$) oder auch $x_n = (-2)^n$ (also $(-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$) konvergieren **nicht** gegen ∞ oder $-\infty$, sie divergieren!

Man darf getrost mit ∞ und $-\infty$ rechnen, wobei folgende Rechenregeln gelten:

Rechenregeln für $\pm\infty$ 1.23:

Sei c eine reelle Zahl.

- $c \pm \infty = \pm\infty$,
- $c \cdot (\pm\infty) = \pm\text{sign}(c)\,\infty$ **für** $c \neq 0$. *Hierbei ist* $\text{sign}(c)$ *das Vorzeichen von* c.
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$,
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$,
- $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$,
- $c^\infty = \infty$ *für* $c > 1$, $c^\infty = 0$ *für* $0 < c < 1$,
- $c^{-\infty} = 0$ *für* $c > 1$, $c^{-\infty} = \infty$ *für* $0 < c < 1$.

Beispiel 1.24: Die Folge $x_n = n^3 + n$ konvergiert gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + n) = \lim_{n\to\infty} n^3 + \lim_{n\to\infty} n = \infty + \infty = \infty\ .$$

Aus dem obigen Ergebnis folgt sofort das nächste Ergebnis:

Beispiel 1.25: Die Folge $x_n = \frac{1}{n^3+n}$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 + n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 + n)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Beim Rechnen mit $\pm\infty$ muß man aber etwas Vorsicht walten lassen. Wenn man auf eine der folgenden Situationen stößt, darf man nicht weiterrechnen, sondern muß die betrachteten Grenzwerte anders ermitteln:

Undefinierte Ergebnisse beim Rechnen mit $\pm\infty$ 1.26:

- $0 \cdot (\pm\infty) =$ *„undefiniert"*,
- $\infty - \infty =$ *„undefiniert"*, $-\infty + \infty =$ *„undefiniert"*,
- $c^{\infty} =$ *„undefiniert" für $c \leq 0$ und $c = 1$*,
- $c^{-\infty} =$ *„undefiniert" für $c \leq 0$ und $c = 1$*,
- $\frac{1}{0} =$ *„undefiniert"*.

Beispiel 1.27: Betrachte die Folge $x_n = n^3 - n$:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - n) \overset{(??)}{=} \lim_{n\to\infty} n^3 - \lim_{n\to\infty} n \overset{(??)}{=} \infty - \infty \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert"}.$$

Dies heißt nicht, daß kein Grenzwert existiert, sondern nur, daß wir den Grenzwert über die Rechenregeln mit $\pm\infty$ nicht berechnen können. Man muß in einem solchen Fall genauer untersuchen. Z.B funktioniert folgendes Argument:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - n) = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} n^3 \;\cdot\; \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)$$

$$= \infty \;\cdot\; \Big(1 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}\Big) = \infty \;\cdot\; \Big(1 - \frac{1}{\infty}\Big) = \infty \;\cdot\; (1 - 0) = \infty\ .$$

Ein weiteres solches Beispiel:

Beispiel 1.28: Betrachte die Folge $x_n = \frac{2\,n^3+n}{n^4+1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^3 + n}{n^4 + 1} \overset{(??)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2\,n^3 + n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^4 + 1)} \overset{(??)}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert"}.$$

Dies sagt wiederum gar nichts darüber aus, ob ein Grenzwert existiert oder nicht. In diesem Fall führt wieder ein wenig Manipulation zum Erfolg:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^3 + n}{n^4 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \Big(2 + \frac{1}{n^2}\Big)}{n^4 \cdot \Big(1 + \frac{1}{n^4}\Big)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{n \cdot \Big(1 + \frac{1}{n^4}\Big)}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{\infty}}{\infty \cdot \Big(1 + \frac{1}{\infty}\Big)} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

1.3 Reihen

Reihen sind Folgen (s_n), in denen die Folgenglieder s_n Summen sind:

Definition 1.29: (Reihen)

Eine **Reihe** $\sum_i a_i$ *ist eine Folge* (s_n) *von sogenannten* **„Partialsummen“**

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Die Reihe $\sum_i a_i$ *heißt* **„konvergent gegen** s^***“**, *wenn die Partialsummen gegen einen Grenzwert* s^* *konvergieren. Schreibweise:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s^* = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

(Reihen können auch mit anderen Werten als $i = 1$ *starten.)*

Beispiel 1.30: Mit dem folgenden Beispiel soll Carl Friedrich Gauß (das ist der Mann auf dem 10-DM-Schein, einer der größten Mathematiker aller Zeiten) als kleiner Junge seinen Lehrer in Bedrängnis gebracht haben. Dieser hatte die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100(?) aufzuaddieren. In der Erwartung, die Klasse für eine Weile beschäftigt zu haben, wollte er den Raum verlassen um sich vergnüglicheren Dingen als dem Unterricht hinzugeben. Gauß hatte das Ergebnis, bevor der Lehrer den Raum verlassen konnte.
Der kleine Carl Friedrich fand folgende explizite Formel für die sogenannte **„arithmetische Reihe“**:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{i=1}^{n} i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\begin{array}{l} 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{array} \Big) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ Summanden}} \Big) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Halten wir fest:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i \ = \ \frac{n \cdot (n+1)}{2}.}$$

Ein weiteres Beispiel, die „geometrische Reihe“:

Beispiel 1.31: Sei p eine reelle Zahl. Eine **„geometrische Reihe"** ist von der Form

$$s_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \sum_{i=0}^{n} p^i \ .$$

Auch in diesem Fall kann man eine explizite Formel für s_n angeben:

$$\boxed{s_n = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \ .}$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned}
(1-p) \cdot s_n &= (1-p) \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\
&= \quad 1 \quad \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\
&\quad\; -p \quad \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\
&= \quad 1 + p + p^2 + \cdots + p^n \\
&\qquad\; - p - p^2 - \cdots - p^n - p^{n+1} \\
&= \quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad - p^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mit der expliziten Summenformel ist die Konvergenz geometrischer Reihen leicht zu überprüfen. Für $|p| < 1$ konvergiert p^{n+1} gegen $p^\infty = 0$:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p} \quad \text{für } |p| < 1 \ .}$$

Für $p > 1$ ist der Grenzwert ∞:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \lim_{n\to\infty} \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} = \frac{p^\infty - 1}{p - 1} = \frac{\infty - 1}{p - 1} = \frac{\infty}{p - 1} = \infty \ .$$

Beispiel 1.32: Einige Berechnungen mit MuPAD 2.0. Für die symbolische Berechnung von Summen ist die Funktion `sum` zuständig:

```
>> sum(i, i = 1..n)
                                        2
                                   n   n
                                   - + --
                                   2   2
```

Durch Faktorisierung mittels `factor` ergibt sich oft eine einfachere Form:

```
>> factor(%)
                                1/2 n (n + 1)
```

Die geometrische Reihe:

```
>> sum(p^i, i = 0..n)
                               n
                             p p  - 1
                             --------
                              p - 1
>> assume(0 < p < 1):
>> sum(p^i, i = 0..infinity)
                                 1
                              - -----
                                p - 1
```

Eine Öko-Anwendung der „geometrischen Reihe“:

Beispiel 1.33: Ein Anfangskapital K_0 wird zu Beginn des „0-ten Jahres“ eingezahlt und mit dem konstanten jährlichen Zinssatz p verzinst. Jedes Jahr vermehrt sich das Kapital um den Faktor $q = 1 + p$ (der „Aufzinsfaktor“). Am Ende jeden Jahres wird dem Kapital jeweils ein fester Betrag R (die „Rente“) entnommen. Wie groß ist das Kapital K_n zu Beginn des n-ten Jahres?

Zu Beginn des ersten Jahres:

$$K_1 = K_0 \cdot q - R.$$

Zu Beginn des zweiten Jahres:

$$K_2 = K_1 \cdot q - R = (K_0 \cdot q - R) \cdot q - R = K_0 \cdot q^2 - R \cdot q - R.$$

Zu Beginn des dritten Jahres:

$$K_3 = K_2 \cdot q - R = (K_0 \cdot q^2 - R \cdot q - R) \cdot q - R = K_0 \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R.$$

Man sieht, wie es weitergeht: zu Beginn des n-ten Jahres beträgt das Kapital

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot q^{n-1} - R \cdot q^{n-2} - \cdots - R \cdot q - R$$

$$= K_0 \cdot q^n - \sum_{i=0}^{n-1} R \cdot q^i = K_0 \cdot q^n - R \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \; .$$

Damit ergibt sich die folgende **„Sparkassenformel“** für den Kapitalabbau durch Auszahlung einer festen Rente bei einem Zinssatz p:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \overset{(q=1+p)}{=} K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} \; .}$$

Für Reihen gibt es spezielle Konvergenzkriterien:

Satz 1.34: (einige Konvergenzkriterien für Reihen) $\boxed{\downarrow 27.4.01}$

Betracht $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

- *Der Grenzwert für* $n \to \infty$ *kann nur existieren, wenn die Summanden* (a_i) *eine Nullfolge bilden. Aber Achtung: selbt wenn* $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ *gilt, so ist im Allgemeinen die Konvergenz der Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *nicht automatisch garantiert (dies ist ein Divergenzkriterium, kein Konvergenzkriterium!).*
- **(„Quotientenkriterium")** *Gilt für alle* i *ab einem (beliebigen) Wert* i_0
$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq c$$
für einen Wert $c \in (0,1)$, *so konvergiert* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
- **(„Majorantenkriterium")** *Sei* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *eine konvergente Reihe mit positiven Summanden. Gilt für alle* i *ab einem (beliebigen) Wert* i_0
$$|a_i| \leq b_i,$$
so konvergiert auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beispiel 1.35: Die Reihe $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$, da die Summanden $a_i = \frac{i}{i+1}$ nicht gegen 0 konvergieren (sie konvergieren gegen 1).

Beispiel 1.36: Die Reihe $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$: zwar konvergieren die Summanden $a_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$ gegen 0, aber „nicht schnell genug":

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 18.5896\ldots\,, \qquad \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{i}} = 61.8010\ldots\,, \qquad \sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{i}} = 198.5446\ldots\,.$$

Genauer gesagt: die Reihe „konvergiert gegen ∞": $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = \infty.$

Beispiel 1.37: Betrachte die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, wo x eine beliebige feste reelle Zahl ist (beachte: $0! = 1$). Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Mit $a_i = \frac{x^i}{i!}$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Summanden

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{|x|^i}{i!}} = \frac{|x|^{i+1} \cdot i!}{|x|^i \cdot (i+1)!}.$$

Mit $(i+1)! = (i+1) \cdot i \cdot (i-1) \cdot \ \ldots \cdot 1 = (i+1) \cdot i!$ folgt

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{|x| \cdot i!}{(i+1) \cdot i!} = \frac{|x|}{i+1} \ .$$

Für hinreichend große i (nämlich $i \geq 2 \cdot |x|$) gilt

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq \frac{|x|}{2 \cdot |x| + 1} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} =: c < 1,$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist.

Der Grenzwert heißt **„Exponentialfunktion"** e^x bzw. $\exp(x)$. In der Tat stimmt die Reihe mit der in Satz 1.17 benutzten Definition überein (was allerdings nicht ganz so trivial zu zeigen ist):

$$\boxed{e^x = \exp(x) = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \ .}$$

Die Reihendarstellung der exp-Funktion bietet einige Vorteile. Für kleine Argumente x gilt z.B. die Näherung

$$\exp(x) = 1 + \underbrace{x}_{\text{klein}} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\text{noch kleiner}} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{\substack{\text{noch viel}\\ \text{kleiner}}} + \cdots \quad \approx \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \ .$$

Betrachten wir die in Beispiel 1.19 eingeführte stetige Verzinsung. Bei einem jährlichen Zinsatz von $x = p$ ergibt die jährliche Verzinsung das Anwachsen eines Kapitals um den Aufzinsfaktor $1 + p$ pro Jahr. Die stetige Verzinsung ergibt den Faktor $\exp(p)$, der allerdings nur unwesentlich größer ist:

$$\exp(p) = \underbrace{1 \ + \ p}_{\substack{\text{jährliche}\\ \text{Verzinsung}}} + \underbrace{\frac{p^2}{2!} \ + \ \cdots}_{\substack{\text{Zusatz durch}\\ \text{stetige Verzinsung}}} = \underbrace{1 \ + \ 0.05}_{\substack{\text{jährliche}\\ \text{Verzinsung}}} + \underbrace{0.00125 \ + \ \cdots}_{\substack{\text{Zusatz durch}\\ \text{stetige Verzinsung}}}.$$

Vergleiche mit dem in Beispiel 1.19 berechneten Wert von $K_1 = 1\,000 \cdot \exp(0.05) \approx 1\,051.27$ für das Startkapital $K_0 = 1\,000$ bei stetiger Verzinsung gegenüber $K_1 = 1\,000 \cdot (1{+}0.05) = 1\,050$ bei jährlicher Verzinsung. Die zusätzlichen 1.27 bei stetiger Verzinsung entsprechen im Wesentlichen dem nächsten Term $\frac{p^2}{2}$ der Exponentialreihe.

Es gibt einige Situationen, wo man (endliche) Reihen explizit berechnen kann und damit dann den Grenzwert bestimmen kann:

Beispiel 1.38: Betrachte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)}$. Die entscheidende Beobachtung ist: ↓4.5.01

$$a_i = \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(man bringe $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\ &\quad\ - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Man nennt so eine Summe auch „Teleskopsumme“: sie läßt sich zu einigen wenigen Termen „zusammenschieben“, da sich fast alle Summanden aufheben. Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

Beispiel 1.39: Wir setzen das Majorantenkriterium aus Satz 1.34 ein, um zu zeigen, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. Dazu schätzen wir $a_i = \frac{1}{i^2}$ gegen $\tilde{b}_i = \frac{1}{i\cdot(i+1)}$ ab (wir wollen ausnutzen, daß wir nach dem letzten Beispiel bereits wissen, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_i$ konvergiert). Es gilt zwar nicht unmittelbar $|a_i| = a_i \le \tilde{b}_i$, aber mit

$$i^2 \ge \frac{i \cdot (i+1)}{2}$$

($\Leftrightarrow\ 2 \cdot i^2 \ge i^2 + i\ \Leftrightarrow i^2 \ge i$; dies ist für alle $i \ge 1$ erfüllt) folgt

$$a_i = \frac{1}{i^2} \le \frac{2}{i \cdot (i+1)} = 2 \cdot \tilde{b}_i =: b_i\ .$$

Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \tilde{b}_i = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i = 2$$

konvergiert, ist nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ garantiert. Welchen Wert diese Reihe hat, haben wir damit allerdings nicht herausbekommen.

Beispiel 1.40: Die im letzten Beispiel betrachtete Summe wird mit MuPAD 2.0 berechnet:

```
>> sum(1/i^2, i = 1..infinity)
                                   2
                                 PI
                                 ---
                                  6
```

Hierbei ist `PI` $= \pi = 3.1415....$ Zur Kontrolle vergleichen wir diesen Wert mit einer langen, aber endlichen Summe:

```
>> float(%)
```

1.644934067

```
>> sum(1.0/i^2, i = 1..1000)
```

1.643934567

(Das passt einigermaßen.) Einige weitere Summen, z.B. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{i \cdot (i+2) \cdot (i+5)}$:

```
>> sum((i + 1)/i/(i + 2)/(i + 5), i = 1..infinity)
```

323/900

Oder auch $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$:

```
>> sum(1/i^3, i = 1..infinity)
```

zeta(3)

Nun ja, dieser Reihenwert hat keine elementare Darstellung. Stattdessen stellt MuPAD ihn mittels der (unter Mathematikern) berühmten speziellen Funktion `zeta` (die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion) dar. Das nützt uns hier relativ wenig, da wir mit dieser Funktion nicht näher vertraut sind. Zumindestens kann man hiermit aber bequem Gleitpunktnäherungen berechnen:

```
>> float(%)
```

1.202056903

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch eine exakte Aussage (ohne Beweis):

Satz 1.41:

Die Reihe $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ *konvergiert genau dann gegen einen endlichen Wert, wenn* $k > 1$ *gilt.*

Beispiel 1.42: Für $k = 2$ und $k = 3$ haben wir die Reihenwerte $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ im Beispiel 1.40 bereits berechnet. In Beispiel 1.36 wurde $k = \frac{1}{2}$ betrachtet und festgestellt, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ nicht konvergiert. Der Wert $k = 1$ ist der Grenzfall: die sogenannte **„harmonische Reihe“** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ divergiert (genauer: konvergiert gegen ∞). Der Summenwert wächst für $n \to \infty$ gegen ∞, allerdings sehr langsam:

```
>> DIGITS := 3: // nur 3 Dezimalstellen werden berechnet
>> sum(1.0/i, i=1..10), sum(1.0/i, i=1..10^2),
   sum(1.0/i, i=1..10^3), sum(1.0/i, i=1..10^4)
```

2.93, 5.19, 7.49, 9.79

1.4 Funktionen

1.4.1 Definitionen

Definition 1.43:

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ist eine Zuordnung $f : x \mapsto f(x)$ einer Zahl $x \in D \subset \mathbb{R}$ zu einem **„Bildwert“** *$f(x) \in \mathbb{R}$. Der Punkt x heißt auch* **„Urbild“** *von $f(x)$. Die Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt* **„Definitionsbereich“**, *die Menge*

$$f(D) := \Big\{ f(x);\ x \in D \Big\}$$

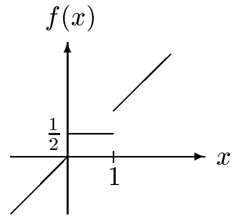
heißt **„Bildbereich“** *oder auch* **„Wertebereich“** *der Funktion. Die Funktion f heißt*

- **monoton steigend**, *wenn $f(x) \leq f(y)$ gilt*
- **streng monoton steigend**, *wenn $f(x) < f(y)$gilt*
- **monoton fallend**, *wenn $f(x) \geq f(y)$ gilt*
- **streng monoton fallend**, *wenn $f(x) > f(y)$ gilt*

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,

Beispiel 1.44: a) Die (stückweise definierte) Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x < 1, \\ x & \text{für } 1 \leq x, \end{cases}$$

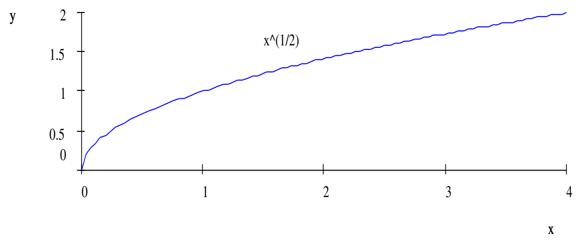


ist monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, der Bildbereich ist $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, \infty)$.
Die MuPAD-Graphik dazu (`piecewise` erzeugt stückweise definierte Funktionen):

```
>> f:= piecewise([x <= 0, x],
                 [0 < x and x < 1, 1/2],
                 [1 <= x, x])
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```

b) Die Funktion $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend. Die MuPAD-Graphik dazu (`sqrt` ist die Wurzelfunktion):

```
>> plotfunc2d(sqrt(x), x = 0..4)
```



1.4.2 Stetigkeit

Definition 1.45: (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **stetig am Punkt** $x \in D$, *wenn für* **jede** *gegen x^* konvergierende Folge (x_n) gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*). \qquad (\#)$$

Die Funktion f heißt **rechtsseitig stetig am Punkt** $x^* \in D$, *wenn (#) gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \geq x^*$.*

Die Funktion f heißt **linksseitig stetig am Punkt** $x^* \in D$, *wenn (#) gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \leq x^*$.*

Die Funktion f heißt **stetig auf dem Bereich** D, *wenn sie an allen Punkten $x^* \in D$ stetig ist.*

Ähnlich wie die ϵ–$N(\epsilon)$–Definition eines Grenzwertes für Folgen ist diese Definition von Stetigkeit eigentlich nur für Mathematiker interessant, da sie nur in sehr einfachen Fällen praktisch handhabbar ist (man verläßt sich in der Praxis wiederum auf Rechenregeln, mit denen Stetigkeit vererbt werden, siehe Satz 1.48). Einige einfache Beispiele mit der formalen Definition:

Beispiel 1.46: a) Betrachte die konstante Funktion $f : x \in \mathbb{R} \mapsto c$ (mit einer konstanten Zahl $c \in \mathbb{R}$). Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

b) Betrachte die Funktion $f(x) = x$. Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

c) Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt

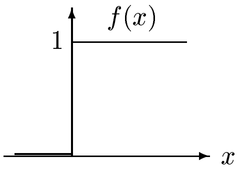
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 1) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)^2 + 1 = (x^*)^2 + 1 = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

Man sieht an diesen Beispielen bereits, daß die Rechenregeln für Grenzwerte sofort zu analogen Rechenregeln für die Vererbung von Stetigkeit führen. Vorher aber noch ein Beispiel zur Unstetigkeit und „einseitigen Stetigkeit“:

Beispiel 1.47: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \le x. \end{cases}$$



Diese Funktion ist überall stetig, außer am Punkt $x = 0$. Dort ist sie aber immer noch rechtsseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von rechts, so sind die Funktionswerte konstant 1. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 1 und stimmt mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Die Funktion ist aber nicht linksseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von links, so sind die Funktionswerte konstant 0. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 0 und stimmt **nicht** mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Eine stetige Funktion muß aber offensichtlich sowohl links- als auch rechtsseitig stetig sein, damit ist f am Punkt $x = 0$ unstetig.

Nun die Rechenregeln:

Satz 1.48: (Rechenregeln zur Stetigkeit)

Seien f und g Funktionen. Sei x^* ein Punkt aus dem Schnitt der Definitionsbereiche von f und g (d.h., sowohl $f(x^*)$ als auch $g(x^*)$ ist definiert). Seien f und g am Punkt x^* stetig. Sei c eine Konstante. Dann gilt:

- *Die Funktion $h(x) = c \cdot f(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ist am Punkt x^* stetig, **falls** $g(x^*) \neq 0$.*
- *Die Funktion $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ist am Punkt x^* stetig (hier setzen wir $f(x) \ge 0$ voraus).*

Beispiel 1.49: Die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ist überall stetig: Da konstante Funktionen sowie $g(x) = x$ stetig sind, ist auch $h(x) = x + 1$ stetig. Analog ist $i(x) = x^2$ und damit auch $j(x) = x^2 + 1$ stetig. Außerdem gilt $j(x) > 0$ für alle x, womit der Quotient $f(x) = \frac{h(x)}{j(x)}$ ebenfalls überall stetig ist.

An diesem Beispiel merkt man, daß folgende „Pi mal Daumen-Regel“ gültig ist:

Merkregel 1.50:

> *Aus stetigen Funktionen „zusammengesetzte“ Funktionen sind wieder stetig. Lediglich an den Stellen, wo man durch 0 teilt, kann die Funktion unstetig sein.*

Die formale Definition 1.45 der Stetigkeit sollte man sich so merken:

Merkregel 1.51: $\boxed{\downarrow 8.5.01}$

> *Für beliebige konvergente Folgen x_n gilt*
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big),$$
>
> *wenn die Funktion f an der Stelle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ stetig ist.*

Für die Untersuchung spezieller Funktionen helfen die Rechenregeln nicht. Da muß man die Mathematiker konsultieren, die z.B. Folgendes beweisen:

Satz 1.52: (Stetigkeit der Exponentialfunktion)

Die in Definition 1.17/Beispiel 1.37 eingeführte Exponentialfunktion $\exp(x)$ *mit dem Definitionsbereich* $\mathbb{R}$ *und dem Bildbereich* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ *ist an allen Punkten* $x \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Die Merkregel 1.50 besagt, daß es potentielle Unstetigkeiten gibt, wenn man durch 0 teilt. **Aber:** es kann auch passieren, daß an diesen Stellen Stetigkeit vorliegt (wenn nämlich eine $\frac{0}{0}$–Situation vorliegt):

Beispiel 1.53: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\[2ex] 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist überall (auch an der Stelle $x = 1$) stetig. Dies ist leicht gezeigt: Wegen $x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$ ist f nichts anderes als eine komplizierte Schreibweise für $f(x) = x + 1$.

Etwas komplizierter ist

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Auch diese Funktion ist überall (auch an der Stelle $x = 0$) stetig.

Eine $\frac{0}{0}$–Situation läßt sich mit Hilfe der „l'Hospitalschen Regel“ systematisch untersuchen, siehe Beispiel 2.30.

Definition 1.54: (Grenzwerte bei Funktionen)

Betrachte eine Funktion f auf dem Defintionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{x^*\}$. Der Wert f^* heißt **„Grenzwert (Limes) von f für $x \to x^*$“**, *wenn für* **jede** *gegen x^* konvergierende Folge (x_n) gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$$

(d.h., die Folge $y_n = f(x_n)$ konvergiert gegen f^*). Die Schreibweise ist dann:

$$f^* = \lim_{x\to x^*} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„rechtsseitiger Grenzwert von f für $x \to x^*$“**, *wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n > x^*$. Schreibweise:*

$$f^* = \lim_{x\to x^*+0} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„linksseitiger Grenzwert von f für $x \to x^*$“**, *wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n < x^*$. Schreibweise:*

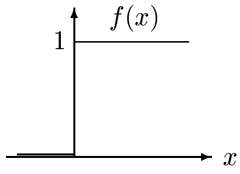
$$f^* = \lim_{x\to x^*-0} f(x).$$

Beispiel 1.55: Für eine am Punkt x^* definierte und dort stetige Funktion gilt immer

$$\lim_{x\to x^*-0} f(x) = \lim_{x\to x^*+0} f(x) = \lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*).$$

Beispiel 1.56: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \le x. \end{cases}$$



Hier gilt für die Sprungstelle $x^* = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel 1.57: Für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Formale Begründung: Sei (x_n) eine beliebige gegen ∞ konvergierende Folge:

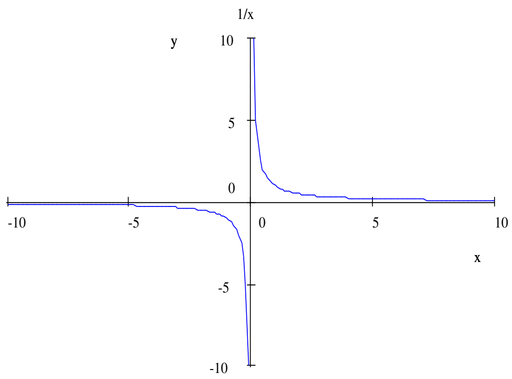
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Am Punkt $x = 0$ ist f unstetig („singulär“): die Funktion hat eine sogenannte Polstelle. Wir lassen die Werte $\pm\infty$ wieder als Grenzwerte zu. Dann existieren einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Das Argument `ViewingBox = [-2..2, -2..2]` im folgenden Befehl weist MuPAD an, alles ausserhalb der angegebenen Bereiche zu ignorieren, wodurch sich eine gut skalierte Graphik ergibt:

```
>> plotfunc2d(1/x, x = -10..10,
              ViewingBox = [-10..10, -10..10])
```



Mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen können wir die Stetigkeit an einem Punkt auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 1.58: (Stetigkeit)

Eine Funktion f ist am Punkt x^* genau dann linksseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann rechtsseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* + 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann stetig, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und beide Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*).$$

$\boxed{11.5.01\downarrow}$

1.4.3 Umkehrfunktionen

Definition 1.59: (Invertierbarkeit von Funktionen)

Eine Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ heißt **invertierbar**, *wenn zu jedem Wert $y \in W$* **genau ein** *Urbild $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert.*

Beispiel 1.60: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = \sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = -\sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht invertierbar, wenn man sie auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ betrachtet: Jetzt gibt es zu jedem $y = f(x) = x^2$ aus dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ **zwei Urbilder** $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$.

Definition 1.61: (Inverse einer Funktion)

Die Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ sei invertierbar. Die **„Umkehrabbildung“ („Inverse“)** *von f ist die Funktion $f^{-1} : W \mapsto D$, die dem Punkt $y = f(x) \in W$ den (eindeutig bestimmten) Wert x zuordnet.*

Beispiel 1.62: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $W = f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ hat keine Inverse.

Die Funktion $f(x) = 2-3 \cdot x$ auf dem Wertebereich $D = \mathbb{R}$ hat die Inverse $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$. Um die Inverse zu bestimmen, muß man $y = f(x)$ nach x auflösen:

$$y = 2 - 3 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot x = 2 - y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2-y}{3}.$$

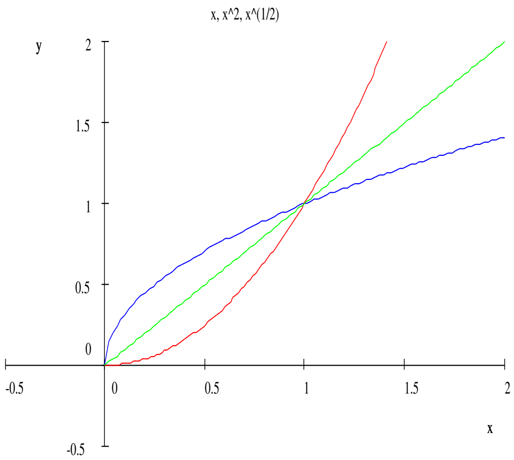
Graphische Darstellung der Inversen 1.63:

Hat man eine invertierbare Funktion f graphisch dargestellt, so hat man auch sofort den Graphen von f^{-1}. Der Graph von f ist eine Punktmenge (x, y) mit $y = f(x)$ in der x-y-Ebene. Der Graph von f^{-1} ist die Punktmenge (y, x) mit $y = f(x)$. Diese ergibt sich einfach durch Spiegelung an der „ersten Winkelhalbierenden“ (dies ist die durch $y = x$ gegebene Gerade).

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen der Funktion f an der ersten Winkelhalbierenden.

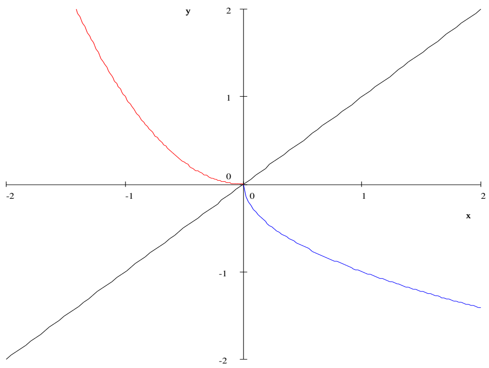
Beispiel 1.64: Zur Demonstration hierzu einige MuPAD Graphiken. Betrachte $f(x) = x^2$ auf $D = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Statt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ wird $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ eingegeben (Goethe sagt dazu treffend: „Name ist Schall und Rauch“). Die Winkelhalbierende $y = x$ wird zusätzlich eingezeichnet:

```
>> plotfunc2d(x, x^2, sqrt(x), x = 0..2,
              ViewingBox = [-0.5..2, -0.5..2])
```



Dasselbe noch einmal, diesmal wird $f(x) = x^2$ aber auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ betrachtet. Da die Inverse $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ auf einem anderen Definitionsbereich lebt ($y \geq 0$, $x \leq 0$), `plotfunc2d` aber alle Funktionen über einem gemeinsamen Bereich zeichnet, wird nun das folgende flexiblere plot-Konstrukt benutzt:

```
>> plot(// die Winkelhalbierende:
        plot::Function2d(x, x = -2..2, Color = RGB::Black),
        // f(x):
        plot::Function2d(x^2, x = -2..0, Color = RGB::Red),
        // die Inverse von f:
        plot::Function2d(-sqrt(y), y = 0..2, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-2..2, -2..2])
```



Nun betrachten wir $y = f(x) = 2 - 3 \cdot x$. Zunächst lösen wir mittels `solve` (engl: solve

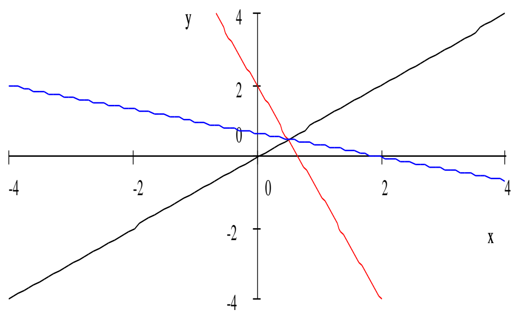
= „löse") nach x auf:

```
>> solve(y = 2 - 3*x, x)

                          {       y }
                          { 2/3 - - }
                          {       3 }
```

Sei $f = f(x) = 2 - 3 \cdot x$ der Ausdruck, der die Funktion f repräsentiert, sei $g = g(y) = \frac{2}{3} - \frac{y}{3}$ der Ausdruck, der die Inverse von f repräsentiert. Die Winkelhalbierende sowie f und g werden gezeichnet:

```
>> f:= 2 - 3*x: g:= 2/3 - y/3:
>> plot(plot::Function2d(x, x = -4..4, Color = RGB::Black),
        plot::Function2d(f, x = -4..4, Color = RGB::Red),
        plot::Function2d(g, y = -4..4, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Bei streng monotonen Funktionen ist die Invertierbarkeit leicht zu garantieren:

Satz 1.65: (Invertierbarkeit bei Monotonie)

Streng monotone Funktionen f : Definitionsbereich $\mapsto$ Wertebereich *sind immer invertierbar. Ist* f *streng monoton steigend, dann auch* f^{-1}*. Ist* f *streng monoton fallend, dann auch* f^{-1}.

1.4.4 Einige mathematische Funktionen

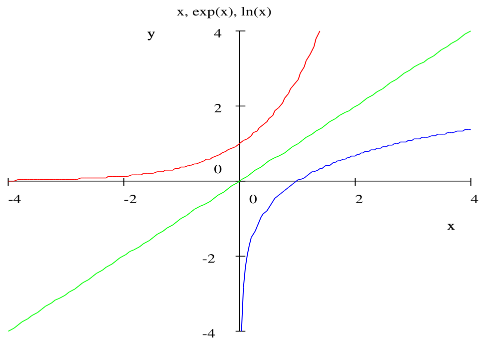
Satz und Definition 1.66:

(Der natürliche Logarithmus) Die in Definition 1.17/Beispiel 1.37 eingeführte Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ *ist stetig und streng monoton steigend. Damit gibt es eine Umkehrfunktion, die man den* **„natürlichen Logarithmus“** $\ln : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *nennt:*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \,, \quad \exp(\ln(y)) = y \text{ für alle } y \in (0, \infty).$$

Beispiel 1.67: Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergibt sich sofort der Graph von ln aus dem Graphen von exp:

```
>> plotfunc2d(x, exp(x), ln(x), x = -4..4,
              ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Merke 1.68:

- $\exp$ *und* $\ln$ *sind stetig und monoton wachsend.*
- *Es gilt* $\exp(x) > 1$ *für alle* $x > 0$, *es gilt* $\ln(y) > 0$ *für alle* $y > 1$.
- *Es gilt* $\exp(0) = 1$ *und* $\ln(1) = 0$.
- *Es gilt* $\exp(x) < 1$ *für alle* $x < 0$, *es gilt* $\ln(y) < 0$ *für alle* y *mit* $0 < y < 1$.

Satz 1.69: (Rechenregeln für exp und ln)

Für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad (e^x)^y = e^{x \cdot y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

Für beliebiges $x > 0, y > 0$ gilt:

$$\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y \cdot \ln(x), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

Beispiel 1.70: Die Regel $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ ist besonders interessant. Sie ist nützlich, um Gleichungen aufzulösen, wo die gesuchte Größe in einem Exponenten auftaucht. Z.B.:

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(8) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \ln(2) = \ln(8)$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = \frac{3 \cdot \ln(2)}{\ln(2)} = 3.$$

Ein Öko-Beispiel: Ein Kapital K_0 wird mit einem jährlichen Zinssatz von $p = 0.04$ verzinst und vergrößert sich am Ende jeden Jahres um den Aufzinsfaktor $q = 1 + p = 1.04$. Wann hat sich das Kapital verdoppelt? Nach n Jahren ist das Kapital auf $K_n = K_0 \cdot q^n$ angewachsen, d.h., es ist die Gleichung $K_n = K_0 \cdot q^n = 2 \cdot K_0$ nach n aufzulösen:

$$q^n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \ln(q^n) = \ln(2) \quad \Longrightarrow \quad n \cdot \ln(q) = \ln(2) \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\ln(2)}{\ln(q)}.$$

Der numerische Wert ist

```
>> DIGITS:= 3: ln(2.0)/ln(1.04)

                                17.7
```

Also: mit der Zinsauszahlung zu Ende des 17-ten Jahres ist Verdoppelung eingetreten. Genauer, das Kapital ist mit dem Beginn des 18-ten Jahres um den Faktor

```
>> 1.04^18

                                2.02
```

gewachsen.

Bemerkung 1.71: *Es gilt*

$$x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y \cdot \ln(x)} \quad (x > 0).$$

Hierbei ist klar, was mit x^y gemeint ist, wenn y eine ganze oder eine rationale Zahl ist (z.B. $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$). Man benutzt die obige Formel, um Potenzen von $x > 0$ auch für beliebige reelle Werte y zu definieren, z. B.:

```
>> float(2^PI) = float(exp(PI*ln(2)))

                    8.824977827 = 8.824977827
```

Bemerkung 1.72: *Aus der Schulzeit mag man gewöhnt sein, statt mit dem natürlichen Logarithmus mit dem Zehner-Logarithmus* $\log_{10}$ *umzugehen. Hier ist der Zusammenhang:*

$$x = \log_{10}(y) \;\Leftrightarrow\; y = 10^x \;\Leftrightarrow\; \ln(y) = \ln(10^x) = x \cdot \ln(10) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(y)}{\ln(10)},$$

also

$$\boxed{\log_{10}(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)} \quad \textit{für alle } y > 0.}$$

Beispiel 1.73: MuPAD hat Logarithmen `log(b, y)` zu einer beliebigen Basis `b`:

```
>> log(10, 25.0) = ln(25.0)/ln(10.0)

                  1.397940009 = 1.397940009
```

In der Schule waren im Kontext „Geometrie“ die Winkelfunktionen sin und cos eingeführt worden. Hier unsere Versionen:

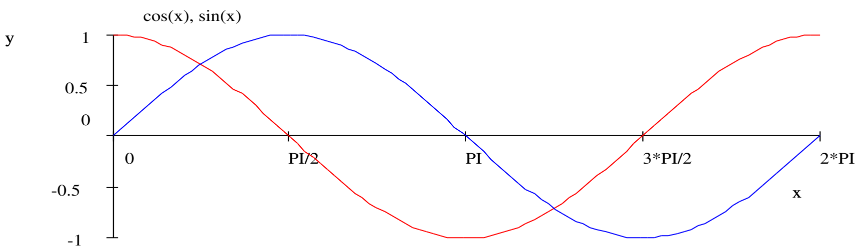
Satz und Definition 1.74:

Betrachte die folgenden Reihen, wobei x *eine beliebige feste reelle Zahl ist. Diese Reihen konvergieren. Die Reihenwerte heißen* $\sin(x)$ *bzw.* $\cos(x)$ *(die „trigonometrischen Funktionen“):*

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2\,i+1}}{(2\,i+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \;, \\ \cos(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2\,i}}{(2\,i)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \;. \end{aligned}$$

Graphisch:

```
>> plotfunc2d(cos(x), sin(x), x=0..2*PI,
              Ticks = [[0 = "0", PI/2 = "PI/2", PI = "PI",
                        3*PI/2 = "3*PI/2", 2*PI = "2*PI"],
                        [-1, -1/2, 0, 1/2, 1]])
```



Es gelten folgende Regeln (die keinesfalls leicht an der obigen Definition abzulesen sind, sondern mühsam bewiesen werden müssen):

Einige spezielle Werte:

$$\sin(0) = 0 \ , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = 0 \ .$$

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch, d.h., man braucht sie nur auf dem Grundintervall $[0, 2\,\pi)$ *zu kennen:*

$$\sin(x + 2\,\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\,\pi) = \cos(x).$$

Symmetrieeigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

„Additionstheoreme“:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y).$$

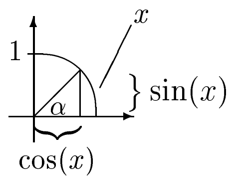
„Pythagoras“:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Bemerkung 1.75: *Vielleicht ist man aus der Schule noch gewohnt, die Argumente der trigonometrischen Funktion in Winkelgraden $\alpha = 0^0, \ldots, 360^o$ einzugeben. Mathematiker nehmen statt des Winkels α die zugehörige Bogenlänge x auf dem Einheitskreis (Einheit: „Radian“), der Zusammenhang ist*

$$x = \frac{\pi}{180}\,\alpha,$$

d.h., $90^o \equiv \frac{\pi}{2}$, $180^o \equiv \pi$, $360^o \equiv 2\,\pi$:



1.4.5 Einige ökonomische Funktionen

Einige typische Funktionen, die in der Ökonomie betrachtet werden. Dies sind keine fixierten Funktionen, sondern müssen jeweils in einem konkreten Kontext als Modellfunktionen vorgegeben werden.

Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion). Sei p der Preis eines Gutes, sei x die nachgefragte (abgesetzte) Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Typischerweise ist x als Funktion von p monoton fallend (je niedriger der Preis, um so höher der Absatz). Ausnahme: Luxus-Güter, wo die Ware dadurch „was her macht“, daß sie teuer ist („Snob-Effekt“). Oft wird statt $x(p)$ auch die Umkehrfunktion $p(x)$ betrachtet.

Angebotsfunktion. Sei p der Preis eines Gutes, sei x die vom Produzenten auf den Markt geworfene Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Typischerweise ist $x(p)$ monoton steigend (steigt der Preis, wird der Produzent die Angebotsmenge erhöhen).

Erlösfunktion. Sei p der Preis eines Gutes, sei x die nachgefragte (abgesetzte) Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Für x abgesetzte Güter zum „Stückpreis“ von $p(x)$ ergibt sich der Erlös zu

$$E(x) = x \cdot p(x).$$

Alternativ kann man mit der Umkehrfunktion $x(p)$ diese Größe auch in Abhängigkeit vom Preis p studieren:

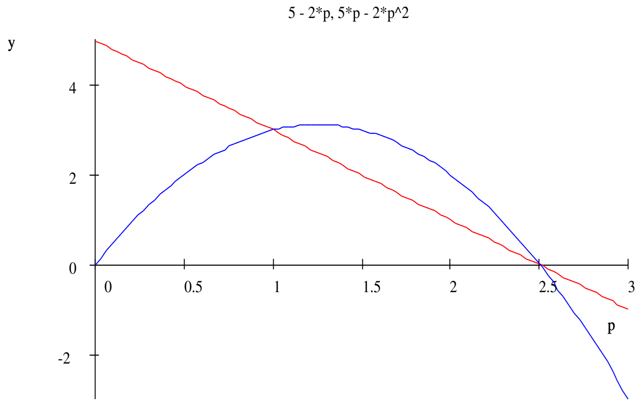
$$E(p) = x(p) \cdot p.$$

Sei beispielsweise die Preis-Absatzfunktion $x(p) = a - b \cdot p$ vorgegeben (biete ich die Ware zum Preis p an, so kann ich pro Zeiteinheit $x(p) = a - b \cdot p$ Mengeneinheiten absetzen). Die Erlösfunktion ist dann

$$E(p) = x(p) \cdot p = a \cdot p - b \cdot p^2.$$

Beispiel: (Man beachte, daß in MuPAD der Bezeichner `E` geschützt ist, er steht für `E = exp(1)`. Daher wird hier `EE` benutzt.)

```
>> a:= 5: b:= 2: x:= p -> a - b*p: EE:= p -> a*p - b*p^2:
>> plotfunc2d(x(p), EE(p), p = 0..3)
```



Die typische Fragestellung ist hier: zu welchem Preis p sollte ich die Ware anbieten, um den Erlös zu maximieren? Die Antwort hierauf liefert die Differentialrechnung (nächstes Kapitel).

Kapitel 2

Differentialrechnung

2.1 Definitionen und Sätze

$\boxed{\downarrow 15.5.01}$

Zunächst die Definition einer Ableitung als Grenzwert von „Sekantensteigungen“:

Definition 2.1: (Die Ableitung einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **„differenzierbar am Punkt x“**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt **„Ableitung von f am Punkt x“**. *Alternative Schreibweisen (mit $y = f(x)$):*

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Ist f an jedem Punkt x des Definitionsbereichs D differenzierbar, so heißt die Abbildung $f' : x \mapsto f'(x)$ **„Ableitungsfunktion“** *(kurz:* **„Ableitung von f“***).*

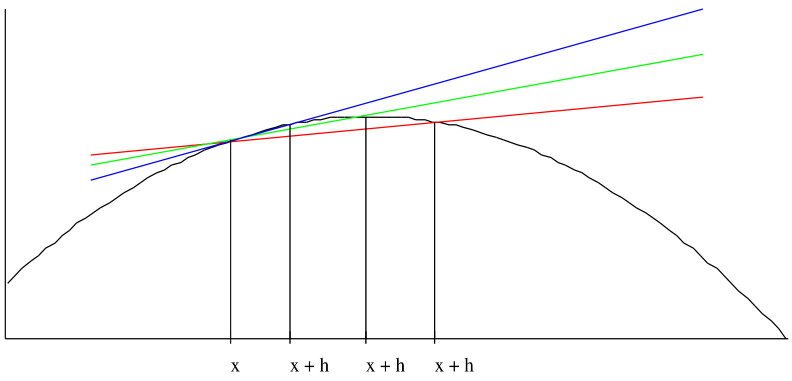
Bemerkung 2.2: *Ist eine Funktion an einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort auch stetig. Damit kann eine Funktion nur an Stetigkeitspunkten differenzierbar sein.*

Geometrische Interpretation der Ableitung 2.3:

Für kleines $\Delta x = h \neq 0$ ist der **„Differenzenquotient“**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

die Sekantensteigung vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x+h, f(x+h))$ auf dem Graphen von x:



> *Die Ableitung $f'(x)$ selbst, d.h., der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x = h \to 0$,* **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f am Punkt** *x.*

Zur Erinnerung an die Schule: die Tangente T durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist der Graph der linearen Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Interpretation der Ableitung 2.4:

Die Ableitung gibt an, wie stark sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um einen **kleinen** *Wert Δx ändert:*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x),$$

d.h.

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\ .}$$

Die Definition der Ableitung über den Grenzwert von Sekantensteigungen ist praktisch unnütz, da nur in den allereinfachsten Fällen handhabbar, z.B., bei:

Beispiel 2.5: Betrachte $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot x \cdot h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 \cdot x + h) = 2 \cdot x.$$

Für das praktische Rechnen wird man sich wiederum auf Rechenregeln verlassen:

Satz 2.6: (Rechenregeln für's Ableiten)

Ableitungen einiger spezieller Funktionen (sei hierbei c eine konstante Zahl):

$$\frac{d}{dx}\ c = 0, \quad \frac{d}{dx}\ x^n = n \cdot x^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\ e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\ \cos(x) = -\sin(x).$$

Die Ableitung einer aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktion ist über folgende Regeln zu berechnen. Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion ($f+g$, $f \cdot g$ etc.) existiert jeweils, wenn f und g ableitbar sind:

- $\frac{d}{dx}\ c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$,
- $\frac{d}{dx}\ \Big(f(x) + g(x)\Big) = f'(x) + g'(x)$ *(„**Summenregel**“),*
- $\frac{d}{dx}\ f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(„**Produktregel**“)*
- $\frac{d}{dx}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ *(„**Quotientenregel**“).*

Bei der Quotientenregel wird $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt (sonst teilt man durch 0).

Beispiel 2.7:

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Beispiel 2.8: Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\ \Big(x + x^2 \cdot e^x\Big) = \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \frac{d}{dx}\Big(x^2 \cdot e^x\Big)$$

$$= \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \Big(\frac{d}{dx} x^2\Big) \cdot e^x + x^2 \cdot \Big(\frac{d}{dx} e^x\Big) = 1 + 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x.$$

Beispiel 2.9: Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\;\frac{e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\;e^x\right)\cdot x - e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\;x\right)}{x^2} = \frac{e^x\cdot x - e^x\cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}.$$

Beispiel 2.10:

$$\frac{d}{dx}\;\frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}(\cos(x)\cdot e^x)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}\cos(x)\right)\cdot e^x + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}e^x\right)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\Big(-\sin(x)\cdot e^x + \cos(x)\cdot e^x\Big)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\cdot e^x\cdot x + \cos(x)\cdot e^x\cdot x - \cos(x)\cdot e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)\cdot e^x}{x} + \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} - \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x^2}.$$

Beispiel 2.11: Bequemer geht's mit MuPAD. Die Funktion `diff` ist für's Differenzieren von Ausdrücken zuständig:

```
>> diff(cos(x)*exp(x)/x, x)

          cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
          ------------- - ------------- - -------------
                x               2               x
                               x
```

(Vergleiche mit Beispiel 2.10.) Alternativ können Funktionen (aber keine Ausdrücke) mittels ′ differenziert werden:

```
>> f:= x -> cos(x)*exp(x)/x:
>> f'(x)

          cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
          ------------- - ------------- - -------------
                x               2               x
                               x
```

So setzt man konkrete Werte in die Ableitung ein:

```
>> f'(1), f'(2)

                       cos(2) exp(2)   sin(2) exp(2)
      -sin(1) exp(1), ------------- - -------------
                             4               2

>> f'(PI) = float(f'(PI))

         exp(PI)   exp(PI)
         ------- - ------- = -5.02126887
             2        PI
           PI
```

Wie steht's mit der Ableitung von „Hintereinanderschaltungen" von Funktionen wie z.B. $\sin(\sqrt{x}\,)$?

Satz 2.12: (Die Kettenregel) ↓18.5.01

Sei $g : D_g \mapsto D_f \subset \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $x \in D_g$. Sei $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $g(x) \in D_f$. Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ differenzierbar am Punkt x, und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\,h(x) = \frac{d}{dx}\,f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{„äußere Ableitung"}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{„innere Ableitung"}} .$$

Als Merkregel für $y = g(x)$, $z = f(y) = f(g(x))$:

$$\frac{d}{dx}\,f(g(x)) = \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}} = f'(y)\cdot g'(x).$$

Beispiel 2.13: Für $g(x) = \sqrt{x}$ gilt

$$g'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Zusammen mit $f(y) = \sin(y)$, $f'(y) = \cos(y)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\,\sin(\underbrace{\sqrt{x}}_{y}\,) = \left(\frac{d}{dy}\,\sin(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}\,\sqrt{x}\right) = \cos(y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}\,)}{2\cdot\,\sqrt{x}}.$$

Definition 2.14: (Höhere Ableitungun)

Die Funktion f sei differenzierbar, sei f' die Ableitungsfunktion. Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f'' = (f')'$ die **„zweite Ableitung von** f**"**. *Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f''' = (f'')'$ die* **„dritte Ableitung von** f**"**. *Usw. Schreibweisen für die n-te Ableitung einer Funktion f:*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = f^{\overbrace{\prime\prime\ldots\prime\prime}^{n}}(x).$$

(Die „nullte" Ableitung $f^{(0)}$ ist die Funktion f selbst.)

Beispiel 2.15: Offensichtlich gilt $\exp = \exp' = \exp'' = \exp'''$ etc. Die 4-te Ableitung der trigonometrischen Funktionen ist jeweils wieder die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin(x) = -\cos(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\sin(x) = \sin(x),$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)\ , \quad \frac{d^2}{dx^2}\cos(x) = -\cos(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\cos(x) = \sin(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\cos(x) = \cos(x).$$

Beispiel 2.16: Höhere Ableitungen in MuPAD:

```
>> diff(exp(x^2), x, x) // zweite Ableitung

                         2        2       2
                  2 exp(x ) + 4 x  exp(x )

>> n := 6:
>> diff(exp(x^2), x $ n) // n-te Ableitung

          2          2       2           4       2          6       2
 120 exp(x ) + 720 x  exp(x ) + 480 x  exp(x ) + 64 x  exp(x )
```

Mit der Funktion `subs` (engl.: substitute = ersetze; gemeint ist: ersetze x durch einen Wert) kann man konkrete Werte in Ausdrücke einsetzen. Berechne den Wert der 50-ten Ableitung von $\sin(x^2)\,e^x$ an der Stelle $x = 0$:

```
>> diff(sin(x^2)*exp(x), x $ 50):
>> subs(%, x = 0)
```

```
- 32812427642492524028780884258717885804750 cos(0) exp(0) -

   9681156701774438433479738001098392167599 sin(0) exp(0)
```

Hier kommt eine Besonderheit von `subs` zutage: der ersetzte Ausdruck wird nicht sofort „ausgewertet". D.h. in diesem Fall, daß die Vereinfachungen $\cos(0) = 0, \exp(0) = 1, \sin(0) = 0$ nicht automatisch geschehen. Die Funktion `eval` (engl.: evaluate = werte aus) erzwingt die Evaluation:

```
>> eval(%)

          -32812427642492524028780884258717885804750
```

Kennt man die Ableitung einer invertierbaren Funktion f, so kennt man auch die Ableitung der Umkehrabbildung f^{-1}. Es gilt

$$f^{-1}(f(y)) = y.$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung nach y ab, so liefert die Kettenregel

$$f^{-1\prime}(f(y)) \cdot f'(y) = \frac{d}{dy}\, y = 1 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1\prime}(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Satz 2.17: (Ableitung der Inversen)

Sei f differenzierbar und invertierbar, sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Ist $f'(y) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $x = f(y)$ differenzierbar, und es gilt

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Merkregel: mit $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$: $\boxed{f^{-1\prime}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$

Beispiel 2.18: Für $f^{-1} = \ln$ als Umkehrfunktion der Funktion $f = \exp$ mit $f' = \exp$ folgt mit $x = \exp(y)$, $y = \ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Hierbei ist $x > 0$ vorausgesetzt (damit $\ln(x)$ definiert ist). Für $x < 0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \ln'(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$, für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Zusammengefaßt gilt damit:

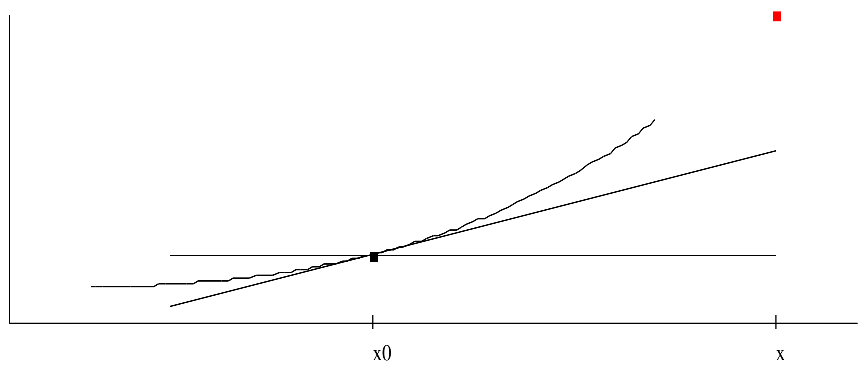
$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.}$$

An der Stelle $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ unstetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

2.2 Taylor–Reihen

22.5.01↓

Betrachte folgende Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes x_0 bekannt ist (genauer: es sind $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. bekannt). Man interessiert sich für den Funktionswert an einem Punkt x in der Nähe von x_0:



In allereinfachster Näherung würde man (für x dicht bei x_0)

$$f(x) \approx f(x_0)$$

setzen. Die nächstbessere Approximation besteht darin, der Tangente am Punkt x_0 zu folgen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Im obigen Fall ist deutlich, daß der Funktionswert oberhalb der Tangente zu suchen ist (die Funktion ist „gebogen“: es gilt $f''(x_0) > 0$). Es bietet sich an, einen quadratischen Term hinzuzufügen, um eine bessere Approximation zu erreichen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2.$$

Wie sollte die Konstante c gewählt werden, wie geht es weiter?

Definition 2.19: (Taylor-Reihen)

Sei f mehrfach differenzierbar. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i =$$

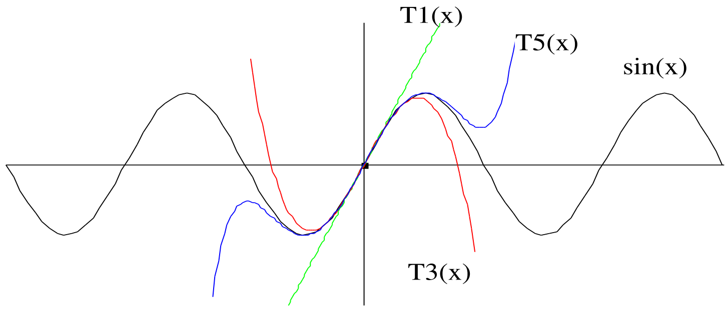
$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

heißt **„Taylor–Polynom n-ten Grades von f am Entwicklungspunkt x_0.**

Wozu Taylor–Polynome? Taylor–Polynome dienen dazu, komplizierte Funktionen in der Umgebung eines Punktes x_0 durch einfache Funktionen, nämlich Polynome, zu approximieren. Dadurch kann man oft das Verhalten der Funktion in der Nähe spezieller Punkte einfach studieren.

Taylor–Polynome nähern die Funktion an für Werte x, die dicht beim Entwicklungspunkt x_0 liegen: $T_n(x) \approx f(x)$. Je höher n und je kleiner der Abstand $x - x_0$, um so besser ist die Approximation.

Hier eine Graphik einiger Taylor–Polynome der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:



Eine erste Taylor–Reihenberechnung:

Beispiel 2.20: Wir berechnen die Taylor–Reihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$. Wegen $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = e^{x_0} = e^0 = 1$ ist die Taylor–Reihe

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

Die in Beispiel 1.37 vorgestellte Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist also nichts anderes als die Taylor–Entwicklung um den Nullpunkt.

Nun eine Anwendung der Taylor–Entwicklung:

Beispiel 2.21: Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 1.53. Es war behauptet worden, daß f auch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Dies ist nun leicht einzusehen. Wir approximieren e^x durch die Taylor–Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}{x}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

Hiermit ist nun klar: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) = 1.$

Beispiel 2.22: In MuPAD ist die Funktion `taylor` dafür zuständig, den Beginn einer Taylor–Entwicklung zu berechnen:

```
>> taylor(exp(x), x = 0)

                  2    3    4    5
                 x    x    x    x         6
         1 + x + -- + -- + -- + --- + O(x )
                 2    6    24   120
```

Die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ ist die geometrische Reihe aus Beispiel 1.31. Es werden 10 Terme berechnet:

```
>> taylor(1/(1 - x), x = 0, 10)

             2    3    4    5    6    7    8    9      10
    1 + x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + O(x  )
```

Der folgende Befehl berechnet eine Taylor–Entwicklung um $x_0 = \pi$:

```
>> taylor(2 + sin(x)*cos(x), x = PI)

                              3             5
                    2 (x - PI)    2 (x - PI)               6
    2 + (x - PI) - ----------- + ----------- + O((x - PI) )
                         3            15
```

Beispiel 2.23: Betrachte $f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Wie kann man Werte $f(x)$ für kleines x ohne technische Hilfsmittel ausrechnen? Zunächst die Berechnung der ersten Taylor–Polynome. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$, da wir uns für **kleine** Werte von x interessieren. Man braucht Ableitungen von $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}, \quad f(0) = 0, \\
f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(0) = \tfrac{1}{2}, \\
f''(x) &= \tfrac{1}{4} \cdot (1-x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(0) = \tfrac{1}{4}, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Hiermit folgt die Entwicklung

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x} \approx f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \cdots .$$

Nun ja, die Terme der Entwicklung sind in der Tat so alle berechenbar, aber das ist ziemlich mühselig. Bequemer mit MuPAD:

```
>> taylor(1 - sqrt(1 - x), x)

              2     3       4        5
         x    x     x     5 x     7 x         6
         - + -- + -- + ---- + ---- + O(x )
         2    8    16   128     256
```

Aus diesen Taylor–Approximationen bekommt man z.B. für $x = 0.1$:

$$\begin{array}{rcl} f(0.1) & = & \frac{0.1}{2} + \frac{0.1^2}{8} + \frac{0.1^3}{16} + \cdots \\ & = & 0.05 \\ & + & 0.00125 \\ & + & 0.0000625 \\ & + & \cdots \\ \hline & = & 0.05131... \end{array}$$

Man sieht der Entwicklung geradezu an, daß die noch nicht berücksichtigten Terme der Entwicklung die angegebenen Dezimalstellen nicht mehr beeinflussen, d.h., die ersten 3 bis 4 Ziffern sind korrekt. Probe mit MuPAD:

```
>> 1 - sqrt(0.9)
                            0.05131670195
```

2.3 Monotonie, Extremwerte

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentiation ist das Auffinden von Extremwerten. Dazu stellen wir zunächst fest, daß Ableitungswerte (= Tangentensteigungen) auf ansteigendes oder abfallendes Verhalten der Funktion hinweisen:

Satz 2.24: (Ableitungen weisen auf Monotonie hin)

Sei f differenzierbar, die Ableitungsfunktion f' sei stetig. Gilt $f(x_0) > 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton steigend. Gilt $f(x_0) < 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend.

Mit der Interpretation der Ableitung 2.4 ist dies unmittelbar klar. Für kleines Δx gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

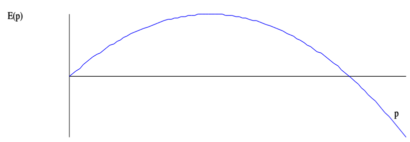
Extrema sind die Stellen, wo die Funktion „auf der einen Seite“ steigend, „auf der anderen Seite“ fallend ist:

Satz 2.25: (An Extremstellen verschwindet die Ableitung)

Sei f differenzierbar. Ist die Stelle x_0 ein (lokales) Maximum oder Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Man findet also alle Kandidaten für Extremstellen einer Funktion f, indem man die Nullstellen von f' sucht.

Beispiel 2.26: In Abschnitt 1.4.5 war die Erlösfunktion $E(p) = x(p) \cdot p = a \cdot p - b \cdot p^2$ betrachtet worden:



Zu welchem Preis p sollte ich die Ware anbieten, um den Erlös zu maximieren? Es gilt

$$\frac{d}{dp}E(p) = \frac{d}{dp}(a \cdot p - b \cdot p^2) = a - 2 \cdot b \cdot p \overset{(!)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{a}{2\,b}.$$

Aus der Graphik ist klar, daß es sich hierbei um ein Maximum des Erlöses handelt.

Es gibt allerdings Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$, die keine Extremstellen (sondern sogenannte „Sattelpunkte“) sind. Beispiel: die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend. Am Punkt $x_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 0$, aber x_0 ist kein Extremum.

Satz 2.27: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

Sei f mehrfach differenzierbar. Gilt an einer Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

so ist x_0 ein lokales Maximum. Gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

so ist x_0 ein lokales Minimum.

„Beweis“: Approximiere $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das Taylor–Polynom zweiten Grades:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

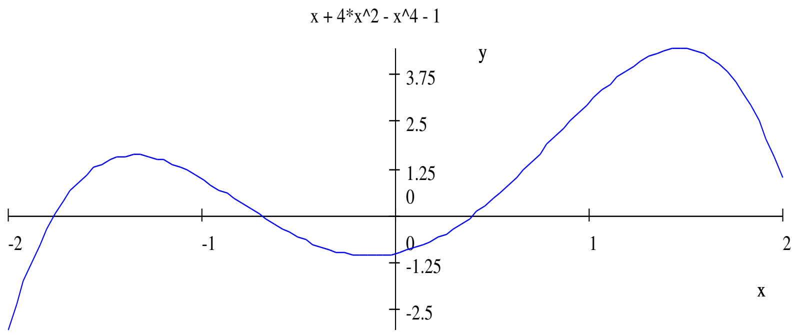
An einem Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gilt näherungsweise:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Da $(x - x_0)^2 > 0$ für $x \neq x_0$ ist, sind die Funktionswerte in der Umgebung größer als $f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt (Minimum). Für $f''(x_0) < 0$ sind die Funktionswerte in der Umgebung kleiner als $f(x_0)$ (Maximum).

Beispiel 2.28: Betrachte $f(x) = x + 4\,x^2 - x^4 - 1$: ↓25.5.01

```
>> f:= x -> x + 4*x^2 - x^4 - 1:
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```



Um die Kandidaten für die Extrema zu finden, werden (numerische Approximationen der) Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ berechnet. Für numerische Lösungen sind die MuPAD-Funktionen `numeric::solve` oder auch `numeric::fsolve` zuständig. Für polynomiale Gleichungen wird eine Menge aller Lösungen geliefert. Die einzelnen Lösungen lassen sich durch „indizierten Zugriff" `Kandidaten[1]` etc. auswählen:

```
>> Kandidaten:= numeric::solve(f'(x) = 0, x)

          {-1.346997409, -0.1260001926, 1.472997601}
```

Diese Werte werden in die 2-te Ableitung von f eingesetzt:

```
>> f''(Kandidaten[1])
                              -13.77282422
>> f''(Kandidaten[2])
                               7.809487418
>> f''(Kandidaten[3])
                               -18.0366632
```

Nach Satz 2.27 ist der erste Kandidat ein Maximum, der zweite Kandidat ein Minimum, der dritte Kandidat ein Maximum. Die Graphik bestätigt dies.

2.4 Die l'Hospitalsche Regel

In $\frac{0}{0}$–Situationen kann man durch Ableiten auch Grenzwerte bestimmen.

Satz 2.29: (l'Hospitalsche Regel)

Seien f und g differenzierbar, es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

„Beweis:" Approximiere Zähler und Nenner durch das Taylor–Polynom ersten Grades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Beispiel 2.30: Betrachte erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 1.53. Für den Punkt $x_0 = 0$ liegt eine $\frac{0}{0}$–Situation vor. Mit l'Hospital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$

Die l'Hospitalsche Regel kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

Beispiel 2.31: Betrachte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x}{x^2}$. Nach einer Anwendung von l'Hospital trifft man beim Quotienten der Ableitungen wieder auf eine $\frac{0}{0}$–Situation und kann l'Hospital erneut anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x)}{\frac{d}{dx}\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x} - 2}{2 \cdot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{2 \cdot x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2 \cdot x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{1} = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2.$$

Kapitel 3

Differentialrechnung in der Ökonomie

Ökonomische Bezeichnungen 3.1:

Sei $f(x)$ eine „ökonomische Funktion" (z.B., Erlös, Gewinn, Kosten etc.). Die Ableitung $f'(x)$ wird als **„Grenzfunktion"** *(„Grenzerlös", „Grenzgewinn", „Grenzkosten" etc.) oder auch als* **„marginale"** *Funktion bezeichnet („marginaler Erlös", „marginaler Gewinn", „marginale Kosten" etc.).*

Für die Ökonomie ist die Interpretation

$$\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

die wohl wichtigste Anwendung der Ableitung einer Funktion $f(x)$. Dies Formel beantwortet die Frage: wie stark ändert sich f von $f(x)$ auf $f(x) + \Delta f$, wenn sich x auf $x + \Delta x$ ändert?

Beispiel 3.2: Sei x mein Einkommen, seien $f(x)$ die Steuern, die ich zu zahlen habe. Wächst mein Einkommen um $\Delta x = 1$ DM, so gibt die „Grenzsteuer" $f'(x)$ $(= f'(x) \cdot 1$ DM) in sehr guter Näherung an, wieviel zusätzliche Steuern Δf ich für diese 1 DM zu zahlen habe.

$\boxed{\downarrow 29.5.01}$

Oft ist es günstiger, Änderungen einer Größe x nicht in absoluten Einheiten Δx anzugeben, sondern als **relative** Änderung $\frac{\Delta x}{x}$ (diese kann stets in % angegeben werden). Beispielsweise ist es bei einer Nachfragefunktion $x(p)$ wenig sinnvoll zu fragen, wie sich die Nachfrage x ändert, wenn sich der Preis p um $\Delta p = 1$ DM ändert: 1 DM ist beim Preis eines Autos eine sehr kleine Änderung, bei einem Liter Benzin ist ein Preisunterschied von 1 DM gewaltig. Die sinnvollere Frage ist oft:

$\boxed{\textit{Um wieviel Prozent ändert sich } f(x)\textit{, wenn sich } x \textit{ um 1 \% ändert?}}$

Gesucht ist der Faktor $\epsilon_{f,x}$, sodaß

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \epsilon_{f,x} \frac{\Delta x}{x}$$

gilt. Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ ist der gesuchte Faktor

$$\epsilon_{f,x} \approx \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} \overset{(\Delta x \to 0)}{\longrightarrow} \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

Definition 3.3: (Elastizität)

Sei f differenzierbar an der Stelle x, sei $f(x) \neq 0$. Dann heißt

$$\epsilon_{f,x} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

die **„Elastizität von f bezüglich x"**.

Gilt $\epsilon_{f,x} = 0$, so heißt f **„starr"**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| < 1$, so heißt f **„unelastisch"**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| = 1$, so heißt f **„proportional elastisch"**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| > 1$, so heißt f **„elastisch"**.

Merke 3.4:

Die Elastizität einer Funktion $f(x)$ gibt an, wie sich eine kleine relative Änderung von x zu einer relativen Änderung von $f(x)$ verstärkt.

Die Elastizität einer Umkehrfunktion ergibt sich aus der Elastizität der Funktion:

Satz 3.5: (Elastizität von Umkehrfunktionen)

Mit $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ gilt: $\quad \epsilon_{f^{-1},y} = \dfrac{1}{\epsilon_{f,x}}$.

Beweis: Nach Satz 2.17 gilt $f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)}$, also

$$\epsilon_{f^{-1},y} = \frac{f^{-1\prime}(y) \cdot y}{f^{-1}(y)} = \frac{y}{f'(x) \cdot f^{-1}(y)} = \frac{1}{\frac{f'(x) \cdot f^{-1}(y)}{y}} = \frac{1}{\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}} = \frac{1}{\epsilon_{f,x}}.$$

□

Beispiel 3.6: Eine Fabrik erzeugt ein bestimmtes Produkt, der Ausstoß sei x (Einheiten des Produkts pro Zeiteinheit). Die Kosten der Produktion von x Einheiten sei $K(x)$, die Stückkosten sind damit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.
Die Stückkosten sind nicht konstant: z.B. verteilen sich fixe (von x unabhängige) Grundkosten wie etwa Entwicklungskosten, der Bau der Produktionsanlage, Personalkosten etc. auf alle hergestellten Einheiten: je mehr produziert wird, umso geringer die Stückkosten. Eine mögliche Modellfunktion, die dieses Verhalten beschreibt, könnte folgendermaßen aussehen:

$$K(x) = K_0 + K_1 \cdot x, \quad \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_0}{x} + K_1.$$

K_0 wären die fixen Grundkosten, K_1 wären die „Materialkosten“ bei der Herstellung einer Einheit. Die Elastizität der Kosten bezüglich der Produktionsmenge ist

$$\epsilon_{K,x} = \frac{K_1 \cdot x}{K_0 + K_1 \cdot x}.$$

Mit $x > 0$, $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ liegt diese Elastizität stets zwischen 0 und 1, die Kosten sind also stets elastisch. Das ist günstig: steigert man die Produktion, steigen die Kosten unterproportional. Das war eigentlich klar, denn die Stückkosten $\bar{K}(x)$ sinken im obigen Modell monoton mit der Produktion x. In der Tat gibt es stets ein Zusammenhang zwischen Elastizität und der Monotonie der „durchschnittlichen“ (= „Stück“–) Kosten, wie der folgende Satz 3.8.b) besagt.

Ökonomische Bezeichnungen 3.7:

Zu gegebenem $f(x)$ wird die Funktion $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$ als **„Durchschnittsfunktion“** *bezeichnet (z.B. $\bar{f}(x)$ = „Durchschnittskosten“ = „Stückkosten“, wenn f die Kostenfunktion ist).*

Satz 3.8: (Zusammenhänge zwischen Durchschnitt und Elastizität)

$$a) \quad \frac{d}{dx}\, f(x) = \bar{f}(x) \cdot (1 + \epsilon_{\bar{f},x}), \qquad b) \quad \frac{d}{dx}\, \bar{f}(x) = \frac{\bar{f}(x)}{x} \cdot (\epsilon_{f,x} - 1).$$

Beweis:
a) Einfaches Nachrechnen:

$$\bar{f}(x) \cdot (1 + \epsilon_{\bar{f},x}) = \bar{f}(x) \cdot \Big(1 + \frac{\big(\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{x}\big) \cdot x}{\bar{f}(x)}\Big) = \bar{f}(x) + \Big(\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{x}\Big) \cdot x$$

$$= \frac{f(x)}{x} + \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \cdot x = \frac{f(x)}{x} + \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x} = f'(x).$$

b) Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{x} = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}\cdot\Big(\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)} - 1\Big) = \frac{\bar{f}(x)}{x}\cdot(\epsilon_{f,x} - 1).$$

□

Aussage b) impliziert für $x > 0$, $f(x) > 0$: die Durchschnittsfunktion $\bar{f}(x)$ ist genau dann monoton fallend, wenn $\epsilon_{f,x} - 1 < 0$ gilt, d.h., speziell für elastische Funktionen mit $\epsilon_{f,x} < 1$.

Beispiel 3.9: Betrachte die Nachfragefunktion $x(p)$ (x = Nachfrage, p = Preis) und die Erlösfunktion $E(p) = p \cdot x(p)$. Damit ist die Nachfrage der Durchschnitt $x(p) = \frac{E(p)}{p} = \bar{E}(p)$ des Erlöses, und es folgt aus Satz 3.8.a):

$$\frac{d}{dp}\,E(p) = x(p)\cdot(1 + \epsilon_{x,p}).$$

Mit der Erlösfunktion $E(x) = p(x)\cdot x$ als Funktion der Nachfrage x ist der Preis der Durchschnitt $p(x) = \frac{E(x)}{x} = \bar{E}(x)$ des Erlöses, und es folgt aus Satz 3.8.a):

$$\frac{d}{dx}\,E(x) = p(x)\cdot(1 + \epsilon_{p,x}).$$

Nach Satz 3.5 gilt $\epsilon_{p,x} = \frac{1}{\epsilon_{x,p}}$, und es ergibt sich die sogenannte **Amoroso-Robinson-Gleichung**:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,E(x) = p(x)\cdot\Big(1 + \frac{1}{\epsilon_{x,p}}\Big).}$$

Kapitel 4

Integration

4.1 Stammfunktionen: das unbestimmte Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation: zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ sucht man eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist.

4.1.1 Definitionen, Grundintegrale

Definition 4.1: (Stammfunktion)
$F(x)$ heißt **„Stammfunktion"** *einer (hinreichend glatten) Funktion $f(x)$, wenn $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ gilt. Alternativ nennt man $F(x)$ auch das* **„unbestimmte Integral über** $f(x)$**"** *und benutzt auch die Notation $F(x) = \int f(x)\,dx$. Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralzeichen wird als* **„Integrand"** *bezeichnet.*

Bemerkung 4.2: *Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Da die Ableitung einer konstanten Funktion überall 0 ist, kann man zu einer Stammfunktion eine beliebige Konstante hinzuaddieren, wobei man eine neue Stammfunktion erhält. Andererseits, hat $f(x)$ keine Singularitäten (Polstellen etc.), so sind Stammfunktionen stetig und die Differenz zweier stetiger Stammfunktionen ist immer eine Konstante.*

Beispiel 4.3: Zu $f(x) = x$ sind $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ und $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 17$ Stammfunktion. Die beliebige additive Konstante in Stammfunktionen (die **„Integrationskonstante"**) wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Damit ist gemeint: $\int f(x)\,dx$ stellt die Klasse **aller** Stammfunktionen dar (d.h., in der Schreibweise $\int f(x)\,dx$ steckt die additive Konstante sozusagen im $\int$-Symbol und braucht nicht explizit hingeschrieben zu werden). Sobald das Integralzeichen durch einen konkreten Repräsentanten dieser Klasse (hier $\frac{x^2}{2}$) ersetzt wird, schreiben wir die beliebige additive Konstante explizit dazu.

Bemerkung 4.4: *Mit dieser Konvention gilt trivialerweise für jede Funktion $F(x)$:*

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + c\ .$$

Grundintegrale 4.5:

Aus der in Satz 2.6 gegebenen (kleinen) Liste von Ableitungen erhält man eine (kleine) Liste von Stammfunktionen für die einfachen Grundfunktionen:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, && (n \neq 0)\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(|x|) + c, && \textit{(Beispiel 2.18)}\\
\int e^x\,dx &= e^x + c, &&\\
\int \sin(x)\,dx &= -\cos(x) + c, &&\\
\int \cos(x)\,dx &= \sin(x) + c. &&
\end{aligned}$$

Beispiel 4.6: In MuPAD ist die Funktion `int` (engl.: integrate) für die Integration zuständig. Für die Integrationskonstante wird dabei vom System automatisch ein „besonders einfacher“ Wert gewählt:

```
>> int(cos(x), x)
                                    sin(x)

>> int(x*sin(x)*exp(x), x)

       cos(x) exp(x)   x cos(x) exp(x)   x sin(x) exp(x)
       ------------- - --------------- + ---------------
             2                2                 2
```

Für aus den einfachen Grundfunktionen aufgebaute Funktionen würde man gern per Rechenregeln die Integration komplizierter Funktionen auf die Integration einfacher Funktionen zurückführen. Leider ist das nicht so einfach. In der Tat entspricht jeder Rechenregel der Differentiation (Satz 2.6, Satz 2.12) eine Regel für's Integrieren. Die sich ergebenden Regeln sind aber nicht so, daß man damit automatisch alle Integrationen auf Grundintegrale zurückführen kann. Zunächst die einfachsten Regeln:

Satz 4.7: (Summenregel)

Für beliebige Konstanten a, b und Funktionen $f(x)$, $g(x)$ gilt

$$\int \Big(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\Big) dx = a \cdot \int f(x)\,dx \;+\; b \cdot \int g(x)\,dx.$$

Das ist durch Differenzieren beider Seiten dieser Gleichung unmittelbar klar.

Merke:

Konstante Faktoren können stets aus dem Integralzeichen herausgezogen werden. Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale.

Beispiel 4.8:

$$\int \Big(2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2\,x}}\Big)\,dx = 2 \cdot \int e^x\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_2 = 2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \underbrace{c_1 + c_2}_{c}$$

$$= 2 \cdot e^x + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x} + c = 2 \cdot e^x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + c.$$

Hierbei wurden die einzelnen Integrationskonstanten c_1, c_2 zu einer neuen beliebigen Konstanten $c = c_1 + c_2$ zusammengefaßt.

4.1.2 Partielle Integration

Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

der Differentiation gewinnt man durch Integration

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \;+\; \int f(x) \cdot g'(x)\,dx.$$

Diese Gleichung liefert eine Integrationsregel, die man **„partielle Integration"** nennt:

Satz 4.9: (Partielle Integration)

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) \quad - \quad \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.}$$

Bemerkung 4.10: *Diese Regel ist in folgender Situation anwendbar:*

- *Der Integrand muß das Produkt zweier Funktionen sein.*
- *Von einem Faktor ($g'(x)$) muß man die Stammfunktion $g(x)$ kennen.*

Ein Integral (über $f(x) \cdot g'(x)$) wird in ein anderes Integral (über $f'(x) \cdot g(x)$) überführt, es verbleibt also die Aufgabe, eine Stammfunktion zu finden. Allerdings ist manchmal das Produkt $f'(x) \cdot g(x)$ einfacher zu integrieren als das Ausgangsprodukt $f(x) \cdot g'(x)$:

- *Sinnvoll ist partielle Integration meist, wenn die Ableitung $f'(x)$ „einfacher" ist als $f(x)$ und $g(x)$ nicht wesentlich „komplizierter" als $g'(x)$.*

1.6.01↓ **Beispiel 4.11:** Im Integral $\int x \cdot \ln(x)\, dx$ ist $f(x) = \ln(x)$ eine „unangenehme" Funktion, während $f'(x) = \frac{1}{x}$ als rationale Funktion wesentlich angenehmer ist:

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\, dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)}\, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\, dx = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\ .$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c\Big) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} + \ln(x) \cdot x - \frac{x}{2} = \ln(x) \cdot x.$$

Es gibt keine allgemeine Regel, was „einfach" und was „kompliziert" ist. Im obigen Fall war $f'(x) = \frac{1}{x}$ einfacher als $f(x) = \ln(x)$. Im folgenden Beispiel ist $f(x) = x$ „kompliziert", zumindestens „komplizierter" als $f'(x) = 1$:

Beispiel 4.12:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + c = (x-1) \cdot e^x + c.$$

Manchmal braucht man einfach Erfahrung um zu sehen, daß partielle Integration hilfreich ist:

Beispiel 4.13:

$$\int \sin(x)^2\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2\,dx.$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)^2\,dx$ wurde durch $\int \cos(x)^2\,dx$ ausgedrückt. Allerdings gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, sodaß das verbleibende Integral wiederum durch das Ausgangsintegral ausgedrückt werden kann:

$$\int \cos(x)^2\,dx = \int 1\,dx - \int \sin(x)^2\,dx = x - \int \sin(x)^2\,dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x)^2\,dx$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int \sin(x)^2\,dx &= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \textstyle\int \cos(x)^2\,dx \\ &= -\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \textstyle\int \sin(x)^2\,dx \\ \Rightarrow \quad 2\cdot \textstyle\int \sin(x)^2\,dx &= x - \sin(x)\cdot\cos(x) + c \\ \Rightarrow \quad \textstyle\int \sin(x)^2\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\Big(x - \sin(x)\cdot\cos(x)\Big) + c. \end{aligned}$$

4.1.3 Substitution

Aus der Kettenregel der Differentiation (mit $y = g(x)$)

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \Big(\frac{d}{dy}\;F(y)\Big)\cdot\Big(\frac{d}{dx}\;g(x)\Big) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

gewinnt man durch Integration

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx.$$

Diese Gleichung liefert mit $f = F'$ eine Integrationsregel, die man **„Integration durch Substitution“** nennt:

Satz 4.14: (Substitution)

Sie $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$. Mit $y = g(x)$ gilt

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot\underbrace{g'(x)\,dx}_{dy} = \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(g(x)) + c.}$$

Hierbei läuft die Substitution auf Folgendes hinaus. Aus $y = g(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = g'(x)$, also formal

$$dy = g'(x)\,dx.$$

Eine Substitution bietet sich auf jeden Fall an, wenn der Integrand einen Faktor $g'(x)$ enthält, der die Ableitung eines Teilausdrucks $g(x)$ im anderen Faktor ist:

Beispiel 4.15: In $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\, dx$ bietet es sich an, $y = g(x) = \sin(x)$ zu substituieren, denn die Ableitung $g'(x) = \cos(x)$ taucht als Faktor im Integranden auf. Es ergibt sich

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\, dx = \int e^{\overbrace{\sin(x)}^{y=g(x)}} \underbrace{\cos(x)\, dx}_{g'(x)\cdot dx = dy} = \int e^y\, dy = e^y + c = e^{\sin(x)} + c.$$

Beispiel 4.16: Wir kennen $\int \frac{1}{y}\, dy = \ln(|y|)$. Wie steht es mit $\int \frac{1}{a\cdot x+b}\, dx$? Dies ist ein Fall für die Substitution. Wir setzen $y = g(x) = a\cdot x + b$ (also $dy = a\ dx$) und erweitern mit a, sodaß $dx = \frac{1}{a} \cdot a\ dx = \frac{1}{a}\ dy$ auftaucht:

$$\int \frac{1}{a\cdot x+b}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{a\cdot x+b} \cdot \overbrace{\underbrace{a}_{g'(x)}\ dx}^{dy} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y}\ dy$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \ln(|y|) + c = \frac{1}{a} \cdot \ln(|a\cdot x + b|) + c.$$

5.6.01↓ **Beispiel 4.17:** In $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$ bietet sich die Substitution $y = f(x)$ an:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln(|y|) + c = \ln(|f(x)|) + c.}$$

Bemerkung 4.18: *Es bietet sich allgemein an, eine Substitution $y = g(x)$ in einem Integral $\int h(x)\, dx$ technisch folgendermaßen durchzuführen:*

- *Setze $y = g(x)$ und berechne die Ableitung $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Formal gilt $dy = g'(x)\, dx$.*

- *Ersetze dx durch $\frac{dy}{g'(x)}$. Drücke im neuen Integranden $h(x)\, dx = \frac{h(x)}{g'(x)}\, dy$ jedes x durch y aus.*

- *Es entsteht ein Ausdruck*

$$\int h(x)\,dx = \int \underbrace{h(x(y)) \cdot \frac{1}{g'(x(y))}}_{f(y)}\,dy = \int f(y)\,dy.$$

  Versuche, eine Stammfunktion $F(y) = \int f(y)\,dy$ *zu finden.*

- **„Rücksubstitution"**: *Setze* $y = g(x)$ *in* $F(y)$ *ein. Die gesuchte Stammfunktion des ursprünglichen Ausdrucks ist* $F(g(x))$.

Manchmal ist es nicht offensichtlich, was man substituieren sollte. Hier hilft nur Erfahrung oder ein guter Tip:

Beispiel 4.19: Substituiere $y = \sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(\Rightarrow\ dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx)$ in

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = \int y \cdot e^y \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x}\ dy}_{dx} = 2 \cdot \int y^2 \cdot e^y\ dy.$$

Das verbleibende Integral in y kann durch zweifache partielle Integration gelöst werden:

$$2 \cdot \int \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g'(y)}\ dy = 2 \cdot \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)} - 2 \cdot \int \underbrace{2 \cdot y}_{f'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)}\ dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \int \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G'(y)}\ dy = 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)} + 4 \cdot \int \underbrace{1}_{F'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)}\ dy$$

$$= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot y \cdot e^y + 4 \cdot e^y + c.$$

Rücksubstitution $y = \sqrt{x}$ liefert letztlich:

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot x \cdot e^{\sqrt{x}} - 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 4 \cdot e^{\sqrt{x}} + c.$$

4.1.4 Rationale Integranden: Partialbruchzerlegung

Rationale Integranden lassen sich über die Technik der „Partialbruchzerlegung" immer so umformulieren, daß man eine Stammfunktion bestimmen kann. Hier der Spezialfall, wenn das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen hat:

Satz 4.20: (Partialbruchzerlegung)

Betrachte $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, wobei $grad(p(x)) < grad(q(x))$ gelte. Hat das Nennerpolynom $q(x)$ nur einfache Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$, so gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$, sodaß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{c_n}{x - x_n}.$$

Damit folgt dann

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = c_1 \cdot \ln(|x - x_1|) + \cdots + c_n \cdot \ln(|x - x_n|) + c.$$

Beispiel 4.21: Die technische Durchführung geschieht folgendermaßen:
1) Ansatz:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2}.$$

2) Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner:

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2} = \frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

3) Ordne den Zähler nach Potenzen von x:

$$\frac{c_1 \cdot (x+2) + c_2 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

4) Der Ansatz lautet nun:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

Die Nenner stimmen nach Konstruktion überein. Es verbleibt, die Konstanten c_1, c_2 so zu bestimmen, daß auch die Zähler <u>für alle x</u> übereinstimmen. Vergleiche dazu im Zähler die Koeffizienten vor jeder x-Potenz:

$$3 = c_1 + c_2, \quad 4 = 2 \cdot c_1 - c_2.$$

4) Löse das entstandene lineare Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten:

$$c_1 = \frac{7}{3}\,, \quad c_2 = \frac{2}{3}.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{3 \cdot x + 4}{(x-1) \cdot (x+2)}\, dx = \int \Big(\frac{\frac{7}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} \Big)\, dx = \frac{7}{3}\, \ln(|x-1|) + \frac{2}{3}\, \ln(|x+2|) + c.$$

Beispiel 4.22: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` (engl.: partial fraction) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac((3*x + 4) / ((x - 1)*(x + 2)), x)

                         7           2
                     --------- + ---------
                     3 (x - 1)   3 (x + 2)
```

Bemerkung 4.23: *Die Partialbruchzerlegung haben wir schon früher beim Summieren rationaler Ausdrücke kennengelernt: siehe Beispiel 1.38.*

Bemerkung 4.24: *Hat man einen rationalen Integranden $\frac{p(x)}{q(x)}$, bei dem der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms (dies wird in Satz 4.20 vorausgesetzt), so ist dies auch kein Problem. Durch Polynomdivision kann man einen polynomialen Anteil abspalten, z.B.:*

$$\frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = 2 \cdot x + 1 \ + \ \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 1}.$$

Die Division wird dabei wie mit Zahlen durchgeführt (man zieht sukzessiv den „führenden Term" durch ein geeignetes Vielfaches des Nenners ab):

$$\begin{array}{lcccc}
2 \cdot x^3 + x^2 + 2 & : & x^2 - 1 & = & 2 \cdot x + 3 \\
\underline{2 \cdot x^3 - 2 \cdot x} & & & & \\
\quad x^2 + 2 \cdot x + 2 & & & & \\
\quad \underline{x^2 - 1} & & & & \\
\qquad 2 \cdot x + 3 & & \text{(der Rest)} & &
\end{array}$$

Der verbleibende Rest kann durch Partialbruchzerlegung additiv zerlegt werden, das Ergebnis ist:

```
>> partfrac((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                     5           1
        2 x + --------- - --------- + 1
              2 (x - 1)   2 (x + 1)
```

Es folgt

$$\int \frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{(x^2 - 1)} \, dx = \int \left(2 \cdot x + 1 \ + \ \frac{\frac{5}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \frac{5}{2} \ \ln(|x - 1|) - \frac{1}{2} \ \ln(|x + 1|) + c.$$

Probe mit MuPAD:

```
>> int((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 -1), x)

                  2   5 ln(x - 1)   ln(x + 1)
             x + x  + ----------- - ---------
                           2            2
```

(MuPAD verzichtet darauf, innerhalb des `ln` *Betragszeichen einzutragen, denn MuPAD kann mit komplexen Zahlen umgehen. Für positives x gilt $\ln(-x) = \sqrt{-1}\cdot\pi+\ln(x)$, d.h., $\ln(-x)$ und $\ln(x)$ stimmen bis auf eine additive (komplexe) Konstante überein. Diese kann in die Integrationskonstante absorbiert werden).*

$\boxed{8.6.01\downarrow}$ **Bemerkung 4.25:** *Für die Partialbruchzerlegung braucht man die Faktorisierung $q(x) = (x - x_1)\cdot \cdots \cdot(x - x_n)$ des Nennerpolynoms, d.h., man muß die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ von $q(x)$ finden. Kennt man eine Nullstelle x_1, so kann man die Suche nach weiteren Nullstellen vereinfachen, indem man $\tilde{q}(x) = \frac{q(x)}{x-x_1}$ durch Polynomdivision ausrechnet. Die Division geht auf, wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist, denn mit $q(x) = (x - x_1)\cdot \cdots \cdot(x - x_n)$ folgt*

$$\tilde{q}(x) = \frac{q(x)}{x - x_1} = (x - x_2)\cdot \cdots \cdot(x - x_n).$$

Dieses „Restpolynom“ enthält die verbleibenden Nullstellen. Beispiel:

$$q(x) = x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1.$$

Durch Raten hat man die erste Nullstelle $x_1 = 1$ gefunden. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r l l}
x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1 & : \; x - 1 & = \; x^2 - 2\cdot x - 1 \\
x^3 - x^2 \qquad\qquad & & \\
\hline
- 2\cdot x^2 + x + 1 & & \\
- 2\cdot x^2 + 2\cdot x & & \\
\hline
- x + 1 & & \\
- x + 1 & & \\
\hline
0 \quad & &
\end{array}$$

Mit

$$\frac{q(x)}{x - 1} = x^2 - 2\cdot x - 1$$

findet man die weiteren Nullstellen

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

von $q(x)$ über die übliche Lösungsformel für quadratische Polynome.

4.2 Das bestimmte Integral

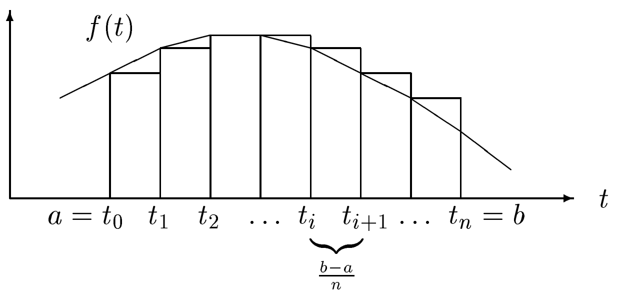
Die geometrische Interpretation eines bestimmten Integrals ist die Fläche unter einem Funktionsgraphen $f(t)$. Man zerlege ein Interval $[a, b]$ auf der t-Achse äquidistant in n Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \ , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dann approximiere man den Flächeninhalt durch die Flächen der durch die Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, 0)$$

gegebenen Rechtecke (mit der Breite $\frac{b-a}{n}$):



Die Summe der n Rechteckflächen ist $\dfrac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t_i)$. Im Grenzwert $n \to \infty$ liefert dies die Fläche unter dem Graphen.

Definition 4.26: (Das bestimmte Integral)

Zu einer über dem Intervall $[a, b]$ definierten (hinreichend glatten, z.B. stetigen) Funktion $f(t)$ (dem **„Integranden“***) wird das* **„bestimmte Integral“** *über $[a, b]$ definiert als*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\Big)$$

(sofern dieser Grenzwert existiert).

Dies ist lediglich eine prinzipielle Definition, die zur Berechnung völlig ungeeignet ist. Die wirkliche Berechnung geschieht über Stammfunktionen von $f(t)$, sobald der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem unbestimmten Integral geklärt ist (nächster Abschnitt).

Bemerkung 4.27: *Das bestimmte Integral kann auch negative Werte annehmen (z.B., wenn überall $f(t) < 0$ gilt). Die Interpretation als „Fläche unter dem Graphen“ gilt nur für positive Funktionen.*

Bestimmte Integrale können additiv zerlegt werden. Man stelle sich dazu eine positive Funktion $f(t)$ vor, d.h., das Integral von a bis b ist die Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = b$. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unter dem Graphen von $t = a$ bis $t = c$ und der Fläche von $t = c$ bis $t = b$, wobei der Zerlegungspunkt c beliebig gewählt werden kann:

Satz 4.28: (Zerlegung bestimmter Integrale)

Für beliebiges a, b, c gilt:

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Konvention 4.29:

Wir setzen

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt,$$

womit wir in $\int_a^b f(t)\,dt$ nun auch $b < a$ zulassen können. Speziell gilt

$$\int_a^a f(t)\,dt = -\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

Mit dieser Konvention gilt Satz 4.28 auch für Zerlegungspunkte c, die außerhalb des Intervalls $[a, b]$ liegen.

Bemerkung 4.30: *In MuPAD ist die Funktion* `int` *sowohl für bestimmte als auch für unbestimmte Integrale zuständig:*

```
>> int(exp(-2*x), x)
                                  1
                            - ---------
                                      2
                              2 exp(x)

>> int(exp(-2*t), t = 0..5)
                                     1
                          1/2 - ---------
                                         2
                                 2 exp(5)

>> float(%)
                             0.4999773
```

Bemerkung 4.31: *Man beachte, daß das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ eine Funktion in x ist, während das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ für konkrete Zahlenwerte a, b einen Zahlenwert darstellt. Diesen kann man numerisch approximieren, indem man z.B. die in der Definition 4.26 gegebene Summe für großes n ausrechnet. Alternativ zur „Riemann-Summe“*

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\Big)$$

ist es günstiger, stattdessen die „Trapez-Summe“

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\Big) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

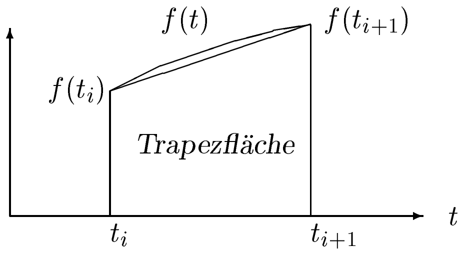
zu berechnen, die sich mit $t_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$ auch als

$$\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2}$$

schreiben läßt. Hierbei ist $\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2}$ die Fläche des durch die 4 Punkte

$$(t_i, 0), \quad (t_i, f(t_i)), \quad (t_{i+1}, f(t_{i+1})), \quad (t_{i+1}, 0)$$

definierten Trapezes (d.h., die Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ wird nicht durch Rechtecke, sondern durch Trapeze angenähert).



Bemerkung 4.32: *In MuPAD ist die Funktion* `numeric::int` *für die numerische Berechnung von bestimmten Integralen zuständig. Sie arbeitet auch dann, wenn der symbolische Integrator kein Ergebnis liefert (weil er keine Stammfunktion findet):* $\boxed{\downarrow 12.6.01}$

```
>> int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                      1/2       1/2
                 int(t     exp(t   ), t = 0..10)

>> numeric::int(exp(sqrt(t))*sqrt(t), t = 0..10)

                            264.1573027
```

4.3 Der Hauptsatz: Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

Es verbleibt das Problem, wie man effektiv bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\ dt$ ohne den garstigen Grenzwert von Riemann–Summen berechnen kann. Hier kommt die wesentliche Beobachtung ins Spiel, daß man mit unbestimmten Integralen (Stammfunktionen) bestimmte Integrale ausrechnen kann.

Satz 4.33: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 1)

Betrachte

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Für stetiges f ist F_a differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x),$$

d.h., $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

„Beweisidee“: Es gilt

$$\Delta F_a = F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \stackrel{(4.28)}{=} \int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Nähern wir auf dem (kleinen) Interval $[x, x+h]$ die Funktion durch den konstanten Wert $f(t) \approx f(x)$ an, so gilt

$$\Delta F_a = \int_x^{x+h} f(t)\ dt \approx \int_x^{x+h} f(x)\ dt = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n} \cdot f(x) \cdot n = \lim_{n\to\infty} h \cdot f(x) = h \cdot f(x).$$

Damit läßt sich die Ableitung von $F_a(x)$ berechnen:

$$\frac{d}{dx}F_a(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(x)}{h} = f(x).$$

□

Bemerkung 4.34: *Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt. Dies wird in der Darstellung einer Stammfunktion über* $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *dadurch deutlich, daß die untere Grenze* a *beliebig wählbar ist. Die Konstante ist hier durch die Bedingung* $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ *festgelegt. Bei unterschiedlicher Wahl der unteren Grenze ist die Differenz der entsprechenden Stammfunktionen in der Tat eine Konstante:*

$$F_{a_1}(x) - F_{a_2}(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt - \int_{a_2}^x f(t)\,dt$$

$$\stackrel{(4.28)}{=} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \int_{a_2}^x f(t)\,dt\right) - \int_{a_2}^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt.}_{\textit{unabhängig von } x}$$

Bestimmte Integrale sind also Stammfunktionen, wenn man sie als Funktion der oberen Grenze auffaßt. Umgekehrt, kennt man ein Stammfunktion, so liefert sie ein bestimmtes Integral, denn alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, d.h., es muss gelten

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Es verbleibt nur, die Integrationskonstante c zu identifizieren. Für $x = a$ folgt

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a),$$

also

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Dies liefert nun eine effektive Methode, bestimmte Integrale auszurechnen, indem man sich zunächst eine Stammfunktion des Integranden verschafft:

Satz 4.35: (Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Version 2)

Sei $F(x)$ *eine beliebige Stammfunktion von* $f(x)$*. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Die additive Konstante der Stammfunktion fällt dabei bei Differenzbildung heraus.

Beispiel 4.36: Zur Berechnung von $\int_1^2 \ln(t)\,dt$ berechnet man zunächst eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Analog zu Beispiel 4.11 ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c.$$

Mit der Stammfunktion $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$ ergibt sich das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \ln(t)\,dt = F(2) - F(1) = \Big(2 \cdot \ln(2) - 2 + c\Big) - \Big(1 \cdot \ln(1) - 1 + c\Big) = 2 \cdot \ln(2) - 1.$$

Bemerkung 4.37: *Aus dem Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral folgt sofort, daß die Rechenregeln aus Abschnitt 4.1 auch für bestimmte Integrale gelten, z.B. (Satz 4.7):*

$$\boxed{\int_a^b \Big(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\Big)dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt \;+\; c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt.}$$

Partielle Integration gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = [f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b} \;-\; \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt,}$$

wobei $[f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b}$ *als Abkürzung für*

$$[f(t) \cdot g(t)]_{t=a}^{t=b} = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

dient. Substitution gilt in der folgenden Form:

$$\boxed{\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.}$$

Beispiel 4.38: Partielle Integration:

$$\int_0^1 \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\,dt = [\underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\,dt$$

$$= [t \cdot \sin(t)]_{t=0}^{t=1} - [-\cos(t)]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 1 \cdot \sin(1) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(1) - \cos(0) = \sin(1) + \cos(1) - 1.$$

Beispiel 4.39: Substitution $y = t^2$, $dy = 2\,t\,dt$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\,\cos(t^2)\;dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos(t^2)\cdot\underbrace{2\,t\,dt}_{dy} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}\cos(y)\;dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\sin(y)]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2}\cdot\Big(\sin(\pi)-\sin(0)\Big) = 0.$$

Man beachte hierbei, wie sich im Substitutionsschritt die Grenzen ändern: Für $t = 0$ folgt $y = t^2 = 0$, für $t = \sqrt{\pi}$ folgt $y = t^2 = \pi$.

Beispiel 4.40: Sei $p(x)$ eine Nachfrage(Preis-Absatz)-Funktion einer Ware, $x =$ die nachgefragte Menge, $p =$ der Preis. Die Erlösfunktion ist $E(x) = p(x)\cdot x$. Sei $p_0 = p(x_0)$ der aktuelle Preis, für den die Ware angeboten wird, x_0 der aktuelle Absatz („Gleichgewicht").

Wie groß wäre der (fiktive) Gesamterlös E^*, wenn man erreichen könnte, daß jeder Konsument den für ihn gerade noch akzeptablen Preis zahlt[1]? (Hierbei werden nur die Konsumenten betrachtet, die mindestens p_0 zu zahlen bereit sind). Wir setzen $p(x)$ als monoton fallend voraus, damit entsprechen Preise $p \geq p_0$ einem Absatz $0 \leq x \leq x_0$. Der Bereich $[0, x_0]$ wird in n gleiche Teile aufgeteilt. Es würden jeweils $\frac{x_0}{n}$ Konsumenten den Preis $p(\frac{i}{n}\cdot x_0)$ zahlen. Insgesamt würde dies zum Gesamterlös

$$E^* \approx \frac{x_0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p\Big(\frac{i}{n}\cdot x_0\Big)$$

führen. Dies ist eine Riemann–Summe im Sinne von Definition 4.26. Im Grenzwert $n \to \infty$ liefert dies als Formel für den fiktiven Erlös

$$E^* = \int_0^{x_0} p(x)\,dx.$$

Der tatsächliche Erlös ist $E_0 = x_0\cdot p_0$. Man definiert

$$K_R(x_0) = E^* - E_0 = \int_0^{x_0} p(x)\;dx - x_0\cdot p_0 = \int_0^{x_0}(p(x)-p_0)\;dx$$

als die **Konsumentenrente** mit der folgenden Interpretation: Sie ist der Gesamtersparnis aller Konsumenten, die bereit gewesen wären, mehr als $p_0 = p(x_0)$ für die Ware auszugeben, aber aufgrund des aktuellen Marktpreises p_0 „billiger" an die Ware kommen. Für monoton fallendes $p(x)$ gilt $p(x) \geq p(x_0)$ für $x \leq x_0$, damit ist diese Rente

[1] Zum Beispiel kann man beim Einführen eines neuen Produktes den Markt „von oben abschöpfen" (das sehen wir momentan bei neuen PC-Generationen): Zunächst wird das neue Modell zu einem hohen Preis angeboten, bis diejenigen Käufer, die hohe Preise zu zahlen bereit sind, gesättigt sind. Danach fällt der Preis ein wenig, bis sich die nächste Käuferschicht eingedeckt hat. Usw.

positiv. Beispiel: die Nachfrage sei durch die Modellfunktion $p(x) = e^{-x}$ gegeben, der aktuelle Absatz sei $x_0 = 1$. Die Konsumentenrente ist

$$K_R(1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx - 1\cdot e^{-1} = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} - e^{-1}$$
$$= -e^{-1} + e^0 - e^{-1} = 1 - 2\cdot e^{-1} \approx 0.2642.$$

4.4 Uneigentliche Integrale

15.6.01↓

Bestimmte Integrale $\int_a^b f(t)\,dt$ sind zunächst nur für endliche Intervalle $[a,b]$ definiert. Wir erweitern die Definition:

Definition 4.41: (Uneigentliche Integrale)

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\,dt,$$
$$\int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)\,dt,$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\,dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 4.42:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}[-e^{-t}]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

Beispiel 4.43: Substitution $y = -\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}} = \frac{1}{2\cdot y}$, $dt = 2\cdot y\cdot dy$:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{-\infty} e^y\cdot 2\cdot y\,dy \overset{(4.29)}{=} -\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\,dy.$$

Man achte hierbei auf die Transformation der Grenzen: $t = 0$ entspricht $y = -\sqrt{t} = 0$, $t = \infty$ entspricht $y = -\sqrt{t} = -\infty$. Das verbleibende Integral war bereits in Beispiel 4.12 gelöst worden:

$$-\int_{-\infty}^0 e^y\cdot y\,dy = -\lim_{a\to-\infty}[(y-1)\cdot e^y]_{y=a}^{y=0}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\Big(-1-(a-1)\cdot e^a\Big) = 1 - \lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big).$$

Der verbleibende Grenzwert ist 0:

$$\lim_{a\to-\infty}\Big((1-a)\cdot e^a\Big) \overset{(b=-a)}{=} \lim_{b\to\infty}\Big((1+b)\cdot e^{-b}\Big) = \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{b+1}{e^b}\Big).$$

Da mit $e^b = 1 + b + \frac{b^2}{2} + \cdots$ die Exponentialfunktion für $b \to \infty$ stärker steigt als jedes Polynom, ist der Grenzwert 0. Endergebnis:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,dt = 1.$$

Man geht ähnlich vor, wenn der Integrand eine Singularität hat:

Definition 4.44: (Uneigentliche Integrale bei singulären Integranden)

Hat der Integrand $f(t)$ an der Stelle a oder b eine Singularität, so definiert man

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_a^{b-\epsilon} f(t)\,dt,$$

bzw.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(t)\,dt$$

(falls die Grenzwerte existieren).

Beispiel 4.45: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_\epsilon^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\Big[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big]_{t=\epsilon}^{t=1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to0+0}[2\cdot\sqrt{t}]_{t=\epsilon}^{t=1} = 2\cdot\lim_{\epsilon\to0+0}\Big(1-\sqrt{\epsilon}\Big) = 2.$$

Beispiel 4.46: Im folgenden Fall existiert das uneigentliche Integral nicht (bzw. ist ∞):

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\epsilon\to0+0}[\ln(t)]_{t=\epsilon}^{t=1} = \lim_{\epsilon\to0+0}\Big(0-\ln(\epsilon)\Big) = \infty.$$

Kapitel 5

Differentialrechnung in mehreren Variablen

↓19.6.01

Es geht nun um die Differentialrechnung von Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots)$, die von mehr als nur einer Variablen abhängen.

5.1 Partielle Ableitungen

Definition 5.1: (Partielle Ableitungen)
Zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definiert man die **"partielle Ableitung"** *nach der Variable x_i als*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Die Funktion heißt an der Stelle $\vec{x}$ **„partiell differenzierbar"**, *wenn dieser Grenzwert existiert.*

Diese Definition besagt lediglich:

> Für die partielle Ableitung nach x_i halte alle anderen Variablen fest und fasse f als Funktion einer einzigen Variablen x_i auf. Dann differenziere wie üblich nach dieser Variablen.

Beispiel 5.2: Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + e^{x_1 \cdot x_2^3}$. Man berechnet sofort mit den Ableitungsregeln aus Kapitel 2:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + x_2^3 \cdot e^{x_1 \cdot x_2^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \cdot e^{x_1 \cdot x_2^3}.$$

Ein weiteres Beispiel: $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^3, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3 \cdot x^2 \cdot y^2.$$

Beispiel 5.3: Da eine partielle Ableitung nichts anderes ist als eine „gewöhnliche" Ableitung, in der alle nicht beteiligten Variablen als konstante Parameter aufgefaßt werden, ist die schon bekannte MuPAD-Funktion `diff` auch für die Berechnung partieller Ableitungen zuständig:

```
>> f:= (x, y) -> x^2*y^3
>> diff(f(x, y), x)
                                      3
                                 2 x y

>> diff(f(x, y), y)
                                    2  2
                                 3 x  y
```

Analog zum 1-dimensionalen Fall approximiert die partielle Ableitung nach x_i die Änderung von f, wenn sich x_i um eine Einheit ändert, wobei aber alle anderen Variablen festgehalten werden. Ändern sich alle Variablen, so gilt:

Interpretation der partiellen Ableitungen 5.4:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \\ &\approx \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \end{aligned}}$$

Beispiel 5.5: Betrachte $f(x,y) = x \cdot y^2$. Ändert sich x von 1 auf 1.01 und y von 1 auf 1.02, so ändert sich f um

$$\Delta f = f(1.01, 1.02) - f(1,1) = 0.050804.$$

Dies wird an der Stelle $x = 1$, $y = 1$ approximiert durch

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y = \underbrace{y^2}_{1} \cdot \Delta x + \underbrace{2 \cdot x \cdot y}_{2} \cdot \Delta y$$

$$= \Delta x + 2 \cdot \Delta y = 0.01 + 2 \cdot 0.02 = 0.05.$$

Das Konzept der Ableitungsfunktion sieht für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ folgendermaßen aus:

Definition 5.6: (Die Ableitungsmatrix)

Betrachte eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$:

$$\vec{f}(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\vec{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Die **„Ableitung von f an der Stelle $\vec{x}$"** *ist die $m \times n$ Matrix*

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Sie heißt **„Ableitungsmatrix"** *oder auch* **„Jacobi–Matrix"**.

Beispiel 5.7: Sei

$$\vec{f}(\underbrace{x, y}_{\vec{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x \cdot y \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungsmatrix an einer Stelle $\vec{x} = (x, y)$ ist

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Definition 5.8: (Der Gradient)

Für den Spezialfall $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt der (Zeilen-)Vektor der partiellen Ableitungen auch **„Gradient"**:

$$\text{grad } f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) = \Big(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\Big).$$

Da bei partiellen Ableitungen nur nach einer Variablen differenziert wird, können wir ohne Probleme komponentenweise mit den Regeln aus Kapitel 2 rechnen. Z.B. gilt für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f(\vec{x}) + g(\vec{x})\Big) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad \text{(Summenregel)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})\Big) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i} \quad \text{(Produktregel)}$$

etc. Lediglich die Kettenregel verdient eine besondere Anmerkung:

Satz 5.9: (Die Kettenregel im mehrdimensionalen Fall)

Sei $\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, sei $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$. Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$. Betrachte die durch $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$ definierte Verknüpfung $\vec{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$. Die Ableitungsmatrix von $\vec{h}$ am Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die $p \times n$ Matrix

$$\vec{h}'(\vec{x}) = \underbrace{\vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))}_{p\times m} \cdot \underbrace{\vec{g}'(\vec{x})}_{m\times n}.$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{y})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{y})}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p(\vec{y})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p(\vec{y})}{\partial y_m} \end{pmatrix}}_{\text{„äußere Ableitung“}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{„innere Ableitung“}}.$$

Beispiel 5.10: Betrachte $f(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$. Seien y_1, y_2 Funktionen von x:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderschaltung $h(x) = f(\vec{y}) = f(\vec{g}(x)) = x^2 \cdot x^3 = x^5$ ist eine Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ mit der Ableitung $h'(x) = 5 \cdot x^4$. Über die Kettenregel ergibt sich dasselbe Resultat:

$$h'(x) = \underbrace{f'(\vec{g}(x))}_{1\times 2} \cdot \underbrace{\vec{g}'(x)}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} y_2 \;,\; y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^3 \;,\; x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \end{pmatrix} = x^3 \cdot 2 \cdot x + x^2 \cdot 3 \cdot x^2 = 5 \cdot x^4.$$

Beispiel 5.11: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit der Eigenschaft

$$f(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, \dots, x_n) \qquad (\#)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **„homogen vom Grad** r**“**. Beispiel: $f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot y$ ist homogen vom Grad 3, denn

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x)^3 + (\lambda \cdot x)^2 \cdot (\lambda \cdot y) = \lambda^3 \cdot (x^3 + x^2 \cdot y) = \lambda^3 \cdot f(x, y).$$

$\boxed{19.6.01\downarrow}$ Wir differenzieren die linke Seite von (#) nach λ: Dazu fixieren wir $x_1, \dots, x_n$ und betrachten

$$\vec{g}(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_n(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$h(\lambda) = f(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = f(\vec{g}(\lambda)).$$

Über die Kettenregel folgt

$$h'(\lambda) = f'(g(\lambda)) \cdot g'(\lambda) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{g}(\lambda))\Big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda))\Big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)) + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)).$$

Andererseits ist $h'(\lambda)$ durch Differenzieren der rechten Seite von (#) nach λ auch gleich

$$h'(\lambda) = r \cdot \lambda^{r-1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n).$$

Es folgt die Gleichung

$$h'(\lambda) = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)) + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)) = r \cdot \lambda^{r-1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n).$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich die hieraus die allgemeine Identität

$$\boxed{x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = r \cdot f(x_1, \ldots, x_n)}$$

für homogene Funktionen vom Grad r. Man nennt dies die **„Eulersche Homogenitätsrelation“**.

Beispiel: für $f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot y$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cdot (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y) + y \cdot x^2 \\ &= 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y = 3 \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Definition 5.12: (Höhere partielle Ableitungen)

Da für $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ selbst wieder Funktionen von $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sind, kann man sie erneut partiell ableiten. Es ergeben sich **„zweite partielle Ableitungen“**, *die folgendermaßen geschrieben werden:*

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right).$$

Für $i = j$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2}.$$

Höhere partielle Ableitungen werden analog definiert.

Beispiel 5.13: Betrachte $f(x,y) = \sin(x) \cdot y^3$. Man berechnet folgende erste partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) \cdot y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) \cdot 3 \cdot y^2.$$

Hieraus folgen die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{rclrcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & -\sin(x) \cdot y^3, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = & \cos(x) \cdot 3 \cdot y^2, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = & \cos(x) \cdot 3 \cdot y^2, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \sin(x) \cdot 6 \cdot y. \end{array}$$

Man beobachtet: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Dies ist kein Zufall, sondern ein allgemeines Gesetz!

In MuPAD:

```
>> f:= (x, y) -> sin(x)*y^3:
>> diff(f(x, y), x, x)
                                3
                             - y  sin(x)
>> diff(f(x, y), x, y)
                                2
                             3 y  cos(x)
>> diff(f(x, y), y, x)
                                2
                             3 y  cos(x)
>> diff(f(x, y), y, y)
                             6 y sin(x)
```

$\boxed{26.6.01\downarrow}$

Satz 5.14: (Partielle Ableitungen sind symmetrisch)

Sind die (höheren) partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ stetige Funktionen, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Zweite partielle Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ lassen sich in einer Matrix zusammenfassen.

Definition 5.15: (Die Hesse–Matrix)

Für $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ nennt man die $n \times n$ Matrix $H(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ der zweiten partiellen Ableitungen die **„Hesse–Matrix“** *von f am Punkt $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:*

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

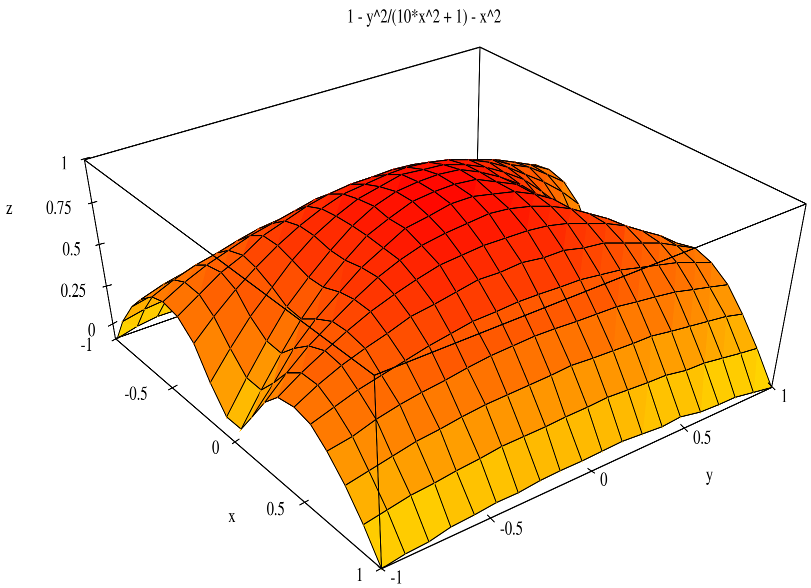
Wegen Satz 5.14 ist diese Matrix symmetrisch.

5.2 Extrema

Gesucht sind die (lokalen) Extrema einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$.

Beispiel 5.16: Mit `plotfunc3d` können in MuPAD die Graphen von Funktionen zweier Variabler gezeichnet werden. Die folgende Funktion $f(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+10 \cdot x^2}$ hat ein lokales Maximum, das graphisch in der Nähe des Ursprungs $x = 0, y = 0$ zu liegen scheint:

```
>> f:= (x, y) -> 1 - x^2 - y^2/(1 + 10*x^2):
>> plotfunc3d(f(x, y), x = -1..1, y = -1..1)
```



Eine genauere Berechnung des Maximums wird in Beispiel 5.18 erfolgen.

Betrachten wir die Situation, daß $\vec{x}^*$ ein lokales Maximum von $f(x_1, x_2, \ldots)$ ist. Ändern wir am Punkt $\vec{x}^*$ startend die Variable x_1 und halten alle anderen Variablen dabei fest, so betrachten wir f als Funktion nur einer Variablen x_1. Liegt am Punkt $\vec{x}^*$ ein Maximum vor, so verkleinern sich die Funktionswerte, wenn x_1 variiert. Damit hat auch f als Funktion von x_1 (mit konstantem $x_2, x_3, \ldots$) ein Maximum, d.h., die Ableitung nach x_1 muß verschwinden. Für konstantes $x_2, x_3, \ldots$ ist die x_1-Ableitung aber die partielle Ableitung nach x_1, die an einem Maximum also verschwinden muß. Dieselbe Überlegung gilt für alle anderen Variablen auch:

Satz 5.17: (An Extremstellen verschwindet der Gradient)

Hat eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ an einem Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so verschwinden dort alle partiellen Ableitungen:

$$f'(\vec{x}^*) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^*), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^*)\Big) = \Big(0, \ldots, 0\Big).$$

Dieser Satz liefert eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:

Um Extrema zu suchen, braucht man nur diejenigen Punkte zu betrachten, an denen der Gradient der Funktion verschwindet. Bei n Variablen liefern die n Komponenten des Gradienten n Gleichungen für die n gesuchten Variablenwerte.

Beispiel 5.18: Betrachte die Funktion $f(x,y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+10\cdot x^2}$ aus Beispiel 5.16, die graphisch in der Nähe des Ursprungs ein lokales Maximum hat. Um den Punkt genau zu bestimmen, berechnen wir den Gradienten und setzen alle Komponenten 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\cdot x + \frac{y^2\cdot 20\cdot x}{(1+10\cdot x^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2\cdot y}{1+10\cdot x^2} = 0.$$

Dies liefert zwei Gleichungen für die Komponenten x, y potentieller Extrema. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $y = 0$ und damit aus der ersten Gleichung dann zwingend $x = 0$. Also kann nur der Ursprung $x = 0, y = 0$ ein lokales Extremum von f sein. Daß es sich dabei um ein Maximum handelt, haben wir in Beispiel 5.16 graphisch überprüft.

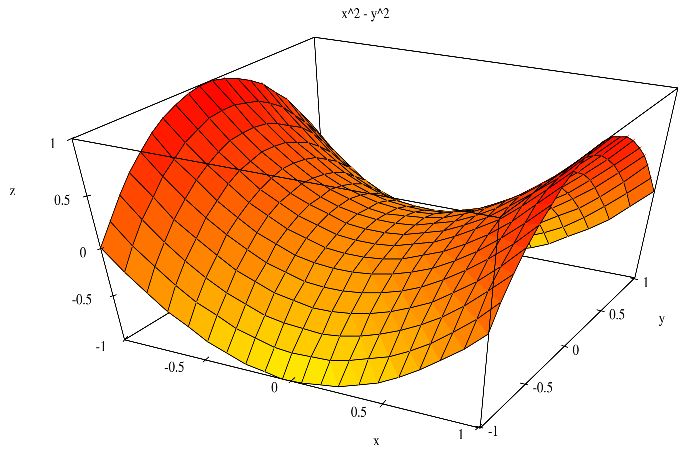
Die durch Lösung der Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ gefundenen Punkte sind nur Kandidaten für Extrema. Es kann sich statt um Extrema auch um sogenannte Sattelpunkte handeln:

Beispiel 5.19: Für die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ gilt am Ursprung $x = 0, y = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Dort liegt jedoch kein Extremum vor:

```
>> plotfunc3d(x^2 - y^2, x = -1..1, y = -1..1)
```



Damit stellt sich wiederum die Frage nach hinreichenden Kriterien für Extrema. In Analogie zu Satz 2.27 kann mittels zweiter (partieller) Ableitungen entschieden werden, ob an Stellen, wo der Gradient verschwindet, in der Tat ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Zunächst der Spezialfall einer Funktion mit zwei Variablen:

Satz 5.20: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

An der Stelle $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ verschwinde der Gradient von $f(x,y)$. Falls für die Determinante der Hesse–Matrix

$$det(H(\vec{x}^*)) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*)\right)^2 > 0$$

gilt, ist $\vec{x}^*$ ein Extremum. Gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) > 0$, so handelt es sich um ein Minimum, bei $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) < 0$ um ein Maximum.

Gilt $det(H(\vec{x}^*)) < 0$, so ist $\vec{x}^*$ ein Sattelpunkt.

Beispiel 5.21: Für die Funktion $f(x,y) = x^2 + x \cdot y^3 + y^2$ verschwindet der Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x + y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot y$$

am Nullpunkt. Die Hesse–Matrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot y^2 \\ 3 \cdot y^2 & 6 \cdot x \cdot y + 2 \end{pmatrix}$$

nimmt dort den Wert

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an. Mit $\det(H(0,0)) = 4 > 0$ ist der Nullpunkt damit ein Extremum. Wegen $H(0,0)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

Definition 5.22: (Positiv/negativ definite Matrizen)

Eine symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (A_{ij}) = (A_{ji})$ heißt **„positiv definit"**, *wenn die folgenden n Determinantenbedingungen erfüllt sind:*

$$A_{11} > 0, \quad det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad det \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} > 0.$$

Die Matrix A heißt **„negativ definit"**, *wenn die negative Matrix $-A$ positiv definit ist.*

Beispiel 5.23: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, denn $A_{11} = 1 > 0$ und $\det(A) = 5 - 4 = 1 > 0$.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ist nicht positiv definit: zwar gilt $\det(A) = 5 - 4 = 1 > 0$, aber $A_{11} = -1 < 0$. Sie ist jedoch negativ definit, denn

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist mit $(-A)_{11} = 1 > 0$ und $\det(-A) = 5 - 4 = 1 > 0$ positiv definit.

Im allgemeinen Fall von Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ liefert die Definitheit der Hesse–Matrix ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema. Satz 5.20 ist der Spezialfall $n = 2$ des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 5.24: (Hinreichende Kriterien für Extrema, der allgemeine Fall)

An der Stelle $\vec{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ verschwinde der Gradient von $f(x_1, \ldots x_n)$. Ist die Hesse–Matrix $H(\vec{x}^*) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^*)\right)$ dort positiv definit, so ist $\vec{x}^*$ ein lokales Minimum. Ist $H(\vec{x}^*)$ negativ definit, so ist $\vec{x}^*$ ein lokales Maximum.

Beispiel 5.25: Betrachte $f(x, y, z) = e^{-x^2+2\cdot x-y^2} - \frac{z^2}{2}$. Die potentiellen Extrema sind alle Lösungen der Gleichungen $\boxed{\downarrow 29.6.01}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot y \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar als einzige Lösung $x = 1, y = 0, z = 0$ (die Exponentialfunktion kann niemals 0 werden). Damit ist $\vec{x}^* = (1, 0, 0)$ der einzige Kandidat für ein Extremum. Die Hesse–Matrix an diesem Punkt ist

$$H(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}^*) \end{pmatrix}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} (4 \cdot (1 - x)^2 - 2) \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} & -4 \cdot (1 - x) \cdot y \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} & 0 \\ -4 \cdot (1 - x) \cdot y \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} & (4 \cdot y^2 - 2) \cdot e^{-x^2+2\cdot x-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=1 \\ y=0 \\ z=0}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot e & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot e & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit, denn

$$-H(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ist nach den Kriterien der Definition 5.22 positiv definit. Damit ist der Nullpunkt ein lokales Maximum.

Beispiel 5.26: In MuPAD berechnen die Funktion `linalg::grad` und `linalg::hessian` den Gradienten bzw. die Hesse–Matrix einer Funktion:

```
>> f:= exp(-x^2 + 2*x - y^2) - z^2/2:
>> linalg::grad(f, [x, y, z])

             +-                              -+
             |                        2    2  |
             |  (- 2 x + 2) exp(2 x - x  - y ) |
             |                                |
             |                     2    2     |
             |     - 2 y exp(2 x - x  - y )   |
             |                                |
             |               -z               |
             +-                              -+
```

Zur Vereinfachung der Hesse–Matrix wird mit der Funktion `map` die Funktion `factor` auf alle Matrixkomponenten geschickt:

```
>> H:= linalg::hessian(f, [x, y, z]):
>> H:= map(H, factor)

      array(1..3, 1..3,
                                  2                  2    2
        (1, 1) = 2 (- 4 x + 2 x  + 1) exp(2 x - x  - y ),
                                           2    2
        (1, 2) = 4 y (x - 1) exp(2 x - x  - y ),
        (1, 3) = 0,
                                           2    2
        (2, 1) = 4 y (x - 1) exp(2 x - x  - y ),
                         2                  2    2
        (2, 2) = 2 (2 y  - 1) exp(2 x - x  - y ),
        (2, 3) = 0,
        (3, 1) = 0,
        (3, 2) = 0,
        (3, 3) = -1
      )
```

Der Punkt $x = 1, y = 0, z = 0$ wird eingesetzt:

```
>> H:= subs(H, [x = 1, y = 0, z = 0])

                +-                            -+
                |  -2 exp(1),      0,       0  |
                |                              |
                |      0,     -2 exp(1),  0    |
                |                              |
                |      0,          0,     -1   |
                +-                            -+
```

Die Funktion `linalg::isPosDef` überprüft, ob eine Matrix positiv definit ist:

```
>> linalg::isPosDef(-H)

                                    TRUE
```

5.3 Extrema unter Nebenbedingungen

Wie berechnet man Extrema einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$, wenn die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ eine zusätzliche Gleichung $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ zu erfüllen haben?

Beispiel 5.27: Betrachte eine zylindrische Dose mit Radius r und Höhe h. Die Grundfläche ist $\pi \cdot r^2$, der Umfang ist $2 \cdot \pi \cdot r$. Das Volumen ist

$$\text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Die Gesamtoberfläche ist

$$2 \times \text{Grundfläche} + \text{Umfang} \times \text{Höhe} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h.$$

Für eine Dose mit vorgegebenem Volumen V sollen r und h so gewählt werden, daß die Oberfläche minimal wird. Also: finde das Minimum der Oberfläche

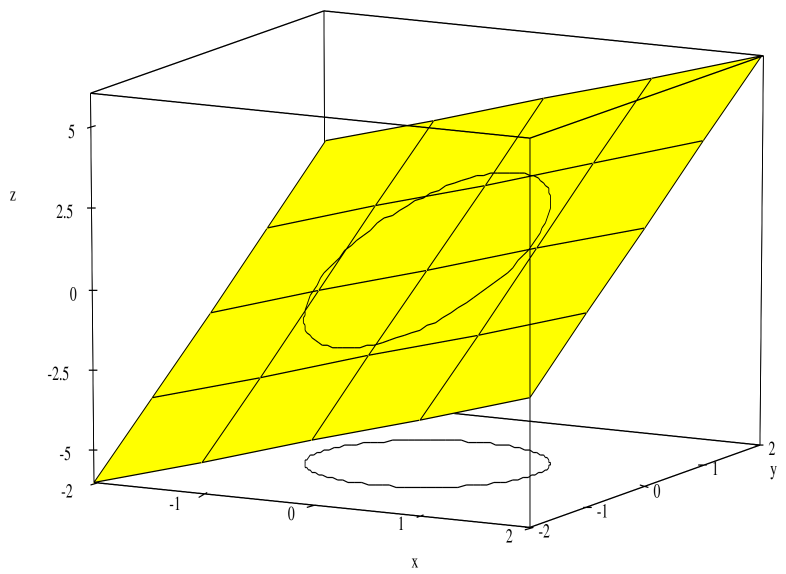
$$f(r, h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

unter der Nebenbedingung, daß das Volumen $\pi \cdot r^2 \cdot h = V$ vorgegeben ist, d.h.,

$$g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - V = 0.$$

Beispiel 5.28: Die Funktion $f(x, y) = x + 2 \cdot y$ hat auf dem $\mathbb{R}^2$ als lineare Funktion sicherlich keine lokalen Extrema. Schränkt man aber (x, y) auf den Einheitskreis ein, d.h., fordert man $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, so existiert ein Maximum und ein Minimum für f. Im folgenden Bild wird die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ als Kreis unten angedeutet, zusätzlich sind die entsprechende Funktionswerte von f über dem Einheitskreis als Ellipse auf der Ebene (dem Graphen von f) angedeutet:

```
plot(plot::Function3d(x + 2*y, x = -2 .. 2, y=-2 .. 2,
                      Grid = [5, 5], Color = RGB::Yellow),
     plot::Curve3d([cos(u), sin(u), 0.3 + cos(u) +2*sin(u)],
                   u = 0 .. 2*PI, Color = RGB::Black),
     plot::Curve3d([cos(u), sin(u), -6],
                   u = 0 .. 2*PI, Color = RGB::Black)
    )
```



3.7.01↓ **Satz 5.29:** (Die Lagrangesche Multiplikatoren-Methode)

Seien $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n)$ differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Für einen Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, der $g(\vec{x}^*) = 0$ erfüllt und f maximiert oder minimiert, sind die Gradienten von f und g parallele Vektoren. D.h., es gibt einen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ sodaß

$$f'(\vec{x}^*) = \lambda \cdot g'(\vec{x}^*).$$

Die n Komponenten dieser Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

zusammen mit der Nebenbedingung $g(\vec{x}^*) = 0$ bilden $n+1$ Gleichungen für die n Komponenten von $\vec{x}^*$ und λ.

Der Wert λ heißt **„Lagrange–Multiplikator“**.

Beispiel 5.30: Betrachte das Dosenproblem aus Beispiel 5.27: finde das Minimum von

$$f(r, h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - V = 0.$$

Satz 5.29 besagt, daß für das Minimum gelten muß:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot h &= \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h, \\
\frac{\partial f}{\partial h} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \pi \cdot r &= \lambda \cdot \pi \cdot r^2.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung ergeben sich die 3 Gleichungen

$$2 \cdot r + h = \lambda \cdot r \cdot h, \quad 2 = \lambda \cdot r, \quad r^2 \cdot h = \frac{V}{\pi}$$

für die 3 Unbekannten r, h und λ (der Wert von λ interessiert nicht wirklich). Aus der zweiten Gleichung wird $\lambda \cdot r = 2$ in die erste Gleichung eingesetzt, es folgt:

$$2 \cdot r + h = 2 \cdot h, \quad \text{also } 2 \cdot r = h.$$

Die Nebenbedingung liefert damit

$$r^2 \cdot h = 2 \cdot r^3 = \frac{h^3}{4} = \frac{V}{\pi}.$$

Damit ergibt sich die Geometrie der Dose zu

$$h = 2 \cdot r = \Big(\frac{4 \cdot V}{\pi}\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Anmerkung: in diesem Beispiel ist die Nebenbedingung $g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - V = 0$ so einfach, daß man sie direkt nach einer der Variablen auflösen kann: $h = h(r) = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$. Diesen Wert kann man in die zu minimierende Funktion stecken, damit wird $f(r, h)$ zu einer Funktion einer einzigen Variable r, die wir k nennen:

$$k(r) = f(r, h(r)) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{V}{r}.$$

Da mit $h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$ die Nebenbedingung identisch erfüllt ist, braucht man sich gar nicht mehr darum zu kümmern, und man kann direkt nach dem Minimum der Funktion $k(r)$ suchen:

$$k'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 2 \cdot \frac{V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \pi \cdot r^3 = 2 \cdot V$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(\frac{V}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{V}{\pi \cdot (\frac{V}{2 \cdot \pi})^{\frac{2}{3}}} = \Big(\frac{4 \cdot V}{\pi}\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Beispiel 5.31: Betrachte das Extremwertproblem für $f(x, y) = x + 2 \cdot y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ aus Beispiel 5.28. Satz 5.29 besagt, daß für die Extremstellen gelten muß:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 1 &= \lambda \cdot 2 \cdot x, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 2 &= \lambda \cdot 2 \cdot y.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung ergeben sich die 3 Gleichungen

$$1 = \lambda \cdot 2 \cdot x, \quad 2 = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad x^2 + y^2 = 1$$

für die 3 Unbekannten x, y und λ (der Wert von λ interessiert nicht wirklich). Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $y = 2 \cdot x$. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, folgt

$$x^2 + 4 \cdot x^2 = 5 \cdot x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2 \cdot x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Der Graphik in Beispiel 5.28 entsprechend ist $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ein Maximum und $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ ein Minimum.

Ein weiteres Beispiel 5.34 findet sich im folgenden Abschnitt 5.4.

Bemerkung 5.32: *Man kann die Extremwerte eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ auch dann mittels Lagrangescher Multiplikatoren bestimmen, wenn mehrere Nebenbedingungen*

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

(mit $m < n$) vorgegeben sind. Dann sind die n Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

zu lösen. Dies sind zusammen mit den m Nebenbedingungen insgesamt $n + m$ Gleichungen für die n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und die m Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

5.4 Anwendungen in der Ökonomie

Beispiel 5.33: Ein Unternehmen produziert n verschiedene Güter mit den Ausstoßmengen $x_1, \ldots, x_n$ (Einheiten pro Zeit). Es sei eine Kostenfunktion $K(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben. Die Güter kommen zum Preis $p_1, \ldots, p_n$ auf den Markt. Wie operiert das Unternehmen gewinnmaximal, d.h., wie sind die Ausstoßmengen $x_1, \ldots, x_n$ zu wählen, damit der Gewinn

$$G(x_1, \ldots, x_n) = p_1 \cdot x_1 + \cdots + p_n \cdot x_n - K(x_1, \ldots, x_n)$$

maximal wird? Nach Satz 5.17 muß für das Gewinnmaximum der Gradient von G verschwinden, also muß gelten:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \cdots \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = p_n - \frac{\partial K}{\partial x_n} = 0.$$

Ergebnis: die gewinnoptimalen Ausstoßmengen sind die Lösungen des folgenden (i.A. nichtlinearen) Gleichungssytems für $x_1, \ldots, x_n$:

$$\boxed{p_1 = \frac{\partial K}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad \cdots \quad , \quad p_n = \frac{\partial K}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n).}$$

Hierbei wurde ein polypolistischer Anbieter voraussgesetzt: die Marktpreise p_i sind als unabhängig von der Produktion des Unternehmens angenommen. Hat man die Kostenfunktion $K(x_1, \ldots, x_n)$ durch eine konkrete Modellfunktion vorgegeben, kann man daran gehen, durch Lösen der obigen Gleichungen den Gewinn zu maximieren.

Beispiel 5.34: Ein monopolistisches Unternehmen kann mit seinen vorhandenen Produktionsanlagen zwei Produkte herstellen. Die vorhandenen Anlagen sind geeignet, insgesamt X Einheiten pro Zeit zu produzieren, wobei die Maschinen jeweils das erste oder das zweite Produkt herstellen können. Mit den Ausstoßmengen x_1, x_2 (Einheiten pro Zeit) gilt damit die Nebenbedingung $x_1 + x_2 = X$. Die Nachfragefunktionen seien

$$x_1(p_1) = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1}, \quad x_2(p_2) = 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2},$$

wobei p_1, p_2 die Marktpreise der Produkte seien. Zu welchem Preis sollten die Produkte angeboten werden, um den Gesamterlös $E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$ zu maximieren?

Erster Lösungsweg: Wir entscheiden uns, alle Größen als Funktion von p_1 und p_2 zu betrachten. Es gilt

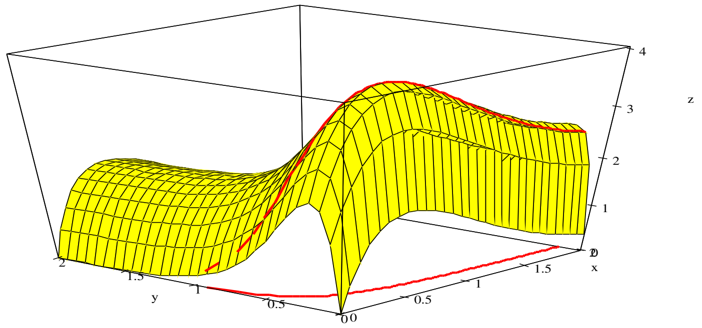
$$E(p_1, p_2) = p_1 \cdot x_1(p_1) + p_2 \cdot x_2(p_2) = p_1 \cdot 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + p_2 \cdot 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2}$$

zu maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(p_1, p_2) = x_1(p_1) + x_2(p_2) - X = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 20 \cdot e^{-5 \cdot p_2} - X = 0.$$

In der folgenden Graphik ist der Graph der Erlösfunktion zusammen mit der Kurve eingezeichnet, die die Menge aller Punkte (p_1, p_2) darstellt, welche die Nebenbedingung $g(p_1, p_2) = 0$ (mit $X = 10$) löst. Man erkennt deutlich, daß die Erlösfunktion über dieser Kurve ein Maximum annimmt:

```
>> x1:= p1 -> 10*exp(-2*p1):
>> x2:= p2 -> 30*exp(-5*p2):
>> Erloes:= (p1, p2) -> p1*x1(p1) + p2*x2(p2):
>> plot(plot::Function3d(Erloes(p1, p2), p1 = 0 .. 2, p2 = 0 .. 2,
                     Color = RGB::Yellow, Grid = [30, 30]),
        plot::Curve3d([p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5), 0],
                   p1 = 0.01 .. 2, Color = RGB::Red,  LineWidth = 30),
        plot::Curve3d([p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5),
                    Erloes(p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5)) ],
                   p1 = 0.01 .. 2, Color = RGB::Red,  LineWidth = 30)
   ):
```



6.7.01↓

Über die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial p_1} \quad \Rightarrow \quad (10 - 20 \cdot p_1) \cdot e^{-2 \cdot p_1} = \lambda \cdot (-20 \cdot e^{-2 \cdot p_1}),$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial p_2} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial p_2} \quad \Rightarrow \quad (30 - 150 \cdot p_2) \cdot e^{-5 \cdot p_2} = \lambda \cdot (-150 \cdot e^{-5 \cdot p_2})$$

zusammen mit der Nebenbedingung zu lösen, also (nach Vereinfachung der einzelnen Gleichungen):

$$1 - 2 \cdot p_1 = -2 \cdot \lambda, \quad 1 - 5 \cdot p_2 = -5 \cdot \lambda, \quad 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2} = X.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen kann man λ eliminieren:

$$5 \cdot (1 - 2 \cdot p_1) = -10 \cdot \lambda = 2 \cdot (1 - 5 \cdot p_2) \quad \Rightarrow \quad 5 - 10 \cdot p_1 = 2 - 10 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 - \frac{3}{10}.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, erhält man eine Gleichung für p_1:

$$10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 30 \cdot e^{-5 \cdot (p_1 - \frac{3}{10})} = X.$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich nicht für beliebiges X durch eine explizite Formel darstellen: man ist drauf angewiesen, für zahlenmäßig gegebenes X diese Gleichung numerisch zu lösen. Sei z.B. $X = 10$:

```
>> numeric::solve(10*exp(-2*p1) + 30*exp(-5*(p1 - 3/10)) = 10, p1)

                                {0.5926751426}

>> p1:= %[1]:
>> p2:= p1 - 3/10
                                 0.2926751426

>> x1(p1), x2(p2), x1(p1) + x2(p2)
```

```
                    3.056390999, 6.943609002, 10.0

>> MaxErloes = p1*x1(p1) + p2*x2(p2)

                              MaxErloes = 3.843668726
```

Zweiter Lösungsweg: Wir entscheiden uns, alle Größen als Funktion von x_1 und x_2 zu betrachten. Dazu sind zunächst die Preis-Nachfrage-Beziehungen $x_i(p_i)$ in $p_i(x_i)$ umzuformulieren:

$$x_1 = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} \;\Rightarrow\; \frac{x_1}{10} = e^{-2 \cdot p_1} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) = -2 \cdot p_1 \;\Rightarrow\; p_1 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right),$$

$$x_2 = 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2} \;\Rightarrow\; \frac{x_2}{30} = e^{-5 \cdot p_2} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) = -5 \cdot p_2 \;\Rightarrow\; p_2 = -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right).$$

Damit ist

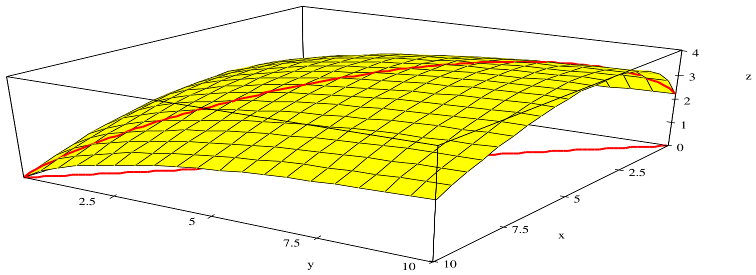
$$E(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot x_1 + p_2(x_2) \cdot x_2 = -\frac{x_1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) - \frac{x_2}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right)$$

zu maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - X = 0.$$

In der folgenden Graphik ist der Graph der Erlösfunktion zusammen mit der Kurve eingezeichnet, die die Menge aller Punkte (x_1, x_2) darstellt, welche die Nebenbedingung $x_1 + x_2 = X$ mit $X = 10$ löst. Man erkennt deutlich, daß die Erlösfunktion über dieser Geraden ein Maximum annimmt:

```
>> plot(plot::Function3d(Erloes(x1, x2), x1 = 0.01 .. 9.99, x2 = 0.01 .. 9.99,
                         Color = RGB::Yellow),
        plot::Curve3d([x, 10 - x, 0], x = 0.01 .. 9.99,
                      Color = RGB::Red,  LineWidth = 30),
        plot::Curve3d([x, 10 - x, Erloes(x, 10-x) + 0.01], x = 0.01 .. 9.99,
                      Color = RGB::Red, LineWidth = 30)
   ):
```



Über die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) - \frac{1}{2} = \lambda \cdot 1,$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) - \frac{1}{5} = \lambda \cdot 1,$$

zusammen mit der Nebenbedingung zu lösen, also (nach Vereinfachung der einzelnen Gleichungen):

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) = \lambda, \quad -\frac{1}{5} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right) = \lambda, \quad x_1 + x_2 = X. \qquad (\#\#)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen kann man λ eliminieren:

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) = -\frac{1}{5} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right) \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) = 2 \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + \frac{3}{2} = \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{5}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + \frac{3}{2}} = \frac{x_2}{30}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{x_1}{10}\right)^{5/2}\right)} = \frac{x_2}{30} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{x_1}{10}\right)^{5/2} = \frac{x_2}{30}.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung verbleiben die beiden Gleichungen

$$x_2 = 30 \cdot e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x_1^{5/2}}{10^{5/2}}, \quad x_1 + x_2 = X$$

für x_1, x_2. Setzt man wiederum x_2 als Funktion von x_1 in die zweite Gleichung ein, verbleibt eine einzelne Gleichung für x_1, die (für gegebenes X) numerisch zu lösen ist. Wir brechen diese Berechnung 'per Hand' hier ab (die letzte verbleibende Gleichung wäre ja sowieso nur numerisch zu lösen) und stecken gleich die 3 Gleichungen (##) für x_1, x_2, λ in MuPADs numerischen Gleichungslöser (wobei wiederum $X = 10$ gewählt wird):

```
>> numeric::solve([-1/2*(ln(x1/10) + 1) = lambda,
                   -1/5*(ln(x2/30) + 1) = lambda,
                   x1 + x2 = 10], [x1, x2, lambda])

   {[x1 = 3.056390999, x2 = 6.943609002, lambda = 0.09267514266]}

>> assign(%[1]):
>> p1(x1), p2(x2)

                  0.5926751427, 0.2926751427

>> MaxErloes = Erloes(x1, x2)

                   MaxErloes = 3.843668726
```

Natürlich kommt dasselbe Ergebnis heraus wie beim ersten Lösungsweg.

Kapitel 6

Differentialgleichungen erster Ordnung

↓10.7.01

Beispiel 6.1: Durch Verzinsung wächst ein Kapital $K(x)$ im Laufe der Zeit x. Der Zuwachs ΔK zum Zeitpunkt x im (kleinen) Zeitraum Δx ist proportional zum aktuellen Kapitalwert $K(x)$ und zur Zeitspanne Δx:

$$\Delta K = p \cdot K(x) \cdot \Delta x, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} = p \cdot K(x).$$

Hierbei ist p der Zinssatz (z.B. $p = 5\%/\text{Jahr}$, wenn die Zeit in Jahren gemessen wird). Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ (das ist das Konzept der stetigen Verzinsung, siehe Beispiel 1.19) ist das Kapitalwachstum also durch die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\, K(x) = p \cdot K(x)$$

charakterisiert.

Die obige Gleichung, die $K'(x)$ mit $K(x)$ verknüpft, nennt man eine **„Differentialgleichung"**. In diesem Kapitel geht es um die Frage, wie man aus solchen Differentialgleichungen die Funktion $K(x)$ bestimmen kann.

6.1 Definitionen

Definition 6.2: (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = f(x, y(x))$$

heißt (explizite) **„gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung"** *für die Funktion $y(x)$, kurz* **„DGL"**.

Beispiel 6.3: Einige Beispiele von DGLen für $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = x \cdot y^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}.$$

Auch

$$x \cdot y \, \frac{dy}{dx} = \sin(y),$$

ist eine DGL, wir werden sie aber immer in der nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelösten Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(y)}{x \cdot y}$$

betrachten. Als Kurzform schreibt man auch $y' = \dfrac{\sin(y)}{x \cdot y}$.

Beispiel 6.4: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot y$$

aus Beispiel 6.1 (K wurde in y umbenannt). Wir raten zunächst eine Lösung:

$$y(x) = c \cdot e^{p \cdot x},$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. In der Tat ist dies für jeden Wert von c eine Lösung der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, c \cdot e^{p \cdot x} = c \cdot \frac{d}{dx} e^{p \cdot x} = c \cdot p \cdot e^{p \cdot x} = p \cdot \underbrace{(c \cdot e^{p \cdot x})}_{y(x)} = p \cdot y(x).$$

Wir können die Konstante c durch den **„Anfangswert“** $y(0)$ ausdrücken:

$$y(0) = c \cdot e^{p \cdot 0} = c.$$

Also: die Lösung von $\frac{dy}{dx} = p \cdot y$ ist

$$y(x) = y(0) \cdot e^{p \cdot x}.$$

In Beispiel 6.21 zeigen wir, daß dies in der Tat die allgemeinste Lösung der DGL $y' = p \cdot y$ ist. Interpretieren wir $y(x)$ als Kapital $K(x)$ mit einem Startwert $K(0) = K_0$, so stimmt die Lösung $K(x) = K_0 \cdot e^{p \cdot x}$ mit der Formel der stetigen Verzinsung aus Beispiel 1.19 überein (wenn x in Jahren gemessen wird).

Merke 6.5:

Die allgemeine Lösung einer DGL erster Ordnung hat immer eine beliebige freie Konstante. Die Lösung mit dieser freien Konstanten heißt **„allgemeine Lösung“**. *Lösungen für spezielle Werte dieser Konstante heißen* **„spezielle Lösungen“**.

Beispiel 6.6: In MuPAD werden DGLen mittels `ode` (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL) erzeugt, z. B. $y' = y + x$:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x)}, {y(x)}):
```

Ein solches Objekt kann dann mittels `solve` gelöst werden:

```
>> solve(DGL)
                    {exp(x - C1) - x - 1}
```

Man kann Anfangsbedingungen direkt in das `ode`–Objekt einbauen, woraufhin `solve` die freie Konstante so wählt, daß die Anfangsbedingung erfüllt ist:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x), y(0) = 1}, {y(x)}):
>> solve(DGL)

                  {exp(x + ln(2)) - x - 1}
```

6.2 Graphische Lösung

Dieses graphische Verfahren ist zwar ungenau (halt graphisch), aber funktioniert dafür für beliebige DGLen $y' = f(x, y)$. Es ist äußerst nützlich, um sich schnell einen *qualitativen* Überblick über das Verhalten der Lösungen zu verschaffen.

Graphisches Rezept 6.7:

Löse eine beliebige DGL $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

- *Zeichne in die x-y-Ebene an vielen Punkten (x, y) die Vektoren des sogenannten* **„Richtungsfeldes“**

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

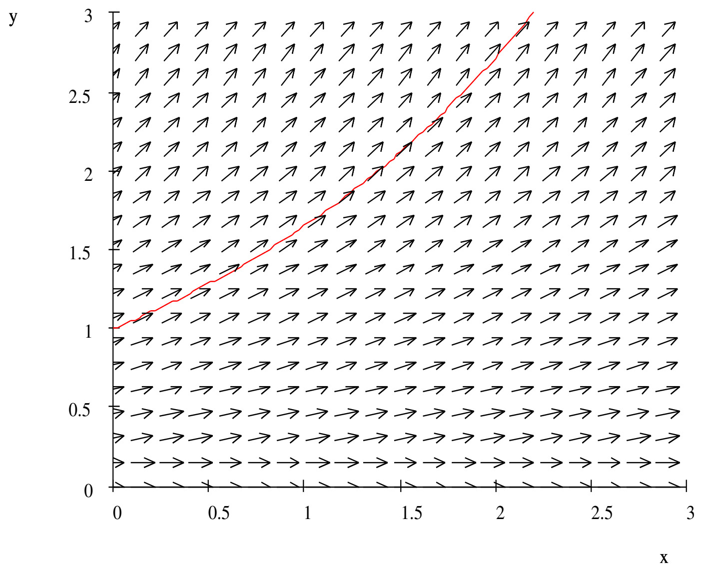
  ein. Es interessieren nur die Richtungen der Vektoren, nicht die Längen.

- *Wähle einen Startpunkt (x_0, y_0) und folge den Pfeilen! D.h., zeichne eine Kurve, deren Tangente an jedem Punkt mit den vorgegebenen Richtungsvektoren $\vec{v}(x, y)$ übereinstimmt.*

Die so vom Startpunkt ausgehende Kurve ist der Graph derjenigen Lösung, für die $y(x_0) = y_0$ gilt.

Beispiel 6.8: Wir zeichnen das Richtungsfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ der DGL $y' = \frac{y}{2}$. Vom Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ startend wird eine Lösungskurve eingezeichnet. Wir benutzen hier, daß wir die Lösung $y(x) = e^{\frac{x}{2}}$ in Beispiel 6.4 (mit $p = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$) bereits berechnet haben:

```
>> plot(
    plot::Function2d(exp(x/2), x = 0..2.9, Color = RGB::Red),
    plot::vectorfield([1, y/2], x = 0..2.9, y = 0..2.9,
                      Color = RGB::Black),
    ViewingBox = [0..3, 0..3]
   )
```



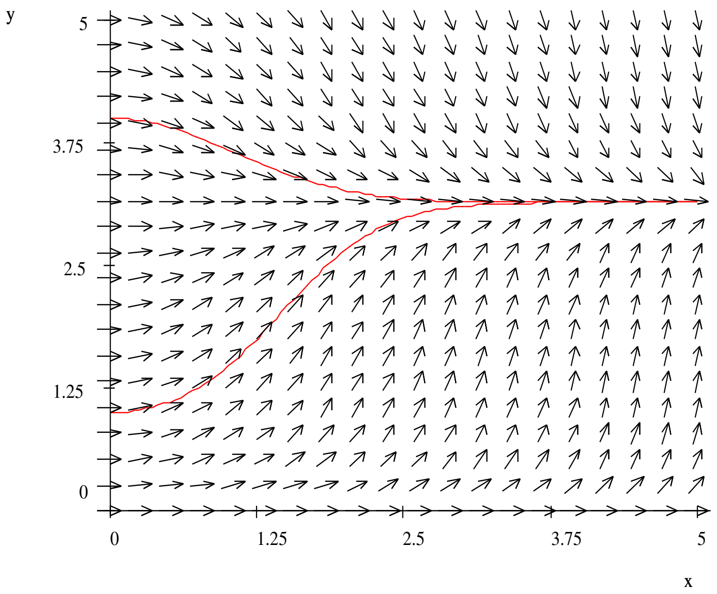
Beispiel 6.9: Ein weiteres Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin(y), \quad \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}.$$

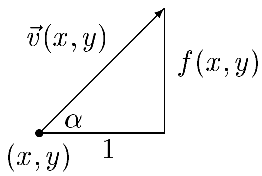
Die Lösungen durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0,1)$ und $(x_0, y_0) = (0,4)$ werden eingezeichnet. Hier wird der numerische DGL-Löser `numeric::odesolve2` zum Einzeichnen der Lösungskurven eingesetzt (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL):

```
>> Loesung1:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [1]):
>> Loesung2:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [4]):
```

```
>> plot(
    plot::Function2d(Loesung1(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::Function2d(Loesung2(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::vectorfield([1, x*sin(y)], x = 0..5, y = 0..5,
                      Color = RGB::Black)
   )
```



Bemerkung 6.10: *Worauf basiert das Verfahren? Die Tangente der eingezeichneten Kurve ist parallel zum Richtungsfeld* $\vec{v}(x,y)$*. Die Steigung der Kurventangente (der Tangens des Steigungswinkels* α*) ist* y'*, die Steigung des Richtungsvektors ist* $\tan(\alpha) = f(x,y)$*:*



Damit gilt $y' = \tan(\alpha) = f(x,y)$.

Bemerkung 6.11: *Die Tatsache, daß man an irgendeinem Punkt* (x_0, y_0) *starten kann, d.h., in der Lösung eine „Startbedingung“* $y(x_0) = y_0$ *vorgeben kann, entspricht der Tatsache, daß die allgemeine Lösung eine beliebige Konstante enthält.*

6.3 Separation (Trennung der Variablen)

Dies ist eine Technik, die nur für DGLen der speziellen Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ funktioniert: die rechte Seite der DGL muß ein Produkt von Funktionen jeweils einer Variablen sein.

Beispiel 6.12: Betrachte die DGL

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Die Idee ist, alle Ausdrücke in y (inclusive dy) auf der einen Seite der Gleichung, die Ausdrücke in x (inclusive dx) auf der anderen Seite zu sammeln („Trennung der Variablen"):

$$\frac{1}{y}\ dy = x \cdot dx.$$

Nun trage auf beiden Seiten ein Integralzeichen ein und bestimme die Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

(mit einer Integrationskonstanten $\tilde{c}$). Diese Gleichung definiert y in Abhängigkeit von x. Löse nach y auf:

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Zur Vereinfachung wird die Konstante $\pm e^{\tilde{c}}$ als neue Konstante c geschrieben:

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL $y' = x \cdot y$. Probe:

$$y' = \frac{d}{dx}\ c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot \frac{d}{dx}\ e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}_{y(x)} = x \cdot y(x).$$

Bemerkung 6.13: *Diese Technik kann nur dann funktionieren, wenn man es schafft, die Variablen x und y auf verschiedene Seiten der Gleichung zu bringen. Für die allgemeine DGL $y' = h(x,y)$ ist dies genau dann der Fall, wenn die Funktion $h(x,y)$ das Produkt einer Funktion in x und einer Funktion in y ist:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\ dy = f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + c,$$

wobei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Separationstechnik läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 6.14: (Separation der Variablen)

Sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$, sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

erfüllt die Gleichung

$$G(y) = F(x) + c.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach y ergibt sich die explizite Form der Lösung

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c).$$

Beispiel 6.15: Betrachte die DGL $y' = y^2$. Separation:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\, dy = 1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{-x-c}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $y' = y^2$ bestimmt. Es ist schöner, die beliebige Konstante c durch eine Anfangsbedingung $y(x_0)$ auszudrücken. Z.B., für $x_0 = 0$:

$$y(0) = \frac{1}{-0-c} = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{y(0)}.$$

Damit ergibt sich die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0)$ in der folgenden Form:

$$y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{y(0)}} = \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)}.$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)} = \frac{y(0)^2}{\big(1 - x \cdot y(0)\big)^2} = y(x)^2.$$

Weiterhin ergibt sich für $x = 0$ in der Tat:

$$y(x)_{|x=0} = \frac{y(0)}{1 - 0 \cdot y(0)} = y(0).$$

Beispiel 6.16: Betrachte eine **lineare** DGL ↓13.7.01

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y.$$

„Linear“ heißt, daß mit irgendeiner speziellen Lösung $y_s(x)$ auch jedes Vielfache $y(x) = \tilde{c} \cdot y_s(x)$ mit einer beliebigen Konstanten $\tilde{c}$ eine Lösung ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, \tilde{c} \cdot y_s(x) = \tilde{c} \cdot \frac{d}{dx}\, y_s(x) = \tilde{c} \cdot f(x) \cdot y_s(x) = f(x) \cdot \underbrace{\tilde{c} \cdot y_s(x)}_{y(x)} = f(x) \cdot y(x).$$

Damit ist klar: die freie Konstante muß multiplikativ eingehen. Man kann die allgemeine Lösung per Separation immer durch eine einzige Integration ermitteln:

$$\frac{1}{y}\, dy = f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \int f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\int f(x)\, dx}.$$

Wo ist nun die multiplikative Konstante? Sei $F(x)$ irgendeine konkrete Stammfunktion von $f(x)$ (ohne Integrationskonstante), so gilt $\int f(x)\, dx = F(x) + \tilde{c}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$, also

$$y = \pm e^{F(x)+\tilde{c}} = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{F(x)} = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei c wiederum eine beliebige Konstante ist. Vergleiche auch das spezielle Beispiel 6.12.

> **Merke:** Die Lösung von $y' = f(x) \cdot y$ ist
>
> $$y(x) = c \cdot e^{F(x)},$$
>
> wo $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Beispiel 6.17: Man kann die Startbedingung auch direkt in den Integrationsschritt der Separation einbauen. Dazu folgendes Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot e^{y}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Separation:

$$\frac{1}{e^{y}}\, dy = \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad e^{-y}\, dy = \cos(x)\, dx.$$

17.7.01↓ **Rezept:**

> Anstatt links und rechts allgemeine Stammfunktionen mit einer beliebigen Integrationskonstanten zu bestimmen, werden **bestimmte** Integrale startend bei y_0 bzw. x_0 berechnet.

Wir integrieren bis Y bzw. X, wobei Y die Lösung $Y = y(X)$ für $x = X$ darstellt. In diesem Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{Y} e^{-y}\, dy &= \int_{x_0}^{X} \cos(x)\, dx \\
\Rightarrow \quad [-e^{-y}]_{y=y_0}^{y=Y} &= [\sin(x)]_{x=x_0}^{x=X} \\
\Rightarrow \quad -e^{-Y} + e^{-y_0} &= \sin(X) - \sin(x_0).
\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach Y erhält man die Lösung $Y = y(X)$, welche für $X = x_0$ den Wert y_0 annimmt:

$$Y(X) = \ln(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(X)).$$

Mit der Umbenennung $X \to x$, $Y \to y$ erhält man die Lösung

$$y(x) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)\Big).$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{e^{y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{\ln\left(e^{y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)\right)}} = \frac{\cos(x)}{e^{-y(x)}} = \cos(x) \cdot e^{y(x)},$$

$$y(x_0) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x_0)\Big) = -\ln(e^{-y_0}) = y_0.$$

6.4 Variation der Konstanten

In diesem Abschnitt wird die Lösungstechnik für DGLen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x) \qquad (1)$$

vorgestellt. Die DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \qquad (2)$$

ohne den Term $g(x)$ heißt **„homogene DGL“**, mit dem Term $g(x)$ heißt die DGL **„inhomogen“**. Die Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) haben wir in Beispiel 6.16 kennengelernt:

$$y_h(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Rezept „Variation der Konstanten“ 6.18:

Zur Lösung der inhomogenen DGL (1) ersetze die freie Konstante c in der Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) durch eine Funktion $c(x)$. Einsetzen diese „Ansatzes“ in die DGL (1) liefert eine DGL für $c(x)$, die immer durch einfache Integration gelöst werden kann.

Ansatz für die Lösung der inhomogenen DGL (1):

$$y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Einsetzen in die inhomogene DGL (2). Die linke Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(c(x) \cdot e^{F(x)}\right) = \boxed{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{F(x)}} + c(x) \cdot F'(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Die rechte Seite:

$$f(x) \cdot y(x) + g(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot e^{F(x)} + \boxed{g(x)}.$$

Mit $F'(x) = f(x)$ heben sich beim Gleichsetzen der linken und rechten Seite zwei Terme weg, und es verbleibt folgende DGL für $c(x)$:

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^{F(x)} = g(x), \quad \text{also} \quad \frac{dc}{dx} = g(x) \cdot e^{-F(x)}.$$

Mit anderen Worten, $c(x)$ ist eine Stammfunktion von $g(x) \cdot e^{-F(x)}$:

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx.$$

Damit haben wir eine allgemeine Darstellung der Lösung $y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}$ der inhomogenen DGL (1):

Satz 6.19: (Lösungsformel)

Die allgemeine Lösung der DGL $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x)$ ist

$$\boxed{y(x) = e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx,}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Lösungsformel wird man sich nicht merken können. Man merke sich daher lieber das Konstruktionsprinzip 6.18 der „Variation der Konstanten“.

Beispiel 6.20: Finde die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = y + x.$$

Schritt 1: Die Lösung der homogenen DGL $y' = y$ ist nach Beispiel 6.16 (mit $f(x) = 1$, $F(x) = x$):

$$y_h(x) = c \cdot e^x.$$

Schritt 2: Variationsansatz $y(x) = c(x) \cdot e^x$ für die inhomogene DGL $y' = y + x$.

Schritt 3: Einsetzen in die inhomogene DGL. Die linke Seite der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(c(x) \cdot e^x\Big) = \frac{dc}{dx} \cdot e^x + c(x) \cdot e^x.$$

Die rechte Seite der DGL:

$$y + x = c(x) \cdot e^x + x.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^x = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dx} = x \cdot e^{-x}.$$

Schritt 4: Bestimme $c(x)$ durch Integration:

$$c(x) = \int x \cdot e^{-x}\ dx.$$

Dieses Integral wird analog zu Beispiel 4.12 durch partielle Integration bestimmt:

$$c(x) = \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\ dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\ dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\ dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + \tilde{c} = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c}$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$.

Schritt 5: Das Endergebnis (die allgemeine Lösung von $y' = y + x$) ist

$$y(x) = c(x) \cdot e^x = \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c}\Big) \cdot e^x = -(x+1) \cdot \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_{1} + \tilde{c} \cdot e^x$$

$$= -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Schritt 6: Probe:

$$\frac{dy}{dx} - (y + x) = \underbrace{-1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y'} - \Big(\underbrace{-x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y}\ +\ x\Big) = 0. \quad \text{(OK)}$$

Alternativ: Wir wenden die Lösungsformel 6.19 direkt an. Es wird betrachtet $y' = y + x$, d.h., $f(x) = 1$ und $g(x) = x$. Mit der Stammfunktion $F(x) = x$ von $f(x) = 1$ ergibt sich sofort

$$y(x) = \underbrace{e^x}_{e^{F(x)}} \cdot \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{e^{-F(x)}} \; dx.$$

Damit landen wir unmittelbar bei dem oben bereits gelösten Integrationsproblem

$$\int x \cdot e^{-x} \; dx = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c},$$

und es ergibt sich wiederum die Lösung

$$y(x) = e^x \cdot \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c} \Big) = -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Beispiel 6.21: Wir zeigen, daß die Lösung

$$y(x) = c \cdot e^{p \cdot x}$$

in der Tat die *allgemeinste* Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot y$$

ist. Dazu wenden wir das Prinzip der Variation der Konstanten auf diese homogene DGL an, d.h., wir versuchen, die allgemeinste Lösung in der Form $y(x) = c(x) \cdot e^{p \cdot x}$ zu bestimmen. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert auf der linken Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot e^{p \cdot x} + c(x) \cdot p \cdot e^{p \cdot x}.$$

Die rechte Seite ist

$$p \cdot y(x) = p \cdot c(x) \cdot e^{p \cdot x}.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Die allgemeinste Lösung dieser „DGL“ für $c(x)$ ist offensichtlich eine konstante Funktion:

$$c(x) = \int 0 \; dx = 0 + \tilde{c} = \text{eine beliebige Konstante}.$$

6.5 Differentialgleichungen in der Ökonomie

6.5.1 Das Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding

Aus: Volker Nollau, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Stuttgart: Teubner 1993. Kapitel 7 (Lineare Differenzen- und Differentialgleichungen), 7.2: Ökonomische Modelle.

Betrachte eine Volkswirtschaft. Sei t die Zeit, sei

$$\begin{array}{ll} E(t) & \text{das Volkseinkommen,} \\ K(t) & \text{der Konsum,} \\ I(t) & \text{die Investitionen.} \end{array}$$

Das Einkommen E der Bevölkerung wird zum Teil verkonsumiert, der Rest verbleibt für Investitionen:

$$E(t) = K(t) + I(t). \qquad (1)$$

Der Konsum läßt sich aufspalten in einen einkommensunabhängigen Teil (zur Abdeckung der Grundbedürfnisse, Wohnung, Essen etc.) plus einen einkommensabhängigen Teil (Luxusgüter: die Entscheidung für VW Golf oder Mercedes hängt vom Einkommen ab). Als einfaches Modell gelte

$$K(t) = \alpha + \beta \cdot E(t) \qquad (2)$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $0 < \beta < 1$, d.h., ein fester Bruchteil β des Einkommens werde für „Luxus“ verkonsumiert. Die Investitionen vermehren das Einkommen. Stellt man sich γ als einen Prozentsatz vor, mit dem sich investiertes Kapital (z.B. durch Verzinsung) vermehrt, so gilt für den zeitlichen Anstieg $\frac{d}{dt}E(t)$ des Einkommens

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot I(t). \qquad (3)$$

Bei vorgegebenen Modellparametern

$$\alpha > 0, \quad \beta \in (0,1), \quad \gamma > 0$$

soll nun entschieden werden, was mit dem Volkseinkommen im Laufe der Zeit geschieht: wächst es oder fällt es? Die Dynamik ist durch (3) charakterisiert. Setzt man $I(t) = E(t) - K(t)$ aus (1) ein, so hat man

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot \Big(E(t) - K(t)\Big).$$

Drückt man nun noch $K(t)$ über (2) durch $E(t)$ aus, so erhält man eine Differentialgleichung für E:

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot (E(t) - \gamma\Big(\alpha + \beta \cdot E(t)\Big) = \gamma \cdot (1-\beta) \cdot E(t) \; - \; \alpha \cdot \gamma.$$

Zur Abkürzung setzen wir $a = \alpha \cdot \gamma$, $b = \gamma \cdot (1-\beta)$. Ergebnis: die Dynamik der Volkseinkommens ist nach Boulding durch die folgende DGL bestimmt, die es nun zu lösen gilt:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = b \cdot E(t) - a.}$$

Mit der Lösungsformel in Satz 6.19 haben wir das Ergebnis sofort ($f(t) = b$, $g(t) = -a$, $F(t) = b \cdot t$):

$$E(t) = e^{F(t)} \cdot \int g(t) \cdot e^{-F(t)}\; dt = -a \cdot e^{b\cdot t} \cdot \int e^{-b\cdot t}\; dt$$

$$= -a \cdot e^{b\cdot t} \cdot \Big(-\frac{1}{b} \cdot e^{-b\cdot t} + c\Big) = \frac{a}{b} - a \cdot c \cdot e^{b\cdot t}.$$

Wir drücken die Integrationskonstante c durch das Volkseinkommen $E(0)$ aus:

$$E(0) = \frac{a}{b} - a \cdot c \cdot e^{b\cdot 0} = \frac{a}{b} - a \cdot c \quad \Rightarrow \quad -a \cdot c = E(0) - \frac{a}{b}$$

und erhalten damit die Lösung:

$$E(t) = \frac{a}{b} + \Big(E(0) - \frac{a}{b}\Big) \cdot e^{b\cdot t}.$$

Setzen wir wieder $a = \alpha \cdot \gamma$, $b = \gamma \cdot (1-\beta)$ ein:

$$\boxed{E(t) = \frac{\alpha}{1-\beta} + \Big(E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta}\Big) \cdot e^{\gamma\cdot(1-\beta)\cdot t}.}$$

Dies ist die Vorhersage für die Dynamik des Volkseinkommens nach Boulding.

Diskussion:

Die Dynamik hängt vom Vorzeichen von $E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta}$ ab. Da $e^{\gamma\cdot(1-\beta)\cdot t}$ mit wachsendem t wächst, wächst $E(t)$, falls dieses Vorzeichen positiv ist. Es sinkt, wenn das Vorzeichen negativ ist (und führt dann bald zum Bankrott der Volkswirtschaft). Mit (2) war der Konsum als $K(t) = \alpha + \beta \cdot E(t)$ angesetzt worden. Damit läßt sich

$$E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{E(0) - \beta \cdot E(0) - \alpha}{1-\beta}$$

als

$$E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{E(0) - K(0)}{1-\beta}$$

interpretieren. Mit der Voraussetzung $1 - \beta > 0$ hängt das entscheidende Vorzeichen also davon ab, oder der Konsum kleiner oder größer als das Einkommen ist.

> **Fazit:** ist der Konsum größer als das Einkommen, sinkt das Volkseinkommen im Laufe der Zeit. Ist der Konsum kleiner als das Einkommen, steigt das Einkommen im Laufe der Zeit (weil Geld für Investitionen übrigbleiben, die das Einkommen dann vermehren).

Nun ja, das war eigentlich auch ohne Differentialgleichungen ziemlich klar. Aber: aus der Lösung der DGL können wir nun (wenn konkrete Werte für α, β, γ und $E(0)$ gegeben sind) z.B. berechnen, wann die Volkswirtschaft bankrott sein wird, falls sie „über ihre Verhältnisse lebt“, also falls zuviel konsumiert wird.

6.5.2 Weitere Beispiele

(???) Verbleibt noch Zeit, hier weitere Beispiele vorzustellen (???)

Zum Selbststudium weitere Beispiele in:

Volker Nollau, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Stuttgart: Teubner 1993. Kapitel 7 (Lineare Differenzen- und Differentialgleichungen), 7.2: Ökonomische Modelle.