Kapitel 6

Differentialgleichungen erster Ordnung

$\boxed{\downarrow 10.7.01}$

Beispiel 6.1: Durch Verzinsung wächst ein Kapital $K(x)$ im Laufe der Zeit x. Der Zuwachs ΔK zum Zeitpunkt x im (kleinen) Zeitraum Δx ist proportional zum aktuellen Kapitalwert $K(x)$ und zur Zeitspanne Δx:

$$\Delta K = p \cdot K(x) \cdot \Delta x, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} = p \cdot K(x).$$

Hierbei ist p der Zinssatz (z.B. $p = 5\%/\text{Jahr}$, wenn die Zeit in Jahren gemessen wird). Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ (das ist das Konzept der stetigen Verzinsung, siehe Beispiel 1.19) ist das Kapitalwachstum also durch die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\, K(x) = p \cdot K(x)$$

charakterisiert.

Die obige Gleichung, die $K'(x)$ mit $K(x)$ verknüpft, nennt man eine **„Differentialgleichung"**. In diesem Kapitel geht es um die Frage, wie man aus solchen Differentialgleichungen die Funktion $K(x)$ bestimmen kann.

6.1 Definitionen

Definition 6.2: (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = f(x, y(x))$$

heißt (explizite) **„gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung"** *für die Funktion $y(x)$, kurz* **„DGL"**.

Beispiel 6.3: Einige Beispiele von DGLen für $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = x \cdot y^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}.$$

Auch

$$x \cdot y \, \frac{dy}{dx} = \sin(y),$$

ist eine DGL, wir werden sie aber immer in der nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelösten Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(y)}{x \cdot y}$$

betrachten. Als Kurzform schreibt man auch $y' = \dfrac{\sin(y)}{x \cdot y}$.

Beispiel 6.4: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot y$$

aus Beispiel 6.1 (K wurde in y umbenannt). Wir raten zunächst eine Lösung:

$$y(x) = c \cdot e^{p \cdot x},$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. In der Tat ist dies für jeden Wert von c eine Lösung der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, c \cdot e^{p \cdot x} = c \cdot \frac{d}{dx} e^{p \cdot x} = c \cdot p \cdot e^{p \cdot x} = p \cdot \underbrace{(c \cdot e^{p \cdot x})}_{y(x)} = p \cdot y(x).$$

Wir können die Konstante c durch den **„Anfangswert“** $y(0)$ ausdrücken:

$$y(0) = c \cdot e^{p \cdot 0} = c.$$

Also: die Lösung von $\frac{dy}{dx} = p \cdot y$ ist

$$y(x) = y(0) \cdot e^{p \cdot x}.$$

In Beispiel 6.21 zeigen wir, daß dies in der Tat die allgemeinste Lösung der DGL $y' = p \cdot y$ ist. Interpretieren wir $y(x)$ als Kapital $K(x)$ mit einem Startwert $K(0) = K_0$, so stimmt die Lösung $K(x) = K_0 \cdot e^{p \cdot x}$ mit der Formel der stetigen Verzinsung aus Beispiel 1.19 überein (wenn x in Jahren gemessen wird).

Merke 6.5:

Die allgemeine Lösung einer DGL erster Ordnung hat immer eine beliebige freie Konstante. Die Lösung mit dieser freien Konstanten heißt **„allgemeine Lösung“**. *Lösungen für spezielle Werte dieser Konstante heißen* **„spezielle Lösungen“**.

Beispiel 6.6: In MuPAD werden DGLen mittels `ode` (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL) erzeugt, z. B. $y' = y + x$:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x)}, {y(x)}):
```

Ein solches Objekt kann dann mittels `solve` gelöst werden:

```
>> solve(DGL)
                    {exp(x - C1) - x - 1}
```

Man kann Anfangsbedingungen direkt in das `ode`–Objekt einbauen, woraufhin `solve` die freie Konstante so wählt, daß die Anfangsbedingung erfüllt ist:

```
>> DGL:= ode({y'(x) = x + y(x), y(0) = 1}, {y(x)}):
>> solve(DGL)

                  {exp(x + ln(2)) - x - 1}
```

6.2 Graphische Lösung

Dieses graphische Verfahren ist zwar ungenau (halt graphisch), aber funktioniert dafür für beliebige DGLen $y' = f(x, y)$. Es ist äußerst nützlich, um sich schnell einen *qualitativen* Überblick über das Verhalten der Lösungen zu verschaffen.

Graphisches Rezept 6.7:

Löse eine beliebige DGL $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$*:*

- *Zeichne in die* x-y*-Ebene an vielen Punkten* (x, y) *die Vektoren des sogenannten* **„Richtungsfeldes“**

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

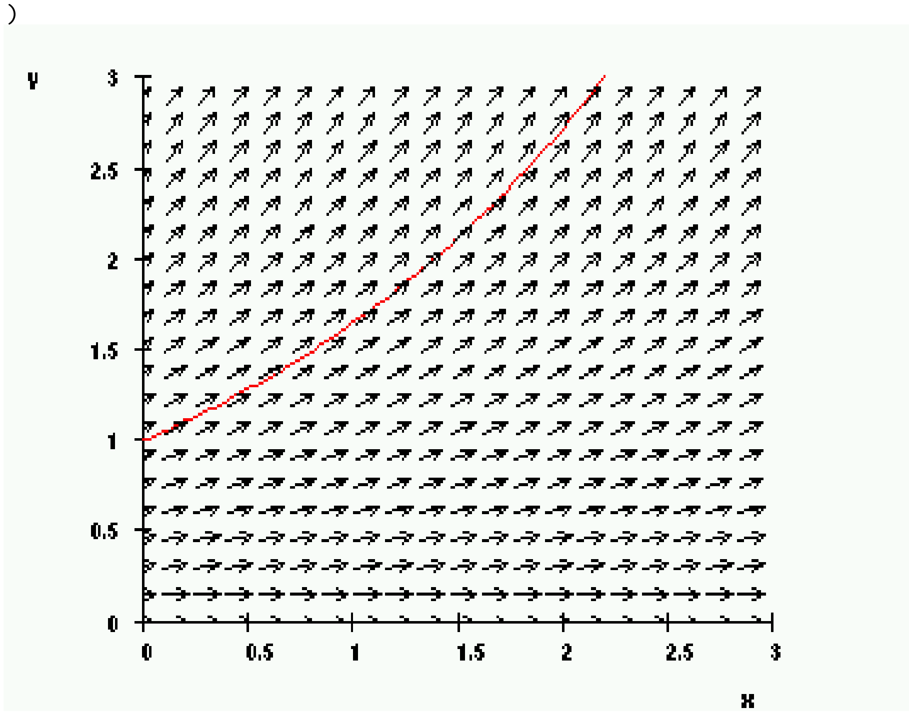
  ein. Es interessieren nur die Richtungen der Vektoren, nicht die Längen.

- *Wähle einen Startpunkt* (x_0, y_0) *und folge den Pfeilen! D.h., zeichne eine Kurve, deren Tangente an jedem Punkt mit den vorgegebenen Richtungsvektoren* $\vec{v}(x, y)$ *übereinstimmt.*

Die so vom Startpunkt ausgehende Kurve ist der Graph derjenigen Lösung, für die $y(x_0) = y_0$ gilt.

Beispiel 6.8: Wir zeichnen das Richtungsfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ der DGL $y' = \frac{y}{2}$. Vom Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ startend wird eine Lösungskurve eingezeichnet. Wir benutzen hier, daß wir die Lösung $y(x) = e^{\frac{x}{2}}$ in Beispiel 6.4 (mit $p = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$) bereits berechnet haben:

```
>> plot(
    plot::Function2d(exp(x/2), x = 0..2.9, Color = RGB::Red),
    plot::vectorfield([1, y/2], x = 0..2.9, y = 0..2.9,
                      Color = RGB::Black),
    ViewingBox = [0..3, 0..3]
   )
```



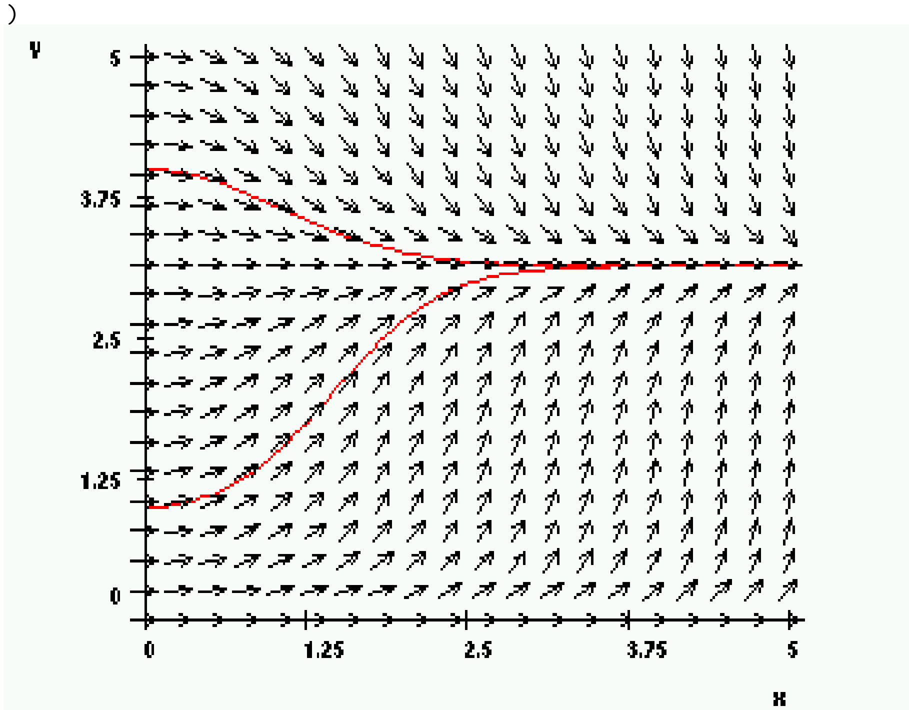
Beispiel 6.9: Ein weiteres Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin(y), \quad \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}.$$

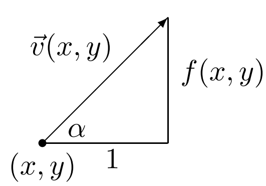
Die Lösungen durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0,1)$ und $(x_0, y_0) = (0,4)$ werden eingezeichnet. Hier wird der numerische DGL-Löser `numeric::odesolve2` zum Einzeichnen der Lösungskurven eingesetzt (engl: ode = ordinary differential equation = gewöhnliche DGL):

```
>> Loesung1:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [1]):
>> Loesung2:= numeric::odesolve2((x, y) -> [x*sin(y[1])], 0, [4]):
```

```
>> plot(
    plot::Function2d(Loesung1(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::Function2d(Loesung2(x)[1], x = 0..5, Color = RGB::Red),
    plot::vectorfield([1, x*sin(y)], x = 0..5, y = 0..5,
                      Color = RGB::Black)
   )
```



Bemerkung 6.10: *Worauf basiert das Verfahren? Die Tangente der eingezeichneten Kurve ist parallel zum Richtungsfeld $\vec{v}(x,y)$. Die Steigung der Kurventangente (der Tangens des Steigungswinkels α) ist y', die Steigung des Richtungsvektors ist $\tan(\alpha) = f(x,y)$:*



Damit gilt $y' = \tan(\alpha) = f(x,y)$.

Bemerkung 6.11: *Die Tatsache, daß man an irgendeinem Punkt (x_0, y_0) starten kann, d.h., in der Lösung eine „Startbedingung“ $y(x_0) = y_0$ vorgeben kann, entspricht der Tatsache, daß die allgemeine Lösung eine beliebige Konstante enthält.*

6.3 Separation (Trennung der Variablen)

Dies ist eine Technik, die nur für DGLen der speziellen Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ funktioniert: die rechte Seite der DGL muß ein Produkt von Funktionen jeweils einer Variablen sein.

Beispiel 6.12: Betrachte die DGL

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Die Idee ist, alle Ausdrücke in y (inclusive dy) auf der einen Seite der Gleichung, die Ausdrücke in x (inclusive dx) auf der anderen Seite zu sammeln („Trennung der Variablen"):

$$\frac{1}{y}\ dy = x \cdot dx.$$

Nun trage auf beiden Seiten ein Integralzeichen ein und bestimme die Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$$

(mit einer Integrationskonstanten $\tilde{c}$). Diese Gleichung definiert y in Abhängigkeit von x. Löse nach y auf:

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + \tilde{c}} = e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\tilde{c}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Zur Vereinfachung wird die Konstante $\pm e^{\tilde{c}}$ als neue Konstante c geschrieben:

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL $y' = x \cdot y$. Probe:

$$y' = \frac{d}{dx}\ c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot \frac{d}{dx}\ e^{\frac{x^2}{2}} = c \cdot x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}_{y(x)} = x \cdot y(x).$$

Bemerkung 6.13: *Diese Technik kann nur dann funktionieren, wenn man es schafft, die Variablen x und y auf verschiedene Seiten der Gleichung zu bringen. Für die allgemeine DGL $y' = h(x, y)$ ist dies genau dann der Fall, wenn die Funktion $h(x, y)$ das Produkt einer Funktion in x und einer Funktion in y ist:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\ dy = f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + c,$$

wobei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Separationstechnik läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 6.14: (Separation der Variablen)

Sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$, sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

erfüllt die Gleichung

$$G(y) = F(x) + c.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach y ergibt sich die explizite Form der Lösung

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c).$$

Beispiel 6.15: Betrachte die DGL $y' = y^2$. Separation:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\, dy = 1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{-x - c}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $y' = y^2$ bestimmt. Es ist schöner, die beliebige Konstante c durch eine Anfangsbedingung $y(x_0)$ auszudrücken. Z.B., für $x_0 = 0$:

$$y(0) = \frac{1}{-0 - c} = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{y(0)}.$$

Damit ergibt sich die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0)$ in der folgenden Form:

$$y(x) = \frac{1}{-x + \frac{1}{y(0)}} = \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)}.$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, \frac{y(0)}{1 - x \cdot y(0)} = \frac{y(0)^2}{\Big(1 - x \cdot y(0)\Big)^2} = y(x)^2.$$

Weiterhin ergibt sich für $x = 0$ in der Tat:

$$y(x)_{|x=0} = \frac{y(0)}{1 - 0 \cdot y(0)} = y(0).$$

Beispiel 6.16: Betrachte eine **lineare** DGL ↓13.7.01

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y.$$

„Linear“ heißt, daß mit irgendeiner speziellen Lösung $y_s(x)$ auch jedes Vielfache $y(x) = \tilde{c} \cdot y_s(x)$ mit einer beliebigen Konstanten $\tilde{c}$ eine Lösung ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ \tilde{c} \cdot y_s(x) = \tilde{c} \cdot \frac{d}{dx}\ y_s(x) = \tilde{c} \cdot f(x) \cdot y_s(x) = f(x) \cdot \underbrace{\tilde{c} \cdot y_s(x)}_{y(x)} = f(x) \cdot y(x).$$

Damit ist klar: die freie Konstante muß multiplikativ eingehen. Man kann die allgemeine Lösung per Separation immer durch eine einzige Integration ermitteln:

$$\frac{1}{y}\ dy = f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \int f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\int f(x)\ dx}.$$

Wo ist nun die multiplikative Konstante? Sei $F(x)$ irgendeine konkrete Stammfunktion von $f(x)$ (ohne Integrationskonstante), so gilt $\int f(x)\ dx = F(x) + \tilde{c}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$, also

$$y = \pm e^{F(x)+\tilde{c}} = \underbrace{\pm e^{\tilde{c}}}_{c} \cdot e^{F(x)} = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei c wiederum eine beliebige Konstante ist. Vergleiche auch das spezielle Beispiel 6.12.

Merke: Die Lösung von $y' = f(x) \cdot y$ ist

$$y(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wo $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Beispiel 6.17: Man kann die Startbedingung auch direkt in den Integrationsschritt der Separation einbauen. Dazu folgendes Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot e^y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Separation:

$$\frac{1}{e^y}\ dy = \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad e^{-y}\ dy = \cos(x)\, dx.$$

17.7.01↓ **Rezept:**

Anstatt links und rechts allgemeine Stammfunktionen mit einer beliebigen Integrationskonstanten zu bestimmen, werden **bestimmte** Integrale startend bei y_0 bzw. x_0 berechnet.

Wir integrieren bis Y bzw. X, wobei Y die Lösung $Y = y(X)$ für $x = X$ darstellt. In diesem Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{Y} e^{-y}\,dy &= \int_{x_0}^{X} \cos(x)\,dx \\ \Rightarrow \quad [-e^{-y}]_{y=y_0}^{y=Y} &= [\sin(x)]_{x=x_0}^{x=X} \\ \Rightarrow \quad -e^{-Y} + e^{-y_0} &= \sin(X) - \sin(x_0). \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach Y erhält man die Lösung $Y = y(X)$, welche für $X = x_0$ den Wert y_0 annimmt:

$$Y(X) = \ln(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(X)).$$

Mit der Umbenennung $X \to x$, $Y \to y$ erhält man die Lösung

$$y(x) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)\Big).$$

Probe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{e^{y_0} + \sin(x_0) - \sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{\ln\left(e^{y_0}+\sin(x_0)-\sin(x)\right)}} = \frac{\cos(x)}{e^{-y(x)}} = \cos(x) \cdot e^{y(x)},$$

$$y(x_0) = -\ln\Big(e^{-y_0} + \sin(x_0) - \sin(x_0)\Big) = -\ln(e^{-y_0}) = y_0.$$

6.4 Variation der Konstanten

In diesem Abschnitt wird die Lösungstechnik für DGLen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x) \qquad (1)$$

vorgestellt. Die DGL

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \qquad (2)$$

ohne den Term $g(x)$ heißt **„homogene DGL“**, mit dem Term $g(x)$ heißt die DGL **„inhomogen“**. Die Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) haben wir in Beispiel 6.16 kennengelernt:

$$y_h(x) = c \cdot e^{F(x)},$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Rezept „Variation der Konstanten“ 6.18:

Zur Lösung der inhomogenen DGL (1) ersetze die freie Konstante c in der Lösung $y_h(x)$ der homogenen DGL (2) durch eine Funktion $c(x)$. Einsetzen diese „Ansatzes“ in die DGL (1) liefert eine DGL für $c(x)$, die immer durch einfache Integration gelöst werden kann.

Ansatz für die Lösung der inhomogenen DGL (1):

$$y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Einsetzen in die inhomogene DGL (2). Die linke Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(c(x) \cdot e^{F(x)}\Big) = \boxed{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{F(x)}} + c(x) \cdot F'(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Die rechte Seite:

$$f(x) \cdot y(x) + g(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot e^{F(x)} + \boxed{g(x)}.$$

Mit $F'(x) = f(x)$ heben sich beim Gleichsetzen der linken und rechten Seite zwei Terme weg, und es verbleibt folgende DGL für $c(x)$:

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^{F(x)} = g(x), \quad \text{also} \quad \frac{dc}{dx} = g(x) \cdot e^{-F(x)}.$$

Mit anderen Worten, $c(x)$ ist eine Stammfunktion von $g(x) \cdot e^{-F(x)}$:

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx.$$

Damit haben wir eine allgemeine Darstellung der Lösung $y(x) = c(x) \cdot e^{F(x)}$ der inhomogenen DGL (1):

Satz 6.19: (Lösungsformel)

Die allgemeine Lösung der DGL $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x)$ ist

$$\boxed{y(x) = e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx,}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Lösungsformel wird man sich nicht merken können. Man merke sich daher lieber das Konstruktionsprinzip 6.18 der „Variation der Konstanten“.

Beispiel 6.20: Finde die allgemeine Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = y + x.$$

Schritt 1: Die Lösung der homogenen DGL $y' = y$ ist nach Beispiel 6.16 (mit $f(x) = 1$, $F(x) = x$):

$$y_h(x) = c \cdot e^x.$$

Schritt 2: Variationsansatz $y(x) = c(x) \cdot e^x$ für die inhomogene DGL $y' = y + x$.

Schritt 3: Einsetzen in die inhomogene DGL. Die linke Seite der DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(c(x) \cdot e^x\Big) = \frac{dc}{dx} \cdot e^x + c(x) \cdot e^x.$$

Die rechte Seite der DGL:

$$y + x = c(x) \cdot e^x + x.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^x = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dx} = x \cdot e^{-x}.$$

Schritt 4: Bestimme $c(x)$ durch Integration:

$$c(x) = \int x \cdot e^{-x}\ dx.$$

Dieses Integral wird analog zu Beispiel 4.12 durch partielle Integration bestimmt:

$$c(x) = \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\ dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\ dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\ dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + \tilde{c} = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c}$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten $\tilde{c}$.

Schritt 5: Das Endergebnis (die allgemeine Lösung von $y' = y + x$) ist

$$y(x) = c(x) \cdot e^x = \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c} \Big) \cdot e^x = -(x+1) \cdot \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_{1} + \tilde{c} \cdot e^x$$

$$= -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Schritt 6: Probe:

$$\frac{dy}{dx} - (y + x) = \underbrace{-1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y'} - \Big(\underbrace{-x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x}_{y} \ + \ x \Big) = 0. \quad \text{(OK)}$$

Alternativ: Wir wenden die Lösungsformel 6.19 direkt an. Es wird betrachtet $y' = y + x$, d.h., $f(x) = 1$ und $g(x) = x$. Mit der Stammfunktion $F(x) = x$ von $f(x) = 1$ ergibt sich sofort

$$y(x) = \underbrace{e^x}_{e^{F(x)}} \cdot \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{e^{-F(x)}} \; dx.$$

Damit landen wir unmittelbar bei dem oben bereits gelösten Integrationsproblem

$$\int x \cdot e^{-x} \; dx = -(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c},$$

und es ergibt sich wiederum die Lösung

$$y(x) = e^x \cdot \Big(-(x+1) \cdot e^{-x} + \tilde{c} \Big) = -x - 1 + \tilde{c} \cdot e^x.$$

Beispiel 6.21: Wir zeigen, daß die Lösung

$$y(x) = c \cdot e^{p \cdot x}$$

in der Tat die *allgemeinste* Lösung der DGL

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot y$$

ist. Dazu wenden wir das Prinzip der Variation der Konstanten auf diese homogene DGL an, d.h., wir versuchen, die allgemeinste Lösung in der Form $y(x) = c(x) \cdot e^{p \cdot x}$ zu bestimmen. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert auf der linken Seite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot e^{p \cdot x} + c(x) \cdot p \cdot e^{p \cdot x}.$$

Die rechte Seite ist

$$p \cdot y(x) = p \cdot c(x) \cdot e^{p \cdot x}.$$

Durch Vergleich folgt

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Die allgemeinste Lösung dieser „DGL" für $c(x)$ ist offensichtlich eine konstante Funktion:

$$c(x) = \int 0 \; dx = 0 + \tilde{c} = \text{eine beliebige Konstante}.$$

6.5 Differentialgleichungen in der Ökonomie

6.5.1 Das Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding

Aus: Volker Nollau, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Stuttgart: Teubner 1993. Kapitel 7 (Lineare Differenzen- und Differentialgleichungen), 7.2: Ökonomische Modelle.

Betrachte eine Volkswirtschaft. Sei t die Zeit, sei

$$\begin{aligned} E(t) &\quad \text{das Volkseinkommen,} \\ K(t) &\quad \text{der Konsum,} \\ I(t) &\quad \text{die Investitionen.} \end{aligned}$$

Das Einkommen E der Bevölkerung wird zum Teil verkonsumiert, der Rest verbleibt für Investitionen:

$$E(t) = K(t) + I(t). \qquad (1)$$

Der Konsum läßt sich aufspalten in einen einkommensunabhängigen Teil (zur Abdeckung der Grundbedürfnisse, Wohnung, Essen etc.) plus einen einkommensabhängigen Teil (Luxusgüter: die Entscheidung für VW Golf oder Mercedes hängt vom Einkommen ab). Als einfaches Modell gelte

$$K(t) = \alpha + \beta \cdot E(t) \qquad (2)$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $0 < \beta < 1$, d.h., ein fester Bruchteil β des Einkommens werde für „Luxus“ verkonsumiert. Die Investitionen vermehren das Einkommen. Stellt man sich γ als einen Prozentsatz vor, mit dem sich investiertes Kapital (z.B. durch Verzinsung) vermehrt, so gilt für den zeitlichen Anstieg $\frac{d}{dt}E(t)$ des Einkommens

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot I(t). \qquad (3)$$

Bei vorgegebenen Modellparametern

$$\alpha > 0, \quad \beta \in (0,1), \quad \gamma > 0$$

soll nun entschieden werden, was mit dem Volkseinkommen im Laufe der Zeit geschieht: wächst es oder fällt es? Die Dynamik ist durch (3) charakterisiert. Setzt man $I(t) = E(t) - K(t)$ aus (1) ein, so hat man

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot \Big(E(t) - K(t)\Big).$$

Drückt man nun noch $K(t)$ über (2) durch $E(t)$ aus, so erhält man eine Differentialgleichung für E:

$$\frac{dE}{dt} = \gamma \cdot (E(t) - \gamma\Big(\alpha + \beta \cdot E(t)\Big) = \gamma \cdot (1-\beta) \cdot E(t) \; - \; \alpha \cdot \gamma.$$

Zur Abkürzung setzen wir $a = \alpha \cdot \gamma$, $b = \gamma \cdot (1-\beta)$. Ergebnis: die Dynamik der Volkseinkommens ist nach Boulding durch die folgende DGL bestimmt, die es nun zu lösen gilt:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = b \cdot E(t) - a.}$$

Mit der Lösungsformel in Satz 6.19 haben wir das Ergebnis sofort ($f(t) = b$, $g(t) = -a$, $F(t) = b \cdot t$):

$$E(t) = e^{F(t)} \cdot \int g(t) \cdot e^{-F(t)} \; dt = -a \cdot e^{b \cdot t} \cdot \int e^{-b \cdot t} \; dt$$

$$= -a \cdot e^{b \cdot t} \cdot \Big(-\frac{1}{b} \cdot e^{-b \cdot t} + c \Big) = \frac{a}{b} - a \cdot c \cdot e^{b \cdot t}.$$

Wir drücken die Integrationskonstante c durch das Volkseinkommen $E(0)$ aus:

$$E(0) = \frac{a}{b} - a \cdot c \cdot e^{b \cdot 0} = \frac{a}{b} - a \cdot c \quad \Rightarrow \quad -a \cdot c = E(0) - \frac{a}{b}$$

und erhalten damit die Lösung:

$$E(t) = \frac{a}{b} + \Big(E(0) - \frac{a}{b} \Big) \cdot e^{b \cdot t}.$$

Setzen wir wieder $a = \alpha \cdot \gamma$, $b = \gamma \cdot (1-\beta)$ ein:

$$\boxed{E(t) = \frac{\alpha}{1-\beta} + \Big(E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta} \Big) \cdot e^{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot t}.}$$

Dies ist die Vorhersage für die Dynamik des Volkseinkommens nach Boulding.

Diskussion:

Die Dynamik hängt vom Vorzeichen von $E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta}$ ab. Da $e^{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot t}$ mit wachsendem t wächst, wächst $E(t)$, falls dieses Vorzeichen positiv ist. Es sinkt, wenn das Vorzeichen negativ ist (und führt dann bald zum Bankrott der Volkswirtschaft). Mit (2) war der Konsum als $K(t) = \alpha + \beta \cdot E(t)$ angesetzt worden. Damit läßt sich

$$E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{E(0) - \beta \cdot E(0) - \alpha}{1-\beta}$$

als

$$E(0) - \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{E(0) - K(0)}{1-\beta}$$

interpretieren. Mit der Voraussetzung $1 - \beta > 0$ hängt das entscheidende Vorzeichen also davon ab, oder der Konsum kleiner oder größer als das Einkommen ist.

Fazit: ist der Konsum größer als das Einkommen, sinkt das Volkseinkommen im Laufe der Zeit. Ist der Konsum kleiner als das Einkommen, steigt das Einkommen im Laufe der Zeit (weil Geld für Investitionen übrigbleiben, die das Einkommen dann vermehren).

Nun ja, das war eigentlich auch ohne Differentialgleichungen ziemlich klar. Aber: aus der Lösung der DGL können wir nun (wenn konkrete Werte für α, β, γ und $E(0)$ gegeben sind) z.B. berechnen, wann die Volkswirtschaft bankrott sein wird, falls sie „über ihre Verhältnisse lebt“, also falls zuviel konsumiert wird.

6.5.2 Weitere Beispiele

(???) Verbleibt noch Zeit, hier weitere Beispiele vorzustellen (???)

Zum Selbststudium weitere Beispiele in:

Volker Nollau, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Stuttgart: Teubner 1993. Kapitel 7 (Lineare Differenzen- und Differentialgleichungen), 7.2: Ökonomische Modelle.