

Kapitel 5

Differentialrechnung in mehreren Variablen

↓19.6.01

Es geht nun um die Differentialrechnung von Funktionen $f(x_1, x_2, \dots)$, die von mehr als nur einer Variablen abhängen.

5.1 Partielle Ableitungen

Definition 5.1: (Partielle Ableitungen)

Zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ definiert man die **“partielle Ableitung“** nach der Variable x_i als

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

Die Funktion heißt an der Stelle $\vec{x}$ **„partiell differenzierbar“**, wenn dieser Grenzwert existiert.

Diese Definition besagt lediglich:

Für die partielle Ableitung nach x_i halte alle anderen Variablen fest und fasse f als Funktion einer einzigen Variablen x_i auf. Dann differenziere wie üblich nach dieser Variablen.

Beispiel 5.2: Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + e^{x_1 \cdot x_2^3}$. Man berechnet sofort mit den Ableitungsregeln aus Kapitel 2:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + x_2^3 \cdot e^{x_1 \cdot x_2^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \cdot e^{x_1 \cdot x_2^3}.$$

Ein weiteres Beispiel: $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^3, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3 \cdot x^2 \cdot y^2.$$

Beispiel 5.3: Da eine partielle Ableitung nichts anderes ist als eine „gewöhnliche“ Ableitung, in der alle nicht beteiligten Variablen als konstante Parameter aufgefaßt werden, ist die schon bekannte MuPAD-Funktion `diff` auch für die Berechnung partieller Ableitungen zuständig:

```
>> f:= (x, y) -> x^2*y^3
>> diff(f(x, y), x)
          3
        2 x y
>> diff(f(x, y), y)
          2 2
        3 x y
```

Analog zum 1-dimensionalen Fall approximiert die partielle Ableitung nach x_i die Änderung von f , wenn sich x_i um eine Einheit ändert, wobei aber alle anderen Variablen festgehalten werden. Ändern sich alle Variablen, so gilt:

Interpretation der partiellen Ableitungen 5.4:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &\approx \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \end{aligned}$$

Beispiel 5.5: Betrachte $f(x, y) = x \cdot y^2$. Ändert sich x von 1 auf 1.01 und y von 1 auf 1.02, so ändert sich f um

$$\Delta f = f(1.01, 1.02) - f(1, 1) = 0.050804.$$

Dies wird an der Stelle $x = 1, y = 1$ approximiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y &= \underbrace{y^2}_1 \cdot \Delta x + \underbrace{2 \cdot x \cdot y}_2 \cdot \Delta y \\ &= \Delta x + 2 \cdot \Delta y = 0.01 + 2 \cdot 0.02 = 0.05. \end{aligned}$$

Das Konzept der Ableitungsfunktion sieht für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ folgendermaßen aus:

Definition 5.6: (Die Ableitungsmatrix)

Betrachte eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$:

$$\vec{f}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\vec{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Die „Ableitung von f an der Stelle $\vec{x}$ “ ist die $m \times n$ Matrix

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Sie heißt „Ableitungsmatrix“ oder auch „Jacobi-Matrix“.

Beispiel 5.7: Sei

$$\vec{f}(\underbrace{x, y}_{\vec{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x \cdot y \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungsmatrix an einer Stelle $\vec{x} = (x, y)$ ist

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Definition 5.8: (Der Gradient)

Für den Spezialfall $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt der (Zeilen-)Vektor der partiellen Ableitungen auch „Gradient“:

$$\text{grad } f(\vec{x}) = f'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right).$$

Da bei partiellen Ableitungen nur nach einer Variablen differenziert wird, können wir ohne Probleme komponentenweise mit den Regeln aus Kapitel 2 rechnen. Z.B. gilt für Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad (\text{Summenregel})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i} \quad (\text{Produktregel})$$

etc. Lediglich die Kettenregel verdient eine besondere Anmerkung:

Satz 5.9: (Die Kettenregel im mehrdimensionalen Fall)

Sei $\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, sei $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$. Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$. Betrachte die durch $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$ definierte Verknüpfung $\vec{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$. Die Ableitungsmatrix von $\vec{h}$ am Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die $p \times n$ Matrix

$$\vec{h}'(\vec{x}) = \underbrace{\vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))}_{p \times m} \cdot \underbrace{\vec{g}'(\vec{x})}_{m \times n}.$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{y})}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p(\vec{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p(\vec{y})}{\partial y_m} \end{pmatrix}}_{\text{„äußere Ableitung“}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{„innere Ableitung“}}.$$

Beispiel 5.10: Betrachte $f(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$. Seien y_1, y_2 Funktionen von x :

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderschaltung $h(x) = f(\vec{y}) = f(\vec{g}(x)) = x^2 \cdot x^3 = x^5$ ist eine Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ mit der Ableitung $h'(x) = 5 \cdot x^4$. Über die Kettenregel ergibt sich dasselbe Resultat:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \underbrace{f'(\vec{g}(x))}_{1 \times 2} \cdot \underbrace{\vec{g}'(x)}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^3 & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \end{pmatrix} = x^3 \cdot 2 \cdot x + x^2 \cdot 3 \cdot x^2 = 5 \cdot x^4. \end{aligned}$$

Beispiel 5.11: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit der Eigenschaft

$$f(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, \dots, x_n) \quad (\#)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt „**homogen vom Grad** r “. Beispiel: $f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot y$ ist homogen vom Grad 3, denn

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x)^3 + (\lambda \cdot x)^2 \cdot (\lambda \cdot y) = \lambda^3 \cdot (x^3 + x^2 \cdot y) = \lambda^3 \cdot f(x, y).$$

19.6.01↓

Wir differenzieren die linke Seite von (#) nach λ : Dazu fixieren wir $x_1, \dots, x_n$ und betrachten

$$\vec{g}(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) \\ \vdots \\ g_n(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$h(\lambda) = f(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) = f(\vec{g}(\lambda)).$$

Über die Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} h'(\lambda) &= f'(g(\lambda)) \cdot g'(\lambda) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)) + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)). \end{aligned}$$

Andererseits ist $h'(\lambda)$ durch Differenzieren der rechten Seite von (#) nach λ auch gleich

$$h'(\lambda) = r \cdot \lambda^{r-1} \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Es folgt die Gleichung

$$h'(\lambda) = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{g}(\lambda)) + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{g}(\lambda)) = r \cdot \lambda^{r-1} \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich die hieraus die allgemeine Identität

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = r \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

für homogene Funktionen vom Grad r . Man nennt dies die „**Eulersche Homogenitätsrelation**“.

Beispiel: für $f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot y$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cdot (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y) + y \cdot x^2 \\ &= 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y = 3 \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Definition 5.12: (Höhere partielle Ableitungen)

Da für $f = f(x_1, \dots, x_n)$ die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ selbst wieder Funktionen von $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sind, kann man sie erneut partiell ableiten. Es ergeben sich „**zweite partielle Ableitungen**“, die folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right).$$

Für $i = j$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2}.$$

Höhere partielle Ableitungen werden analog definiert.

Beispiel 5.13: Betrachte $f(x, y) = \sin(x) \cdot y^3$. Man berechnet folgende erste partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) \cdot y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) \cdot 3 \cdot y^2.$$

Hieraus folgen die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin(x) \cdot y^3, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \cos(x) \cdot 3 \cdot y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos(x) \cdot 3 \cdot y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin(x) \cdot 6 \cdot y. \end{aligned}$$

Man beobachtet: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Dies ist kein Zufall, sondern ein allgemeines Gesetz!

In MuPAD:

```
>> f:= (x, y) -> sin(x)*y^3:
>> diff(f(x, y), x, x)
          3
        - y  sin(x)
>> diff(f(x, y), x, y)
          2
        3 y  cos(x)
>> diff(f(x, y), y, x)
          2
        3 y  cos(x)
>> diff(f(x, y), y, y)
        6 y sin(x)
```

26.6.01↓

Satz 5.14: (Partielle Ableitungen sind symmetrisch)

Sind die (höheren) partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ stetige Funktionen, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Zweite partielle Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ lassen sich in einer Matrix zusammenfassen.

Definition 5.15: (Die Hesse-Matrix)

Für $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ nennt man die $n \times n$ Matrix $H(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ der zweiten partiellen Ableitungen die „**Hesse-Matrix**“ von f am Punkt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

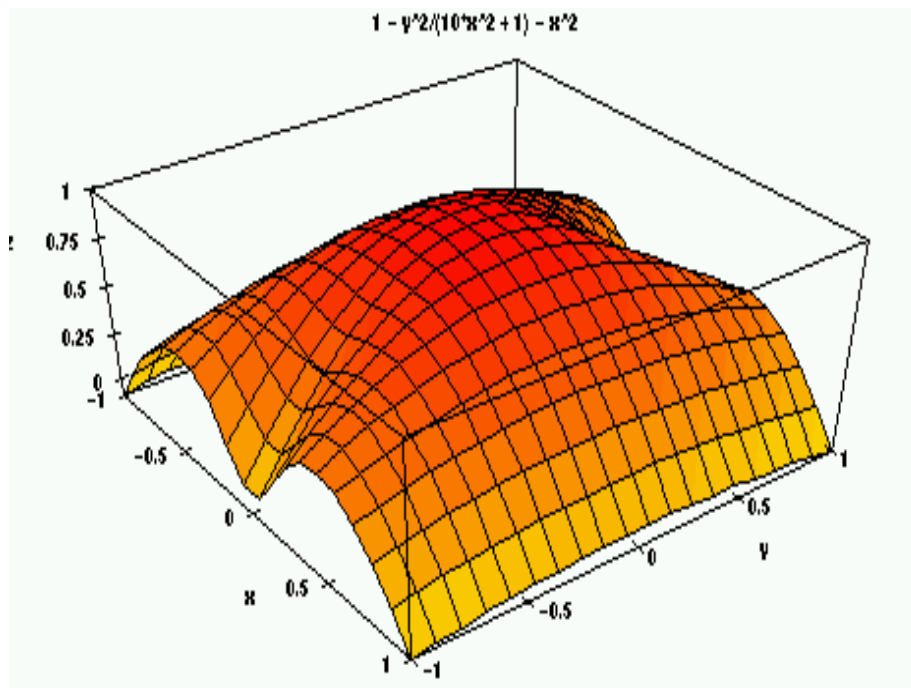
Wegen Satz 5.14 ist diese Matrix symmetrisch.

5.2 Extrema

Gesucht sind die (lokalen) Extrema einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots)$.

Beispiel 5.16: Mit `plotfunc3d` können in MuPAD die Graphen von Funktionen zweier Variabler gezeichnet werden. Die folgende Funktion $f(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+10 \cdot x^2}$ hat ein lokales Maximum, das graphisch in der Nähe des Ursprungs $x = 0, y = 0$ zu liegen scheint:

```
>> f:= (x, y) -> 1 - x^2 - y^2/(1 + 10*x^2):
>> plotfunc3d(f(x, y), x = -1..1, y = -1..1)
```



Eine genauere Berechnung des Maximums wird in Beispiel 5.18 erfolgen.

Betrachten wir die Situation, daß $\vec{x}^*$ ein lokales Maximum von $f(x_1, x_2, \dots)$ ist. Ändern wir am Punkt $\vec{x}^*$ startend die Variable x_1 und halten alle anderen Variablen dabei fest, so betrachten wir f als Funktion nur einer Variablen x_1 . Liegt am Punkt $\vec{x}^*$ ein Maximum vor, so verkleinern sich die Funktionswerte, wenn x_1 variiert. Damit hat auch f als Funktion von x_1 (mit konstantem $x_2, x_3, \dots$) ein Maximum, d.h., die Ableitung nach x_1 muß verschwinden. Für konstantes $x_2, x_3, \dots$ ist die x_1 -Ableitung aber die partielle Ableitung nach x_1 , die an einem Maximum also verschwinden muß. Dieselbe Überlegung gilt für alle anderen Variablen auch:

Satz 5.17: (An Extremstellen verschwindet der Gradient)

Hat eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ an einem Punkt $\vec{x}^ \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so verschwinden dort alle partiellen Ableitungen:*

$$f'(\vec{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \right) = (0, \dots, 0).$$

Dieser Satz liefert eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:

Um Extrema zu suchen, braucht man nur diejenigen Punkte zu betrachten, an denen der Gradient der Funktion verschwindet. Bei n Variablen liefern die n Komponenten des Gradienten n Gleichungen für die n gesuchten Variablenwerte.

Beispiel 5.18: Betrachte die Funktion $f(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+10 \cdot x^2}$ aus Beispiel 5.16, die graphisch in der Nähe des Ursprungs ein lokales Maximum hat. Um den Punkt genau zu bestimmen, berechnen wir den Gradienten und setzen alle Komponenten 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \cdot x + \frac{y^2 \cdot 20 \cdot x}{(1 + 10 \cdot x^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2 \cdot y}{1 + 10 \cdot x^2} = 0.$$

Dies liefert zwei Gleichungen für die Komponenten x, y potentieller Extrema. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $y = 0$ und damit aus der ersten Gleichung dann zwingend $x = 0$. Also kann nur der Ursprung $x = 0, y = 0$ ein lokales Extremum von f sein. Daß es sich dabei um ein Maximum handelt, haben wir in Beispiel 5.16 graphisch überprüft.

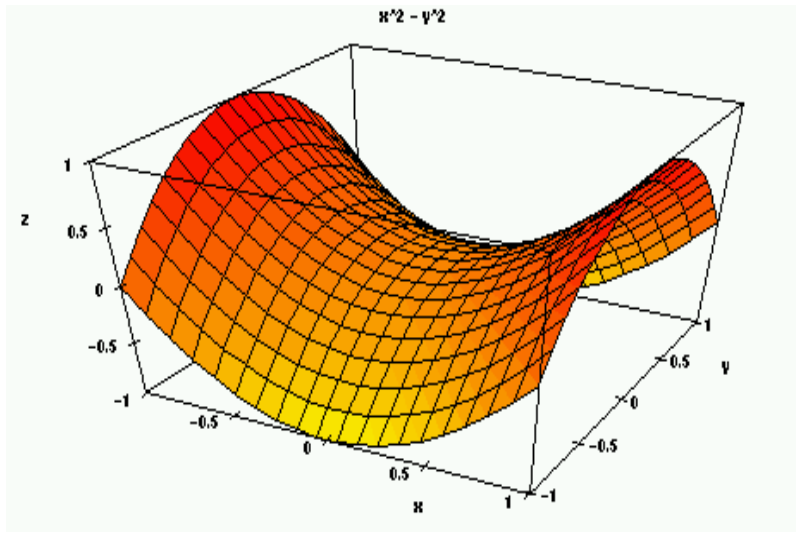
Die durch Lösung der Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ gefundenen Punkte sind nur Kandidaten für Extrema. Es kann sich statt um Extrema auch um sogenannte Sattelpunkte handeln:

Beispiel 5.19: Für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ gilt am Ursprung $x = 0, y = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Dort liegt jedoch kein Extremum vor:

>> plotfunc3d(x^2 - y^2, x = -1..1, y = -1..1)



Damit stellt sich wiederum die Frage nach hinreichenden Kriterien für Extrema. In Analogie zu Satz 2.27 kann mittels zweiter (partieller) Ableitungen entschieden werden, ob an Stellen, wo der Gradient verschwindet, in der Tat ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Zunächst der Spezialfall einer Funktion mit zwei Variablen:

Satz 5.20: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

An der Stelle $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ verschwinde der Gradient von $f(x, y)$. Falls für die Determinante der Hesse-Matrix

$$\begin{aligned} \det(H(\vec{x}^*)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*) \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

gilt, ist $\vec{x}^*$ ein Extremum. Gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) > 0$, so handelt es sich um ein Minimum, bei $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) < 0$ um ein Maximum.

Gilt $\det(H(\vec{x}^*)) < 0$, so ist $\vec{x}^*$ ein Sattelpunkt.

Beispiel 5.21: Für die Funktion $f(x, y) = x^2 + x \cdot y^3 + y^2$ verschwindet der Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x + y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot y$$

am Nullpunkt. Die Hesse-Matrix

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot y^2 \\ 3 \cdot y^2 & 6 \cdot x \cdot y + 2 \end{pmatrix}$$

nimmt dort den Wert

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an. Mit $\det(H(0, 0)) = 4 > 0$ ist der Nullpunkt damit ein Extremum. Wegen $H(0, 0)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

Definition 5.22: (Positiv/negativ definite Matrizen)

Eine symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (A_{ij}) = (A_{ji})$ heißt „**positiv definit**“, wenn die folgenden n Determinantenbedingungen erfüllt sind:

$$A_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} > 0.$$

Die Matrix A heißt „**negativ definit**“, wenn die negative Matrix $-A$ positiv definit ist.

Beispiel 5.23: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, denn $A_{11} = 1 > 0$ und $\det(A) = 5 - 4 = 1 > 0$.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

ist nicht positiv definit: zwar gilt $\det(A) = 5 - 4 = 1 > 0$, aber $A_{11} = -1 < 0$. Sie ist jedoch negativ definit, denn

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist mit $(-A)_{11} = 1 > 0$ und $\det(-A) = 5 - 4 = 1 > 0$ positiv definit.

Im allgemeinen Fall von Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ liefert die Definitheit der Hesse-Matrix ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema. Satz 5.20 ist der Spezialfall $n = 2$ des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 5.24: (Hinreichende Kriterien für Extrema, der allgemeine Fall)

An der Stelle $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ verschwinde der Gradient von $f(x_1, \dots, x_n)$.

Ist die Hesse-Matrix $H(\vec{x}^*) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^*) \right)$ dort positiv definit, so ist $\vec{x}^*$ ein lokales Minimum. Ist $H(\vec{x}^*)$ negativ definit, so ist $\vec{x}^*$ ein lokales Maximum.

Beispiel 5.25: Betrachte $f(x, y, z) = e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} - \frac{z^2}{2}$. Die potentiellen Extrema sind alle Lösungen der Gleichungen

↓29.6.01

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot (1-x) \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot y \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar als einzige Lösung $x = 1, y = 0, z = 0$ (die Exponentialfunktion kann niemals 0 werden). Damit ist $\vec{x}^* = (1, 0, 0)$ der einzige Kandidat für ein Extremum. Die Hesse-Matrix an diesem Punkt ist

$$\begin{aligned} H(\vec{x}^*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\vec{x}^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4 \cdot (1-x)^2 - 2) \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} & -4 \cdot (1-x) \cdot y \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} & 0 \\ -4 \cdot (1-x) \cdot y \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} & (4 \cdot y^2 - 2) \cdot e^{-x^2+2 \cdot x-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=0 \\ z=0}} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot e & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot e & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit, denn

$$-H(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

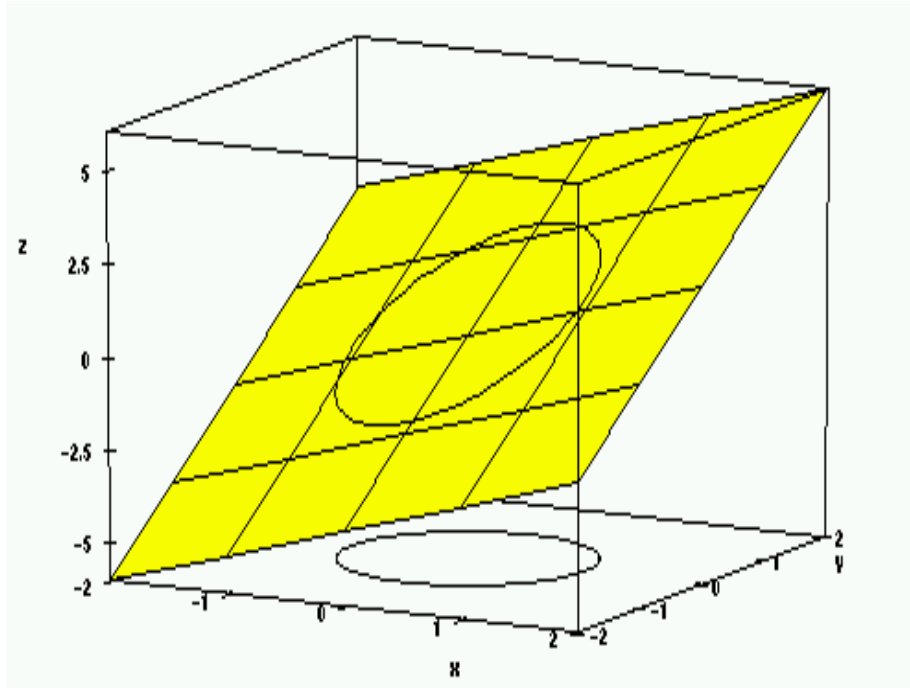
ist nach den Kriterien der Definition 5.22 positiv definit. Damit ist der Nullpunkt ein lokales Maximum.

```
>> f:= exp(-x^2 + 2*x - y^2) - z^2/2:
>> linalg::grad(f, [x, y, z])
```

Zur Vereinfachung der Hesse-Matrix wird mit der Funktion `map` die Funktion `factor` auf alle Matrixkomponenten geschickt:

Der Punkt $x = 1, y = 0, z = 0$ wird eingesetzt:

$$\begin{array}{ccccc} + & - & & & + \\ | & -2 \exp(1), & 0, & 0 & | \\ | & & & & | \\ | & 0, & -2 \exp(1), & 0 & | \\ | & & & & | \\ | & 0, & 0, & -1 & | \\ + & - & & & + \end{array}$$



3.7.01↓

Satz 5.29: (Die Lagrangesche Multiplikatoren-Methode)

Seien $f(x_1, \dots, x_n)$ und $g(x_1, \dots, x_n)$ differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Für einen Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, der $g(\vec{x}^*) = 0$ erfüllt und f maximiert oder minimiert, sind die Gradienten von f und g parallele Vektoren. D.h., es gibt einen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ sodaß

$$f'(\vec{x}^*) = \lambda \cdot g'(\vec{x}^*).$$

Die n Komponenten dieser Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

zusammen mit der Nebenbedingung $g(\vec{x}^*) = 0$ bilden $n + 1$ Gleichungen für die n Komponenten von $\vec{x}^*$ und λ .

Der Wert λ heißt „**Lagrange-Multiplikator**“.

Beispiel 5.30: Betrachte das Dosenproblem aus Beispiel 5.27: finde das Minimum von

$$f(r, h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - V = 0.$$

Satz 5.29 besagt, daß für das Minimum gelten muß:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial r} \Rightarrow 4 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot h = \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h, \\ \frac{\partial f}{\partial h} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = \lambda \cdot \pi \cdot r^2.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung ergeben sich die 3 Gleichungen

$$2 \cdot r + h = \lambda \cdot r \cdot h, \quad 2 = \lambda \cdot r, \quad r^2 \cdot h = \frac{V}{\pi}$$

für die 3 Unbekannten r , h und λ (der Wert von λ interessiert nicht wirklich). Aus der zweiten Gleichung wird $\lambda \cdot r = 2$ in die erste Gleichung eingesetzt, es folgt:

$$2 \cdot r + h = 2 \cdot h, \quad \text{also } 2 \cdot r = h.$$

Die Nebenbedingung liefert damit

$$r^2 \cdot h = 2 \cdot r^3 = \frac{h^3}{4} = \frac{V}{\pi}.$$

Damit ergibt sich die Geometrie der Dose zu

$$h = 2 \cdot r = \left(\frac{4 \cdot V}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Anmerkung: in diesem Beispiel ist die Nebenbedingung $g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - V = 0$ so einfach, daß man sie direkt nach einer der Variablen auflösen kann: $h = h(r) = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$. Diesen Wert kann man in die zu minimierende Funktion stecken, damit wird $f(r, h)$ zu einer Funktion einer einzigen Variable r , die wir k nennen:

$$k(r) = f(r, h(r)) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{V}{r}.$$

Da mit $h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$ die Nebenbedingung identisch erfüllt ist, braucht man sich gar nicht mehr darum zu kümmern, und man kann direkt nach dem Minimum der Funktion $k(r)$ suchen:

$$\begin{aligned}k'(r) &= 4 \cdot \pi \cdot r - 2 \cdot \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4 \cdot \pi \cdot r^3 = 2 \cdot V \\ \Rightarrow r &= \left(\frac{V}{2 \cdot \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \left(\frac{V}{2 \cdot \pi} \right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{4 \cdot V}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Beispiel 5.31: Betrachte das Extremwertproblem für $f(x, y) = x + 2 \cdot y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ aus Beispiel 5.28. Satz 5.29 besagt, daß für die Extremstellen gelten muß:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow 1 = \lambda \cdot 2 \cdot x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow 2 = \lambda \cdot 2 \cdot y.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung ergeben sich die 3 Gleichungen

$$1 = \lambda \cdot 2 \cdot x, \quad 2 = \lambda \cdot 2 \cdot y, \quad x^2 + y^2 = 1$$

für die 3 Unbekannten x , y und λ (der Wert von λ interessiert nicht wirklich). Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $y = 2 \cdot x$. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, folgt

$$x^2 + 4 \cdot x^2 = 5 \cdot x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2 \cdot x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Der Graphik in Beispiel 5.28 entsprechend ist $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ein Maximum und $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ ein Minimum.

Ein weiteres Beispiel 5.34 findet sich im folgenden Abschnitt 5.4.

Bemerkung 5.32: Man kann die Extremwerte einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ auch dann mittels Lagrangescher Multiplikatoren bestimmen, wenn mehrere Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

(mit $m < n$) vorgegeben sind. Dann sind die n Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

zu lösen. Dies sind zusammen mit den m Nebenbedingungen insgesamt $n + m$ Gleichungen für die n Variablen $x_1, \dots, x_n$ und die m Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

5.4 Anwendungen in der Ökonomie

Beispiel 5.33: Ein Unternehmen produziert n verschiedene Güter mit den Ausstoßmengen $x_1, \dots, x_n$ (Einheiten pro Zeit). Es sei eine Kostenfunktion $K(x_1, \dots, x_n)$ gegeben. Die Güter kommen zum Preis $p_1, \dots, p_n$ auf den Markt. Wie operiert das Unternehmen gewinnmaximal, d.h., wie sind die Ausstoßmengen $x_1, \dots, x_n$ zu wählen, damit der Gewinn

$$G(x_1, \dots, x_n) = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n - K(x_1, \dots, x_n)$$

maximal wird? Nach Satz 5.17 muß für das Gewinnmaximum der Gradient von G verschwinden, also muß gelten:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = p_n - \frac{\partial K}{\partial x_n} = 0.$$

Ergebnis: die gewinnoptimalen Ausstoßmengen sind die Lösungen des folgenden (i.A. nichtlinearen) Gleichungssystems für $x_1, \dots, x_n$:

$$p_1 = \frac{\partial K}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad \dots \quad , \quad p_n = \frac{\partial K}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Hierbei wurde ein polypolistischer Anbieter vorausgesetzt: die Marktpreise p_i sind als unabhängig von der Produktion des Unternehmens angenommen. Hat man die Kostenfunktion $K(x_1, \dots, x_n)$ durch eine konkrete Modellfunktion vorgegeben, kann man daran gehen, durch Lösen der obigen Gleichungen den Gewinn zu maximieren.

Beispiel 5.34: Ein monopolistisches Unternehmen kann mit seinen vorhandenen Produktionsanlagen zwei Produkte herstellen. Die vorhandenen Anlagen sind geeignet, insgesamt X Einheiten pro Zeit zu produzieren, wobei die Maschinen jeweils das erste oder das zweite Produkt herstellen können. Mit den Ausstoßmengen x_1, x_2 (Einheiten pro Zeit) gilt damit die Nebenbedingung $x_1 + x_2 = X$. Die Nachfragefunktionen seien

$$x_1(p_1) = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1}, \quad x_2(p_2) = 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2},$$

wobei p_1, p_2 die Marktpreise der Produkte seien. Zu welchem Preis sollten die Produkte angeboten werden, um den Gesamterlös $E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$ zu maximieren?

Erster Lösungsweg: Wir entscheiden uns, alle Größen als Funktion von p_1 und p_2 zu betrachten. Es gilt

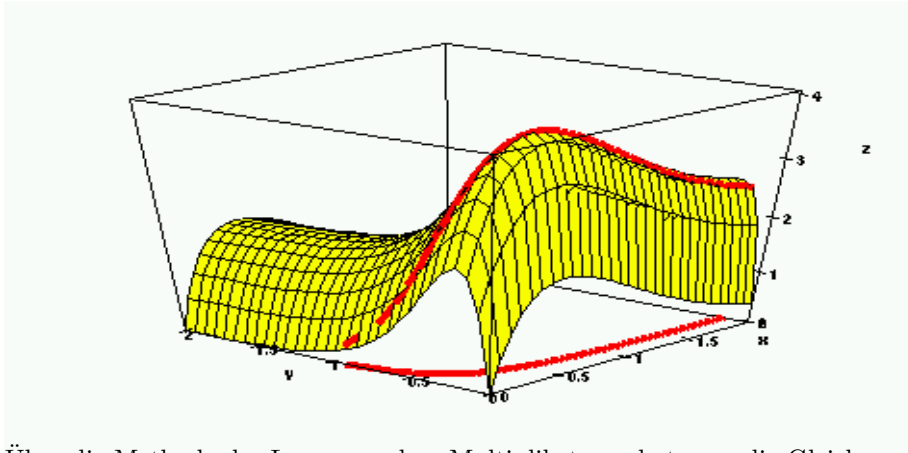
$$E(p_1, p_2) = p_1 \cdot x_1(p_1) + p_2 \cdot x_2(p_2) = p_1 \cdot 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + p_2 \cdot 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2}$$

zu maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(p_1, p_2) = x_1(p_1) + x_2(p_2) - X = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2} - X = 0.$$

In der folgenden Graphik ist der Graph der Erlösfunktion zusammen mit der Kurve eingezeichnet, die die Menge aller Punkte (p_1, p_2) darstellt, welche die Nebenbedingung $g(p_1, p_2) = 0$ (mit $X = 10$) löst. Man erkennt deutlich, daß die Erlösfunktion über dieser Kurve ein Maximum annimmt:

```
>> x1:= p1 -> 10*exp(-2*p1):
>> x2:= p2 -> 30*exp(-5*p2):
>> Erloes:= (p1, p2) -> p1*x1(p1) + p2*x2(p2):
>> plot(plot::Function3d(Erloes(p1, p2), p1 = 0 .. 2, p2 = 0 .. 2,
    Color = RGB::Yellow, Grid = [30, 30]),
    plot::Curve3d([p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5), 0],
    p1 = 0.01 .. 2, Color = RGB::Red, LineWidth = 30),
    plot::Curve3d([p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5),
    Erloes(p1, ln((10 - 10*exp(-2*p1))/20)/(-5)) ],
    p1 = 0.01 .. 2, Color = RGB::Red, LineWidth = 30)
):
```



6.7.01↓

Über die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial p_1} \Rightarrow (10 - 20 \cdot p_1) \cdot e^{-2 \cdot p_1} = \lambda \cdot (-20 \cdot e^{-2 \cdot p_1}),$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial p_2} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial p_2} \Rightarrow (30 - 150 \cdot p_2) \cdot e^{-5 \cdot p_2} = \lambda \cdot (-150 \cdot e^{-5 \cdot p_2})$$

zusammen mit der Nebenbedingung zu lösen, also (nach Vereinfachung der einzelnen Gleichungen):

$$1 - 2 \cdot p_1 = -2 \cdot \lambda, \quad 1 - 5 \cdot p_2 = -5 \cdot \lambda, \quad 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2} = X.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen kann man λ eliminieren:

$$5 \cdot (1 - 2 \cdot p_1) = -10 \cdot \lambda = 2 \cdot (1 - 5 \cdot p_2) \Rightarrow 5 - 10 \cdot p_1 = 2 - 10 \cdot p_2 \Rightarrow p_2 = p_1 - \frac{3}{10}.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, erhält man eine Gleichung für p_1 :

$$10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} + 30 \cdot e^{-5 \cdot (p_1 - \frac{3}{10})} = X.$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich nicht für beliebiges X durch eine explizite Formel darstellen: man ist drauf angewiesen, für zahlenmäßig gegebenes X diese Gleichung numerisch zu lösen. Sei z.B. $X = 10$:

```
>> numeric::solve(10*exp(-2*p1) + 30*exp(-5*(p1 - 3/10)) = 10, p1)
```

```
{0.5926751426}
```

```
>> p1:= %[1]:
```

```
>> p2:= p1 - 3/10
```

```
0.2926751426
```

```
>> x1(p1), x2(p2), x1(p1) + x2(p2)
```

3.056390999, 6.943609002, 10.0

```
>> MaxErloes = p1*x1(p1) + p2*x2(p2)
```

MaxErloes = 3.843668726

Zweiter Lösungsweg: Wir entscheiden uns, alle Größen als Funktion von x_1 und x_2 zu betrachten. Dazu sind zunächst die Preis-Nachfrage-Beziehungen $x_i(p_i)$ in $p_i(x_i)$ umzuformulieren:

$$x_1 = 10 \cdot e^{-2 \cdot p_1} \Rightarrow \frac{x_1}{10} = e^{-2 \cdot p_1} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) = -2 \cdot p_1 \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right),$$

$$x_2 = 30 \cdot e^{-5 \cdot p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{30} = e^{-5 \cdot p_2} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) = -5 \cdot p_2 \Rightarrow p_2 = -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right).$$

Damit ist

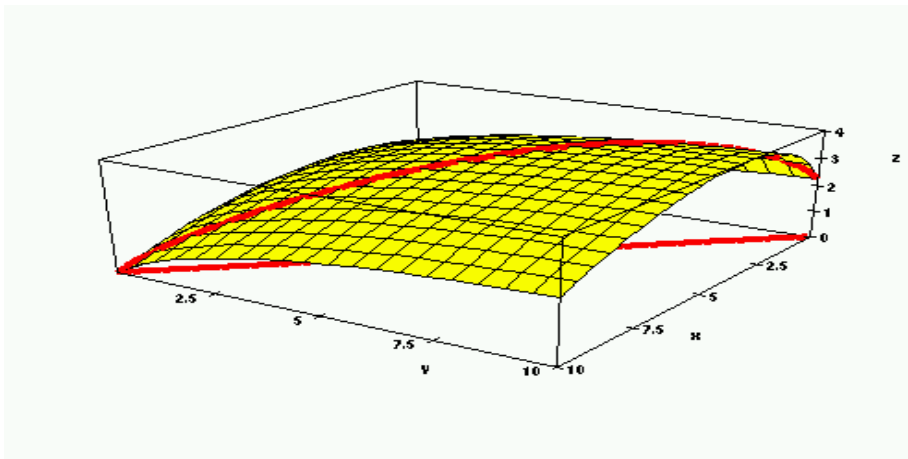
$$E(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot x_1 + p_2(x_2) \cdot x_2 = -\frac{x_1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) - \frac{x_2}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right)$$

zu maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - X = 0.$$

In der folgenden Graphik ist der Graph der Erlösfunktion zusammen mit der Kurve eingezeichnet, die die Menge aller Punkte (x_1, x_2) darstellt, welche die Nebenbedingung $x_1 + x_2 = X$ mit $X = 10$ löst. Man erkennt deutlich, daß die Erlösfunktion über dieser Geraden ein Maximum annimmt:

```
>> plot(plot::Function3d(Erloes(x1, x2), x1 = 0.01 .. 9.99, x2 = 0.01 .. 9.99,
      Color = RGB::Yellow),
      plot::Curve3d([x, 10 - x, 0], x = 0.01 .. 9.99,
      Color = RGB::Red, LineWidth = 30),
      plot::Curve3d([x, 10 - x, Erloes(x, 10-x) + 0.01], x = 0.01 .. 9.99,
      Color = RGB::Red, LineWidth = 30)
):
```



Über die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren hat man die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) - \frac{1}{2} = \lambda \cdot 1,$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \Rightarrow -\frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) - \frac{1}{5} = \lambda \cdot 1,$$

zusammen mit der Nebenbedingung zu lösen, also (nach Vereinfachung der einzelnen Gleichungen):

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) = \lambda, \quad -\frac{1}{5} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right) = \lambda, \quad x_1 + x_2 = X. \quad (\#\#)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen kann man λ eliminieren:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) &= -\frac{1}{5} \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right) \Rightarrow 5 \cdot \left(\ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + 1\right) = 2 \cdot \left(\ln\left(\frac{x_2}{30}\right) + 1\right) \\ \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + \frac{3}{2} &= \ln\left(\frac{x_2}{30}\right) \Rightarrow e^{\frac{5}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_1}{10}\right) + \frac{3}{2}} = \frac{x_2}{30} \\ \Rightarrow e^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{x_1}{10}\right)^{5/2}\right)} &= \frac{x_2}{30} \Rightarrow e^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{x_1}{10}\right)^{5/2} = \frac{x_2}{30}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung verbleiben die beiden Gleichungen

$$x_2 = 30 \cdot e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x_1^{5/2}}{10^{5/2}}, \quad x_1 + x_2 = X$$

für x_1, x_2 . Setzt man wiederum x_2 als Funktion von x_1 in die zweite Gleichung ein, verbleibt eine einzelne Gleichung für x_1 , die (für gegebenes X) numerisch zu lösen ist. Wir brechen diese Berechnung 'per Hand' hier ab (die letzte verbleibende Gleichung wäre ja sowieso nur numerisch zu lösen) und stecken gleich die 3 Gleichungen ($\#\#$) für x_1, x_2, λ in MuPADs numerischen Gleichungslöser (wobei wiederum $X = 10$ gewählt wird):

```
>> numeric::solve([-1/2*(ln(x1/10) + 1) = lambda,
                  -1/5*(ln(x2/30) + 1) = lambda,
                  x1 + x2 = 10], [x1, x2, lambda])

{[x1 = 3.056390999, x2 = 6.943609002, lambda = 0.09267514266]}

>> assign(%[1]):
>> p1(x1), p2(x2)

0.5926751427, 0.2926751427

>> MaxErloes = Erloes(x1, x2)

MaxErloes = 3.843668726
```

Natürlich kommt dasselbe Ergebnis heraus wie beim ersten Lösungsweg.
