

Kapitel 4

Integration

4.1 Stammfunktionen: das unbestimmte Integral

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation: zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ sucht man eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist.

4.1.1 Definitionen, Grundintegrale

Definition 4.1: (Stammfunktion)

$F(x)$ heißt „**Stammfunktion**“ einer (hinreichend glatten) Funktion $f(x)$, wenn $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ gilt. Alternativ nennt man $F(x)$ auch das „**unbestimmte Integral über $f(x)$** “ und benutzt auch die Notation $F(x) = \int f(x) dx$. Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralzeichen wird als „**Integrand**“ bezeichnet.

Bemerkung 4.2: Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Da die Ableitung einer konstanten Funktion überall 0 ist, kann man zu einer Stammfunktion eine beliebige Konstante hinzuaddieren, wobei man eine neue Stammfunktion erhält. Andererseits, hat $f(x)$ keine Singularitäten (Polstellen etc.), so sind Stammfunktionen stetig und die Differenz zweier stetiger Stammfunktionen ist immer eine Konstante.

Beispiel 4.3: Zu $f(x) = x$ sind $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ und $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 17$ Stammfunktion. Die beliebige additive Konstante in Stammfunktionen (die „**Integrationskonstante**“) wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Damit ist gemeint: $\int f(x) dx$ stellt die Klasse **aller** Stammfunktionen dar (d.h., in der Schreibweise $\int f(x) dx$ steckt die additive Konstante sozusagen im $\int$ -Symbol und

braucht nicht explizit hingeschrieben zu werden). Sobald das Integralzeichen durch einen konkreten Repräsentanten dieser Klasse (hier $\frac{x^2}{2}$) ersetzt wird, schreiben wir die beliebige additive Konstante explizit dazu.

Bemerkung 4.4: Mit dieser Konvention gilt trivialerweise für jede Funktion $F(x)$:

$$\int F'(x) dx = F(x) + c .$$

Grundintegrale 4.5:

Aus der in Satz 2.6 gegebenen (kleinen) Liste von Ableitungen erhält man eine (kleine) Liste von Stammfunktionen für die einfachen Grundfunktionen:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c, \quad (\text{Beispiel 2.18})$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c,$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c.$$

Beispiel 4.6: In MuPAD ist die Funktion `int` (engl.: integrate) für die Integration zuständig. Für die Integrationskonstante wird dabei vom System automatisch ein „besonders einfacher“ Wert gewählt:

```
>> int(cos(x), x)
```

```
sin(x)
```

```
>> int(x*sin(x)*exp(x), x)
```

```
cos(x) exp(x)  x cos(x) exp(x)  x sin(x) exp(x)
----- - ----- + -----
      2          2          2
```

Für aus den einfachen Grundfunktionen aufgebaute Funktionen würde man gern per Rechenregeln die Integration komplizierter Funktionen auf die Integration einfacher Funktionen zurückführen. Leider ist das nicht so einfach. In der Tat entspricht jeder Rechenregel der Differentiation (Satz 2.6, Satz 2.12) eine Regel für's Integrieren. Die sich ergebenden Regeln sind aber nicht so, daß man damit automatisch alle Integrationen auf Grundintegrale zurückführen kann. Zunächst die einfachsten Regeln:

Satz 4.7: (Summenregel)

Für beliebige Konstanten a, b und Funktionen $f(x), g(x)$ gilt

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx.$$

Das ist durch Differenzieren beider Seiten dieser Gleichung unmittelbar klar.

Merke:

Konstante Faktoren können stets aus dem Integralzeichen herausgezogen werden. Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale.

Beispiel 4.8:

$$\begin{aligned} \int \left(2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) dx &= 2 \cdot \int e^x dx + \int \frac{1}{\sqrt{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \cdot e^x + c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_2 = 2 \cdot e^x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \underbrace{c_1 + c_2}_c \\ &= 2 \cdot e^x + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x} + c = 2 \cdot e^x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die einzelnen Integrationskonstanten c_1, c_2 zu einer neuen beliebigen Konstanten $c = c_1 + c_2$ zusammengefaßt.

4.1.2 Partielle Integration

Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

der Differentiation gewinnt man durch Integration

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Diese Gleichung liefert eine Integrationsregel, die man „**partielle Integration**“ nennt:

Satz 4.9: (Partielle Integration)

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Bemerkung 4.10: Diese Regel ist in folgender Situation anwendbar:

- Der Integrand muß das Produkt zweier Funktionen sein.
- Von einem Faktor ($g'(x)$) muß man die Stammfunktion $g(x)$ kennen.

Ein Integral (über $f(x) \cdot g'(x)$) wird in ein anderes Integral (über $f'(x) \cdot g(x)$) überführt, es verbleibt also die Aufgabe, eine Stammfunktion zu finden. Allerdings ist manchmal das Produkt $f'(x) \cdot g(x)$ einfacher zu integrieren als das Ausgangsprodukt $f(x) \cdot g'(x)$:

- Sinnvoll ist partielle Integration meist, wenn die Ableitung $f'(x)$ „einfacher“ ist als $f(x)$ und $g(x)$ nicht wesentlich „komplizierter“ als $g'(x)$.

1.6.01↓

Beispiel 4.11: Im Integral $\int x \cdot \ln(x) dx$ ist $f(x) = \ln(x)$ eine „unangenehme“ Funktion, während $f'(x) = \frac{1}{x}$ als rationale Funktion wesentlich angenehmer ist:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} dx &= \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} dx \\ &= \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

Probe:

$$\frac{d}{dx} \left(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} + \ln(x) \cdot x - \frac{x}{2} = \ln(x) \cdot x.$$

Es gibt keine allgemeine Regel, was „einfach“ und was „kompliziert“ ist. Im obigen Fall war $f'(x) = \frac{1}{x}$ einfacher als $f(x) = \ln(x)$. Im folgenden Beispiel ist $f(x) = x$ „kompliziert“, zumindestens „komplizierter“ als $f'(x) = 1$:

Beispiel 4.12:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} dx \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = (x - 1) \cdot e^x + c. \end{aligned}$$

Manchmal braucht man einfach Erfahrung um zu sehen, daß partielle Integration hilfreich ist:

Beispiel 4.13:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^2 dx &= \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)} dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Das war bislang nicht sehr erfolgreich: $\int \sin(x)^2 dx$ wurde durch $\int \cos(x)^2 dx$ ausgedrückt. Allerdings gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, sodaß das verbleibende Integral wiederum durch das Ausgangsintegral ausgedrückt werden kann:

$$\int \cos(x)^2 dx = \int 1 dx - \int \sin(x)^2 dx = x - \int \sin(x)^2 dx.$$

Dies liefert eine Gleichung für $\int \sin(x)^2 dx$:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^2 dx &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2 dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \sin(x)^2 dx \\ \Rightarrow 2 \cdot \int \sin(x)^2 dx &= x - \sin(x) \cdot \cos(x) + c \\ \Rightarrow \int \sin(x)^2 dx &= \frac{1}{2} \cdot (x - \sin(x) \cdot \cos(x)) + c. \end{aligned}$$

4.1.3 Substitution

Aus der Kettenregel der Differentiation (mit $y = g(x)$)

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \left(\frac{d}{dy} F(y) \right) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

gewinnt man durch Integration

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Diese Gleichung liefert mit $f = F'$ eine Integrationsregel, die man „**Integration durch Substitution**“ nennt:

Satz 4.14: (Substitution)

Sie $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$. Mit $y = g(x)$ gilt

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{dy} dx = \int f(y) dy = F(y) + c = F(g(x)) + c.}$$

Hierbei läuft die Substitution auf Folgendes hinaus. Aus $y = g(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = g'(x)$, also formal

$$dy = g'(x) dx.$$

Eine Substitution bietet sich auf jeden Fall an, wenn der Integrand einen Faktor $g'(x)$ enthält, der die Ableitung eines Teilausdrucks $g(x)$ im anderen Faktor ist:

Beispiel 4.15: In $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$ bietet es sich an, $y = g(x) = \sin(x)$ zu substituieren, denn die Ableitung $g'(x) = \cos(x)$ taucht als Faktor im Integranden auf. Es ergibt sich

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = \int \overbrace{e^{\sin(x)}}^{y=g(x)} \underbrace{\cos(x) dx}_{g'(x) \cdot dx=dy} = \int e^y dy = e^y + c = e^{\sin(x)} + c.$$

Beispiel 4.16: Wir kennen $\int \frac{1}{y} dy = \ln(|y|)$. Wie steht es mit $\int \frac{1}{a \cdot x + b} dx$? Dies ist ein Fall für die Substitution. Wir setzen $y = g(x) = a \cdot x + b$ (also $dy = a dx$) und erweitern mit a , sodaß $dx = \frac{1}{a} \cdot a dx = \frac{1}{a} dy$ auftaucht:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a \cdot x + b} dx &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{a \cdot x + b} \cdot \overbrace{\frac{dy}{a}}^{dy=g'(x)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{a} \cdot \ln(|y|) + c = \frac{1}{a} \cdot \ln(|a \cdot x + b|) + c. \end{aligned}$$

5.6.01↓

Beispiel 4.17: In $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ bietet sich die Substitution $y = f(x)$ an:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln(|y|) + c = \ln(|f(x)|) + c.$$

Bemerkung 4.18: Es bietet sich allgemein an, eine Substitution $y = g(x)$ in einem Integral $\int h(x) dx$ technisch folgendermaßen durchzuführen:

- Setze $y = g(x)$ und berechne die Ableitung $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Formal gilt $dy = g'(x) dx$.
- Ersetze dx durch $\frac{dy}{g'(x)}$. Drücke im neuen Integranden $h(x) dx = \frac{h(x)}{g'(x)} dy$ jedes x durch y aus.

- Es entsteht ein Ausdruck

$$\int h(x) dx = \int \underbrace{h(x(y)) \cdot \frac{1}{g'(x(y))}}_{f(y)} dy = \int f(y) dy.$$

Versuche, eine Stammfunktion $F(y) = \int f(y) dy$ zu finden.

- „**Rücksubstitution**“: Setze $y = g(x)$ in $F(y)$ ein. Die gesuchte Stammfunktion des ursprünglichen Ausdrucks ist $F(g(x))$.

Manchmal ist es nicht offensichtlich, was man substituieren sollte. Hier hilft nur Erfahrung oder ein guter Tip:

Beispiel 4.19: Substituiere $y = \sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($\Rightarrow dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$) in

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} dx = \int y \cdot e^y \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x} dy}_{dx} = 2 \cdot \int y^2 \cdot e^y dy.$$

Das verbleibende Integral in y kann durch zweifache partielle Integration gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g'(y)} dy &= 2 \cdot \underbrace{y^2}_{f(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)} - 2 \cdot \int \underbrace{2 \cdot y}_{f'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{g(y)} dy \\ &= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \int \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G'(y)} dy = 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot \underbrace{y}_{F(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)} + 4 \cdot \int \underbrace{1}_{F'(y)} \cdot \underbrace{e^y}_{G(y)} dy \\ &= 2 \cdot y^2 \cdot e^y - 4 \cdot y \cdot e^y + 4 \cdot e^y + c. \end{aligned}$$

Rücksubstitution $y = \sqrt{x}$ liefert letztlich:

$$\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot x \cdot e^{\sqrt{x}} - 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 4 \cdot e^{\sqrt{x}} + c.$$

4.1.4 Rationale Integranden: Partialbruchzerlegung

Rationale Integranden lassen sich über die Technik der „Partialbruchzerlegung“ immer so umformulieren, daß man eine Stammfunktion bestimmen kann. Hier der Spezialfall, wenn das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen hat:

Satz 4.20: (Partialbruchzerlegung)

Betrachte $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, wobei $\text{grad}(p(x)) < \text{grad}(q(x))$ gelte. Hat das Nennerpolynom $q(x)$ nur einfache Nullstellen $x_1, \dots, x_n$, so gibt es Konstanten $c_1, \dots, c_n$, sodaß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - x_1} + \dots + \frac{c_n}{x - x_n}.$$

Damit folgt dann

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = c_1 \cdot \ln(|x - x_1|) + \dots + c_n \cdot \ln(|x - x_n|) + c.$$

Beispiel 4.21: Die technische Durchführung geschieht folgendermaßen:

1) Ansatz:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x - 1) \cdot (x + 2)} = \frac{c_1}{x - 1} + \frac{c_2}{x + 2}.$$

2) Bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner:

$$\frac{c_1}{x - 1} + \frac{c_2}{x + 2} = \frac{c_1 \cdot (x + 2) + c_2 \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 2)}$$

3) Ordne den Zähler nach Potenzen von x :

$$\frac{c_1 \cdot (x + 2) + c_2 \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x - 1) \cdot (x + 2)}.$$

4) Der Ansatz lautet nun:

$$\frac{3 \cdot x + 4}{(x - 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot x + (2 \cdot c_1 - c_2)}{(x - 1) \cdot (x + 2)}.$$

Die Nenner stimmen nach Konstruktion überein. Es verbleibt, die Konstanten c_1, c_2 so zu bestimmen, daß auch die Zähler für alle x übereinstimmen. Vergleiche dazu im Zähler die Koeffizienten vor jeder x -Potenz:

$$3 = c_1 + c_2, \quad 4 = 2 \cdot c_1 - c_2.$$

4) Löse das entstandene lineare Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten:

$$c_1 = \frac{7}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}.$$

Ergebnis:

$$\int \frac{3 \cdot x + 4}{(x - 1) \cdot (x + 2)} dx = \int \left(\frac{\frac{7}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{2}{3}}{x + 2} \right) dx = \frac{7}{3} \ln(|x - 1|) + \frac{2}{3} \ln(|x + 2|) + c.$$

Beispiel 4.22: In MuPAD ist die Funktion `partfrac` (engl.: partial fraction) für die Partialbruchzerlegung zuständig:

```
>> partfrac((3*x + 4) / ((x - 1)*(x + 2)), x)
```

$$\frac{7}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)}$$

Bemerkung 4.23: Die Partialbruchzerlegung haben wir schon früher beim Summieren rationaler Ausdrücke kennengelernt: siehe Beispiel 1.38.

Bemerkung 4.24: Hat man einen rationalen Integranden $\frac{p(x)}{q(x)}$, bei dem der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms (dies wird in Satz 4.20 vorausgesetzt), so ist dies auch kein Problem. Durch Polynomdivision kann man einen polynomialen Anteil abspalten, z.B.:

$$\frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = 2 \cdot x + 1 + \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 1}.$$

Die Division wird dabei wie mit Zahlen durchgeführt (man zieht sukzessiv den „führenden Term“ durch ein geeignetes Vielfaches des Nenners ab):

$$\begin{array}{r} 2 \cdot x^3 + x^2 + 2 \\ 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x \\ \hline x^2 + 2 \cdot x + 2 \\ x^2 - 1 \\ \hline 2 \cdot x + 3 \end{array} \quad : \quad x^2 - 1 \quad = \quad 2 \cdot x + 3 \quad (\text{der Rest})$$

Der verbleibende Rest kann durch Partialbruchzerlegung additiv zerlegt werden, das Ergebnis ist:

```
>> partfrac((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 - 1), x)
```

$$2x + \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + 1$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 2}{(x^2 - 1)} dx &= \int \left(2 \cdot x + 1 + \frac{\frac{5}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx \\ &= x^2 + x + \frac{5}{2} \ln(|x-1|) - \frac{1}{2} \ln(|x+1|) + c. \end{aligned}$$

Probe mit MuPAD:

```
>> int((2*x^3 + x^2 + 2)/(x^2 - 1), x)
```

$$x + x^2 + \frac{5 \ln(x - 1)}{2} - \frac{\ln(x + 1)}{2}$$

(MuPAD verzichtet darauf, innerhalb des $\ln$ Betragszeichen einzutragen, denn MuPAD kann mit komplexen Zahlen umgehen. Für positives x gilt $\ln(-x) = \sqrt{-1} \cdot \pi + \ln(x)$, d.h., $\ln(-x)$ und $\ln(x)$ stimmen bis auf eine additive (komplexe) Konstante überein. Diese kann in die Integrationskonstante absorbiert werden).

8.6.01↓

Bemerkung 4.25: Für die Partialbruchzerlegung braucht man die Faktorisierung $q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ des Nennerpolynoms, d.h., man muß die Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ von $q(x)$ finden. Kennt man eine Nullstelle x_1 , so kann man die Suche nach weiteren Nullstellen vereinfachen, indem man $\tilde{q}(x) = \frac{q(x)}{x - x_1}$ durch Polynomdivision ausrechnet. Die Division geht auf, wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist, denn mit $q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ folgt

$$\tilde{q}(x) = \frac{q(x)}{x - x_1} = (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Dieses „Restpolynom“ enthält die verbleibenden Nullstellen. Beispiel:

$$q(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1.$$

Durch Raten hat man die erste Nullstelle $x_1 = 1$ gefunden. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1 : x - 1 = x^2 - 2 \cdot x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ - 2 \cdot x^2 + x + 1 \\ \underline{- 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x} \\ - x + 1 \\ \underline{- x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Mit

$$\frac{q(x)}{x - 1} = x^2 - 2 \cdot x - 1$$

findet man die weiteren Nullstellen

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

von $q(x)$ über die übliche Lösungsformel für quadratische Polynome.