Kapitel 3

Differentialrechnung in der Ökonomie

Ökonomische Bezeichnungen 3.1:

Sei $f(x)$ eine „ökonomische Funktion" (z.B., Erlös, Gewinn, Kosten etc.). Die Ableitung $f'(x)$ wird als **„Grenzfunktion"** *(„Grenzerlös", „Grenzgewinn", „Grenzkosten" etc.) oder auch als* **„marginale"** *Funktion bezeichnet („marginaler Erlös", „marginaler Gewinn", „marginale Kosten" etc.).*

Für die Ökonomie ist die Interpretation

$$\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

die wohl wichtigste Anwendung der Ableitung einer Funktion $f(x)$. Dies Formel beantwortet die Frage: wie stark ändert sich f von $f(x)$ auf $f(x) + \Delta f$, wenn sich x auf $x + \Delta x$ ändert?

Beispiel 3.2: Sei x mein Einkommen, seien $f(x)$ die Steuern, die ich zu zahlen habe. Wächst mein Einkommen um $\Delta x = 1$ DM, so gibt die „Grenzsteuer" $f'(x)$ $(= f'(x) \cdot 1$ DM) in sehr guter Näherung an, wieviel zusätzliche Steuern Δf ich für diese 1 DM zu zahlen habe.

$\boxed{\downarrow 29.5.01}$

Oft ist es günstiger, Änderungen einer Größe x nicht in absoluten Einheiten Δx anzugeben, sondern als **relative** Änderung $\frac{\Delta x}{x}$ (diese kann stets in % angegeben werden). Beispielsweise ist es bei einer Nachfragefunktion $x(p)$ wenig sinnvoll zu fragen, wie sich die Nachfrage x ändert, wenn sich der Preis p um $\Delta p = 1$ DM ändert: 1 DM ist beim Preis eines Autos eine sehr kleine Änderung, bei einem Liter Benzin ist ein Preisunterschied von 1 DM gewaltig. Die sinnvollere Frage ist oft:

Um wieviel Prozent ändert sich $f(x)$, wenn sich x um 1 % ändert?

Gesucht ist der Faktor $\epsilon_{f,x}$, sodaß

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \epsilon_{f,x} \frac{\Delta x}{x}$$

gilt. Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ ist der gesuchte Faktor

$$\epsilon_{f,x} \approx \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} \stackrel{(\Delta x \to 0)}{\longrightarrow} \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

Definition 3.3: (Elastizität)

Sei f differenzierbar an der Stelle x, sei $f(x) \neq 0$. Dann heißt

$$\epsilon_{f,x} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

die **„Elastizität von f bezüglich x“**.

Gilt $\epsilon_{f,x} = 0$, so heißt f **„starr“**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| < 1$, so heißt f **„unelastisch“**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| = 1$, so heißt f **„proportional elastisch“**.

Gilt $|\epsilon_{f,x}| > 1$, so heißt f **„elastisch“**.

Merke 3.4:

Die Elastizität einer Funktion $f(x)$ gibt an, wie sich eine kleine relative Änderung von x zu einer relativen Änderung von $f(x)$ verstärkt.

Die Elastizität einer Umkehrfunktion ergibt sich aus der Elastizität der Funktion:

Satz 3.5: (Elastizität von Umkehrfunktionen)

Mit $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ gilt: $\quad \epsilon_{f^{-1},y} = \dfrac{1}{\epsilon_{f,x}}$.

Beweis: Nach Satz 2.17 gilt $f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)}$, also

$$\epsilon_{f^{-1},y} = \frac{f^{-1\prime}(y) \cdot y}{f^{-1}(y)} = \frac{y}{f'(x) \cdot f^{-1}(y)} = \frac{1}{\frac{f'(x) \cdot f^{-1}(y)}{y}} = \frac{1}{\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}} = \frac{1}{\epsilon_{f,x}}.$$

$\square$

Beispiel 3.6: Eine Fabrik erzeugt ein bestimmtes Produkt, der Ausstoß sei x (Einheiten des Produkts pro Zeiteinheit). Die Kosten der Produktion von x Einheiten sei $K(x)$, die Stückkosten sind damit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.
Die Stückkosten sind nicht konstant: z.B. verteilen sich fixe (von x unabhängige) Grundkosten wie etwa Entwicklungskosten, der Bau der Produktionsanlage, Personalkosten etc. auf alle hergestellten Einheiten: je mehr produziert wird, umso geringer die Stückkosten. Eine mögliche Modellfunktion, die dieses Verhalten beschreibt, könnte folgendermaßen aussehen:

$$K(x) = K_0 + K_1 \cdot x, \quad \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_0}{x} + K_1.$$

K_0 wären die fixen Grundkosten, K_1 wären die „Materialkosten" bei der Herstellung einer Einheit. Die Elastizität der Kosten bezüglich der Produktionsmenge ist

$$\epsilon_{K,x} = \frac{K_1 \cdot x}{K_0 + K_1 \cdot x}.$$

Mit $x > 0$, $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ liegt diese Elastizität stets zwischen 0 und 1, die Kosten sind also stets elastisch. Das ist günstig: steigert man die Produktion, steigen die Kosten unterproportional. Das war eigentlich klar, denn die Stückkosten $\bar{K}(x)$ sinken im obigen Modell monoton mit der Produktion x. In der Tat gibt es stets ein Zusammenhang zwischen Elastizität und der Monotonie der „durchschnittlichen" (= „Stück"–) Kosten, wie der folgende Satz 3.8.b) besagt.

Ökonomische Bezeichnungen 3.7:

Zu gegebenem $f(x)$ wird die Funktion $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$ als **„Durchschnittsfunktion"** *bezeichnet (z.B. $\bar{f}(x)$ = „Durchschnittskosten" = „Stückkosten", wenn f die Kostenfunktion ist).*

Satz 3.8: (Zusammenhänge zwischen Durchschnitt und Elastizität)

$$a) \quad \frac{d}{dx}\, f(x) = \bar{f}(x) \cdot (1 + \epsilon_{\bar{f},x}), \qquad b) \quad \frac{d}{dx}\, \bar{f}(x) = \frac{\bar{f}(x)}{x} \cdot (\epsilon_{f,x} - 1).$$

Beweis:
a) Einfaches Nachrechnen:

$$\bar{f}(x) \cdot (1 + \epsilon_{\bar{f},x}) = \bar{f}(x) \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{x}\right) \cdot x}{\bar{f}(x)}\right) = \bar{f}(x) + \left(\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{x}\right) \cdot x$$

$$= \frac{f(x)}{x} + \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \cdot x = \frac{f(x)}{x} + \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x} = f'(x).$$

b) Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\ \frac{f(x)}{x} = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}\cdot\Big(\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)} - 1\Big) = \frac{\bar{f}(x)}{x}\cdot(\epsilon_{f,x} - 1).$$

$\square$

Aussage b) impliziert für $x > 0,\ f(x) > 0$: die Durchschnittsfunktion $\bar{f}(x)$ ist genau dann monoton fallend, wenn $\epsilon_{f,x} - 1 < 0$ gilt, d.h., speziell für elastische Funktionen mit $\epsilon_{f,x} < 1$.

Beispiel 3.9: Betrachte die Nachfragefunktion $x(p)$ (x = Nachfrage, p = Preis) und die Erlösfunktion $E(p) = p \cdot x(p)$. Damit ist die Nachfrage der Durchschnitt $x(p) = \frac{E(p)}{p} = \bar{E}(p)$ des Erlöses, und es folgt aus Satz 3.8.a):

$$\frac{d}{dp}\ E(p) = x(p)\cdot(1 + \epsilon_{x,p}).$$

Mit der Erlösfunktion $E(x) = p(x)\cdot x$ als Funktion der Nachfrage x ist der Preis der Durchschnitt $p(x) = \frac{E(x)}{x} = \bar{E}(x)$ des Erlöses, und es folgt aus Satz 3.8.a):

$$\frac{d}{dx}\ E(x) = p(x)\cdot(1 + \epsilon_{p,x}).$$

Nach Satz 3.5 gilt $\epsilon_{p,x} = \frac{1}{\epsilon_{x,p}}$, und es ergibt sich die sogenannte **Amoroso-Robinson-Gleichung**:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ E(x) = p(x)\cdot\Big(1 + \frac{1}{\epsilon_{x,p}}\Big).}$$
