Kapitel 2

Differentialrechnung

2.1 Definitionen und Sätze

$\boxed{\downarrow 15.5.01}$

Zunächst die Definition einer Ableitung als Grenzwert von „Sekantensteigungen“:

Definition 2.1: (Die Ableitung einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **„differenzierbar am Punkt x“**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt **„Ableitung von f am Punkt x“**. *Alternative Schreibweisen (mit $y = f(x)$):*

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Ist f an jedem Punkt x des Definitionsbereichs D differenzierbar, so heißt die Abbildung $f' : x \mapsto f'(x)$ **„Ableitungsfunktion“** *(kurz:* **„Ableitung von f“***).*

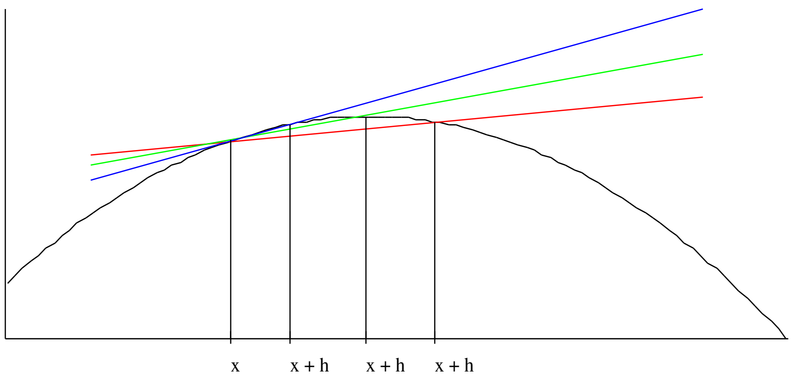
Bemerkung 2.2: *Ist eine Funktion an einem Punkt differenzierbar, so ist sie dort auch stetig. Damit kann eine Funktion nur an Stetigkeitspunkten differenzierbar sein.*

Geometrische Interpretation der Ableitung 2.3:

Für kleines $\Delta x = h \neq 0$ ist der **„Differenzenquotient“**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

die Sekantensteigung vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x+h, f(x+h))$ auf dem Graphen von x:



> *Die Ableitung $f'(x)$ selbst, d.h., der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x = h \to 0$,* **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f am Punkt** *x.*

Zur Erinnerung an die Schule: die Tangente T durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist der Graph der linearen Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Interpretation der Ableitung 2.4:

Die Ableitung gibt an, wie stark sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um einen **kleinen** *Wert Δx ändert:*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x),$$

d.h.

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\ .}$$

Die Definition der Ableitung über den Grenzwert von Sekantensteigungen ist praktisch unnütz, da nur in den allereinfachsten Fällen handhabbar, z.B., bei:

Beispiel 2.5: Betrachte $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot x \cdot h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2 \cdot x + h) = 2 \cdot x.$$

Für das praktische Rechnen wird man sich wiederum auf Rechenregeln verlassen:

Satz 2.6: (Rechenregeln für's Ableiten)

Ableitungen einiger spezieller Funktionen (sei hierbei c eine konstante Zahl):

$$\frac{d}{dx}\ c = 0, \quad \frac{d}{dx}\ x^n = n \cdot x^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\ e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ \ln(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\ \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\ \cos(x) = -\sin(x).$$

Die Ableitung einer aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktion ist über folgende Regeln zu berechnen. Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion ($f+g$, $f \cdot g$ etc.) existiert jeweils, wenn f und g ableitbar sind:

- $\frac{d}{dx}\ c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$,
- $\frac{d}{dx}\ \Big(f(x) + g(x)\Big) = f'(x) + g'(x)$ *(„**Summenregel**")*,
- $\frac{d}{dx}\ f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(„**Produktregel**")*
- $\frac{d}{dx}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ *(„**Quotientenregel**")*.

Bei der Quotientenregel wird $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt (sonst teilt man durch 0).

Beispiel 2.7:

$$\frac{d}{dx}\ \sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Beispiel 2.8: Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\ \Big(x + x^2 \cdot e^x\Big) = \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \frac{d}{dx}\Big(x^2 \cdot e^x\Big)$$

$$= \Big(\frac{d}{dx}\ x\Big) + \Big(\frac{d}{dx}x^2\Big) \cdot e^x + x^2 \cdot \Big(\frac{d}{dx}e^x\Big) = 1 + 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x.$$

Beispiel 2.9: Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\,e^x\right)\cdot x - e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\,x\right)}{x^2} = \frac{e^x\cdot x - e^x\cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}.$$

Beispiel 2.10:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}(\cos(x)\cdot e^x)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}\cos(x)\right)\cdot e^x + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}e^x\right)\right)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\Big(-\sin(x)\cdot e^x + \cos(x)\cdot e^x\Big)\cdot x - \cos(x)\cdot e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\cdot e^x\cdot x + \cos(x)\cdot e^x\cdot x - \cos(x)\cdot e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)\cdot e^x}{x} + \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x} - \frac{\cos(x)\cdot e^x}{x^2}.$$

Beispiel 2.11: Bequemer geht's mit MuPAD. Die Funktion `diff` ist für's Differenzieren von Ausdrücken zuständig:

```
>> diff(cos(x)*exp(x)/x, x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x                2              x
                               x
```

(Vergleiche mit Beispiel 2.10.) Alternativ können Funktionen (aber keine Ausdrücke) mittels ′ differenziert werden:

```
>> f:= x -> cos(x)*exp(x)/x:
>> f'(x)

         cos(x) exp(x)   cos(x) exp(x)   sin(x) exp(x)
         ------------- - ------------- - -------------
               x                2              x
                               x
```

So setzt man konkrete Werte in die Ableitung ein:

```
>> f'(1), f'(2)

                      cos(2) exp(2)   sin(2) exp(2)
      -sin(1) exp(1), ------------- - -------------
                            4               2

>> f'(PI) = float(f'(PI))

         exp(PI)   exp(PI)
         ------- - ------- = -5.02126887
            2         PI
          PI
```

Wie steht's mit der Ableitung von „Hintereinanderschaltungen" von Funktionen wie z.B. $\sin(\sqrt{x}\,)$?

Satz 2.12: (Die Kettenregel) $\boxed{\downarrow 18.5.01}$

Sei $g : D_g \mapsto D_f \subset \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $x \in D_g$. Sei $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar am Punkt $g(x) \in D_f$. Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ differenzierbar am Punkt x, und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\,h(x) = \frac{d}{dx}\,f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{„äußere Ableitung"}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{„innere Ableitung"}} .$$

Als Merkregel für $y = g(x)$, $z = f(y) = f(g(x))$:

$$\frac{d}{dx}\,f(g(x)) = \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}} = f'(y)\cdot g'(x).$$

Beispiel 2.13: Für $g(x) = \sqrt{x}$ gilt

$$g'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Zusammen mit $f(y) = \sin(y)$, $f'(y) = \cos(y)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\,\sin(\underbrace{\sqrt{x}}_{y}\,) = \Big(\frac{d}{dy}\,\sin(y)\Big)\cdot\Big(\frac{d}{dx}\,\sqrt{x}\Big) = \cos(y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}\,)}{2\cdot\,\sqrt{x}}.$$

Definition 2.14: (Höhere Ableitungun)

Die Funktion f sei differenzierbar, sei f' die Ableitungsfunktion. Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f'' = (f')'$ die **„zweite Ableitung von f“**. *Ist diese wiederum differenzierbar, so heißt $f''' = (f'')'$ die* **„dritte Ableitung von f“**. *Usw. Schreibweisen für die n-te Ableitung einer Funktion f:*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = f^{\overbrace{\prime\prime\ldots\prime\prime}^{n}}(x).$$

(Die „nullte“ Ableitung $f^{(0)}$ ist die Funktion f selbst.)

Beispiel 2.15: Offensichtlich gilt $\exp = \exp' = \exp'' = \exp'''$ etc. Die 4-te Ableitung der trigonometrischen Funktionen ist jeweils wieder die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin(x) = -\cos(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\sin(x) = \sin(x),$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)\ , \quad \frac{d^2}{dx^2}\cos(x) = -\cos(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\cos(x) = \sin(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}\cos(x) = \cos(x).$$

Beispiel 2.16: Höhere Ableitungen in MuPAD:

```
>> diff(exp(x^2), x, x) // zweite Ableitung

                        2        2       2
                2 exp(x ) + 4 x  exp(x )

>> n := 6:
>> diff(exp(x^2), x $ n) // n-te Ableitung

          2          2       2          4       2         6       2
 120 exp(x ) + 720 x  exp(x ) + 480 x  exp(x ) + 64 x  exp(x )
```

Mit der Funktion `subs` (engl.: substitute = ersetze; gemeint ist: ersetze x durch einen Wert) kann man konkrete Werte in Ausdrücke einsetzen. Berechne den Wert der 50-ten Ableitung von $\sin(x^2)\, e^x$ an der Stelle $x = 0$:

```
>> diff(sin(x^2)*exp(x), x $ 50):
>> subs(%, x = 0)
```

```
- 3281242764249252402878088425871788580475O cos(0) exp(0) -

   9681156701774438433479738001098392167599 sin(0) exp(0)
```

Hier kommt eine Besonderheit von `subs` zutage: der ersetzte Ausdruck wird nicht sofort „ausgewertet“. D.h. in diesem Fall, daß die Vereinfachungen $\cos(0) = 0, \exp(0) = 1, \sin(0) = 0$ nicht automatisch geschehen. Die Funktion `eval` (engl.: evaluate = werte aus) erzwingt die Evaluation:

```
>> eval(%)

          -32812427642492524028780884258717885804750
```

Kennt man die Ableitung einer invertierbaren Funktion f, so kennt man auch die Ableitung der Umkehrabbildung f^{-1}. Es gilt

$$f^{-1}(f(y)) = y.$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung nach y ab, so liefert die Kettenregel

$$f^{-1\prime}(f(y)) \cdot f'(y) = \frac{d}{dy}\, y = 1 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1\prime}(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Satz 2.17: (Ableitung der Inversen)

Sei f differenzierbar und invertierbar, sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Ist $f'(y) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $x = f(y)$ differenzierbar, und es gilt

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Merkregel: mit $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$: $\boxed{f^{-1\prime}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}.}$

Beispiel 2.18: Für $f^{-1} = \ln$ als Umkehrfunktion der Funktion $f = \exp$ mit $f' = \exp$ folgt mit $x = \exp(y)$, $y = \ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Hierbei ist $x > 0$ vorausgesetzt (damit $\ln(x)$ definiert ist). Für $x < 0$ gilt

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \ln'(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$, für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Zusammengefaßt gilt damit:

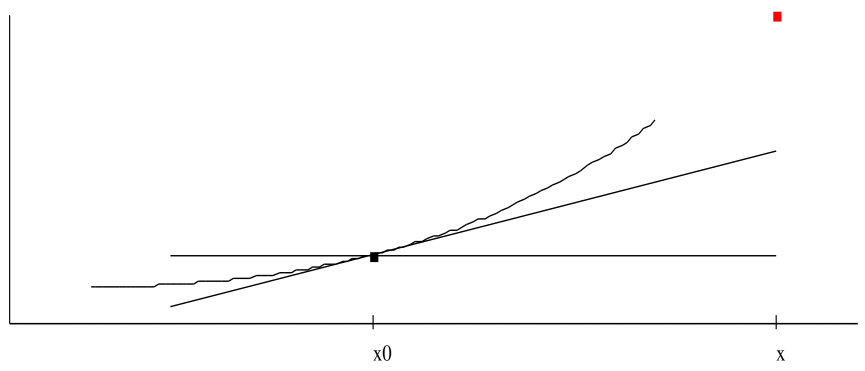
$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \neq 0.}$$

An der Stelle $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ unstetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

2.2 Taylor–Reihen

22.5.01↓

Betrachte folgende Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes x_0 bekannt ist (genauer: es sind $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. bekannt). Man interessiert sich für den Funktionswert an einem Punkt x in der Nähe von x_0:



In allereinfachster Näherung würde man (für x dicht bei x_0)

$$f(x) \approx f(x_0)$$

setzen. Die nächstbessere Approximation besteht darin, der Tangente am Punkt x_0 zu folgen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Im obigen Fall ist deutlich, daß der Funktionswert oberhalb der Tangente zu suchen ist (die Funktion ist „gebogen“: es gilt $f''(x_0) > 0$). Es bietet sich an, einen quadratischen Term hinzuzufügen, um eine bessere Approximation zu erreichen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2.$$

Wie sollte die Konstante c gewählt werden, wie geht es weiter?

Definition 2.19: (Taylor-Reihen)

Sei f mehrfach differenzierbar. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i =$$

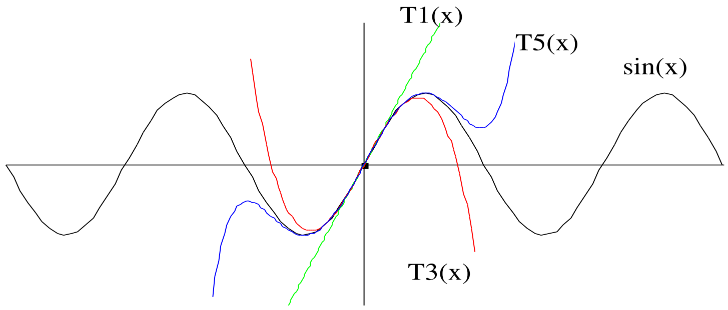
$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

heißt **„Taylor–Polynom n-ten Grades von f am Entwicklungspunkt x_0.**

Wozu Taylor–Polynome? Taylor–Polynome dienen dazu, komplizierte Funktionen in der Umgebung eines Punktes x_0 durch einfache Funktionen, nämlich Polynome, zu approximieren. Dadurch kann man oft das Verhalten der Funktion in der Nähe spezieller Punkte einfach studieren.

Taylor–Polynome nähern die Funktion an für Werte x, die dicht beim Entwicklungspunkt x_0 liegen: $T_n(x) \approx f(x)$. Je höher n und je kleiner der Abstand $x - x_0$, um so besser ist die Approximation.

Hier eine Graphik einiger Taylor–Polynome der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$:



Eine erste Taylor–Reihenberechnung:

Beispiel 2.20: Wir berechnen die Taylor–Reihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$. Wegen $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = e^{x_0} = e^0 = 1$ ist die Taylor–Reihe

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .$$

Die in Beispiel 1.37 vorgestellte Reihendarstellung der Exponentialfunktion ist also nichts anderes als die Taylor–Entwicklung um den Nullpunkt.

Nun eine Anwendung der Taylor–Entwicklung:

Beispiel 2.21: Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 1.53. Es war behauptet worden, daß f auch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Dies ist nun leicht einzusehen. Wir approximieren e^x durch die Taylor–Entwicklung um den Punkt $x_0 = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}{x}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

Hiermit ist nun klar: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) = 1.$

Beispiel 2.22: In MuPAD ist die Funktion `taylor` dafür zuständig, den Beginn einer Taylor–Entwicklung zu berechnen:

```
>> taylor(exp(x), x = 0)

                    2    3    4    5
                   x    x    x    x         6
          1 + x + -- + -- + -- + --- + O(x )
                   2    6    24   120
```

Die Taylor–Entwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ ist die geometrische Reihe aus Beispiel 1.31. Es werden 10 Terme berechnet:

```
>> taylor(1/(1 - x), x = 0, 10)

              2    3    4    5    6    7    8    9       10
    1 + x + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + x  + O(x   )
```

Der folgende Befehl berechnet eine Taylor–Entwicklung um $x_0 = \pi$:

```
>> taylor(2 + sin(x)*cos(x), x = PI)

                            3              5
                  2 (x - PI)     2 (x - PI)              6
    2 + (x - PI) - ----------- + ---------- + O((x - PI) )
                      3              15
```

Beispiel 2.23: Betrachte $f(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Wie kann man Werte $f(x)$ für kleines x ohne technische Hilfsmittel ausrechnen? Zunächst die Berechnung der ersten Taylor–Polynome. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$, da wir uns für **kleine** Werte von x interessieren. Man braucht Ableitungen von $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 1-(1-x)^{\frac{1}{2}}, & f(0)=0, \\ f'(x) & = & \frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}, & f'(0)=\frac{1}{2}, \\ f''(x) & = & \frac{1}{4}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}, & f''(0)=\frac{1}{4}, \\ & \ldots & & \end{array}$$

Hiermit folgt die Entwicklung

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x} \approx f(0) + f'(0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \cdots .$$

Nun ja, die Terme der Entwicklung sind in der Tat so alle berechenbar, aber das ist ziemlich mühselig. Bequemer mit MuPAD:

```
>> taylor(1 - sqrt(1 - x), x)

              2     3       4        5
         x    x     x     5 x      7 x         6
         - + -- + -- + ---- + ---- + O(x )
         2    8    16    128      256
```

Aus diesen Taylor–Approximationen bekommt man z.B. für $x = 0.1$:

$$\begin{aligned} f(0.1) &= \tfrac{0.1}{2} + \tfrac{0.1^2}{8} + \tfrac{0.1^3}{16} + \cdots \\ &= 0.05 \\ &\quad + 0.00125 \\ &\quad + 0.0000625 \\ &\quad + \cdots \\ &= 0.05131... \end{aligned}$$

Man sieht der Entwicklung geradezu an, daß die noch nicht berücksichtigten Terme der Entwicklung die angegebenen Dezimalstellen nicht mehr beeinflussen, d.h., die ersten 3 bis 4 Ziffern sind korrekt. Probe mit MuPAD:

```
>> 1 - sqrt(0.9)
                                 0.05131670195
```

2.3 Monotonie, Extremwerte

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentiation ist das Auffinden von Extremwerten. Dazu stellen wir zunächst fest, daß Ableitungswerte (= Tangentensteigungen) auf ansteigendes oder abfallendes Verhalten der Funktion hinweisen:

Satz 2.24: (Ableitungen weisen auf Monotonie hin)
Sei f differenzierbar, die Ableitungsfunktion f' sei stetig. Gilt $f(x_0) > 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton steigend. Gilt $f(x_0) < 0$, so ist f auf einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend.

Mit der Interpretation der Ableitung 2.4 ist dies unmittelbar klar. Für kleines Δx gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

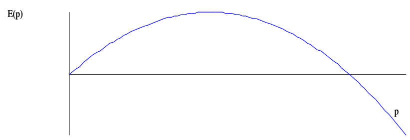
Extrema sind die Stellen, wo die Funktion „auf der einen Seite“ steigend, „auf der anderen Seite“ fallend ist:

Satz 2.25: (An Extremstellen verschwindet die Ableitung)

Sei f differenzierbar. Ist die Stelle x_0 ein (lokales) Maximum oder Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Man findet also alle Kandidaten für Extremstellen einer Funktion f, indem man die Nullstellen von f' sucht.

Beispiel 2.26: In Abschnitt 1.4.5 war die Erlösfunktion $E(p) = x(p) \cdot p = a \cdot p - b \cdot p^2$ betrachtet worden:



Zu welchem Preis p sollte ich die Ware anbieten, um den Erlös zu maximieren? Es gilt

$$\frac{d}{dp}E(p) = \frac{d}{dp}(a \cdot p - b \cdot p^2) = a - 2 \cdot b \cdot p \overset{(!)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{a}{2\,b}.$$

Aus der Graphik ist klar, daß es sich hierbei um ein Maximum des Erlöses handelt.

Es gibt allerdings Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$, die keine Extremstellen (sondern sogenannte „Sattelpunkte“) sind. Beispiel: die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend. Am Punkt $x_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 0$, aber x_0 ist kein Extremum.

Satz 2.27: (Hinreichende Kriterien für Extrema)

Sei f mehrfach differenzierbar. Gilt an einer Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

so ist x_0 ein lokales Maximum. Gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

so ist x_0 ein lokales Minimum.

„Beweis“: Approximiere $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das Taylor–Polynom zweiten Grades:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

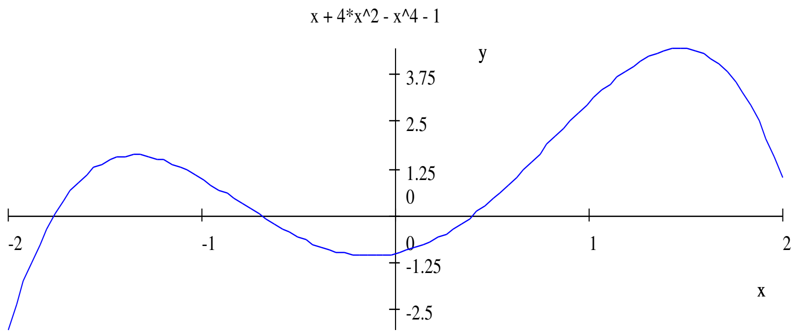
An einem Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gilt näherungsweise:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Da $(x - x_0)^2 > 0$ für $x \neq x_0$ ist, sind die Funktionswerte in der Umgebung größer als $f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt (Minimum). Für $f''(x_0) < 0$ sind die Funktionswerte in der Umgebung kleiner als $f(x_0)$ (Maximum).

Beispiel 2.28: Betrachte $f(x) = x + 4\,x^2 - x^4 - 1$: ↓25.5.01

```
>> f:= x -> x + 4*x^2 - x^4 - 1:
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```



Um die Kandidaten für die Extrema zu finden, werden (numerische Approximationen der) Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ berechnet. Für numerische Lösungen sind die MuPAD-Funktionen `numeric::solve` oder auch `numeric::fsolve` zuständig. Für polynomiale Gleichungen wird eine Menge aller Lösungen geliefert. Die einzelnen Lösungen lassen sich durch „indizierten Zugriff" `Kandidaten[1]` etc. auswählen:

```
>> Kandidaten:= numeric::solve(f'(x) = 0, x)

          {-1.346997409, -0.1260001926, 1.472997601}
```

Diese Werte werden in die 2-te Ableitung von f eingesetzt:

```
>> f''(Kandidaten[1])
                              -13.77282422
>> f''(Kandidaten[2])
                               7.809487418
>> f''(Kandidaten[3])
                               -18.0366632
```

Nach Satz 2.27 ist der erste Kandidat ein Maximum, der zweite Kandidat ein Minimum, der dritte Kandidat ein Maximum. Die Graphik bestätigt dies.

2.4 Die l'Hospitalsche Regel

In $\frac{0}{0}$–Situationen kann man durch Ableiten auch Grenzwerte bestimmen.

Satz 2.29: (l'Hospitalsche Regel)

Seien f und g differenzierbar, es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

„Beweis:" Approximiere Zähler und Nenner durch das Taylor–Polynom ersten Grades:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{g'(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Beispiel 2.30: Betrachte erneut die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 1.53. Für den Punkt $x_0 = 0$ liegt eine $\frac{0}{0}$–Situation vor. Mit l'Hospital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$

Die l'Hospitalsche Regel kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

Beispiel 2.31: Betrachte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x}{x^2}$. Nach einer Anwendung von l'Hospital trifft man beim Quotienten der Ableitungen wieder auf eine $\frac{0}{0}$–Situation und kann l'Hospital erneut anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2 \cdot x} - 1 - 2 \cdot x)}{\frac{d}{dx}\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x} - 2}{2 \cdot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{2 \cdot x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\,(e^{2 \cdot x} - 1)}{\frac{d}{dx}\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{1} = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2.$$
