1.4 Funktionen

1.4.1 Definitionen

Definition 1.43:

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ist eine Zuordnung $f : x \mapsto f(x)$ einer Zahl $x \in D \subset \mathbb{R}$ zu einem **„Bildwert“** *$f(x) \in \mathbb{R}$. Der Punkt x heißt auch* **„Urbild“** *von $f(x)$. Die Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt* **„Definitionsbereich“**, *die Menge*

$$f(D) := \Big\{ f(x);\ x \in D \Big\}$$

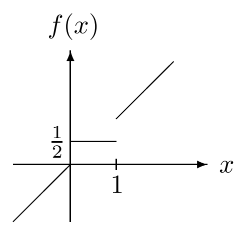
heißt **„Bildbereich“** *oder auch* **„Wertebereich“** *der Funktion. Die Funktion f heißt*

- **monoton steigend**, *wenn $f(x) \le f(y)$ gilt*
- **streng monoton steigend**, *wenn $f(x) < f(y)$gilt*
- **monoton fallend**, *wenn $f(x) \ge f(y)$ gilt*
- **streng monoton fallend**, *wenn $f(x) > f(y)$ gilt*

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,

Beispiel 1.44: a) Die (stückweise definierte) Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

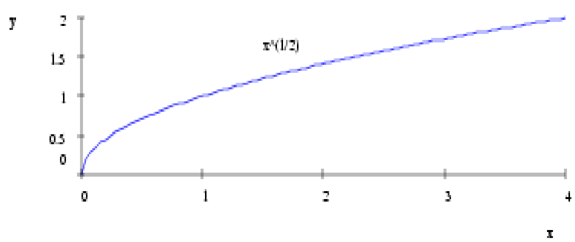
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x < 1, \\ x & \text{für } 1 \le x, \end{cases}$$



ist monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, der Bildbereich ist $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, \infty)$.
Die MuPAD-Graphik dazu (`piecewise` erzeugt stückweise definierte Funktionen):

```
>> f:= piecewise([x <= 0, x],
                 [0 < x and x < 1, 1/2],
                 [1 <= x, x])
>> plotfunc2d(f(x), x = -2..2)
```

b) Die Funktion $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend. Die MuPAD-Graphik dazu (`sqrt` ist die Wurzelfunktion):



1.4.2 Stetigkeit

Definition 1.45: (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt **stetig am Punkt** $x \in D$, *wenn für* **jede** *gegen x^* konvergierende Folge (x_n) gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*). \qquad (\#)$$

Die Funktion f heißt **rechtsseitig stetig am Punkt** $x^* \in D$, *wenn $(\#)$ gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \geq x^*$.*

Die Funktion f heißt **linksseitig stetig am Punkt** $x^* \in D$, *wenn $(\#)$ gilt für alle gegen x^* konvergierenden Folgen (x_n) mit $x_n \leq x^*$.*

Die Funktion f heißt **stetig auf dem Bereich** D, *wenn sie an allen Punkten $x^* \in D$ stetig ist.*

Ähnlich wie die ϵ–$N(\epsilon)$–Definition eines Grenzwertes für Folgen ist diese Definition von Stetigkeit eigentlich nur für Mathematiker interessant, da sie nur in sehr einfachen Fällen praktisch handhabbar ist (man verläßt sich in der Praxis wiederum auf Rechenregeln, mit denen Stetigkeit vererbt werden, siehe Satz 1.48). Einige einfache Beispiele mit der formalen Definition:

Beispiel 1.46: a) Betrachte die konstante Funktion $f : x \in \mathbb{R} \mapsto c$ (mit einer konstanten Zahl $c \in \mathbb{R}$). Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

b) Betrachte die Funktion $f(x) = x$. Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

c) Betrachte die Funktion $f(x) = x^2+1$. Sei (x_n) eine beliebige gegen x^* konvergierende Folge. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt

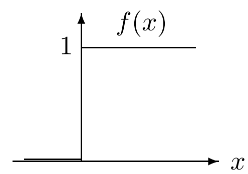
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2+1) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)^2 + 1 = (x^*)^2 + 1 = f(x^*).$$

Damit ist f an jedem Punkt stetig.

Man sieht an diesen Beispielen bereits, daß die Rechenregeln für Grenzwerte sofort zu analogen Rechenregeln für die Vererbung von Stetigkeit führen. Vorher aber noch ein Beispiel zur Unstetigkeit und „einseitigen Stetigkeit“:

Beispiel 1.47: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \le x. \end{cases}$$



Diese Funktion ist überall stetig, außer am Punkt $x = 0$. Dort ist sie aber immer noch rechtsseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von rechts, so sind die Funktionswerte konstant 1. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 1 und stimmt mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Die Funktion ist aber nicht linksseitig stetig: nähert man sich dem Punkt $x = 0$ von links, so sind die Funktionswerte konstant 0. Der Grenzwert der Funktionswerte ist wiederum 0 und stimmt **nicht** mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ überein.
Eine stetige Funktion muß aber offensichtlich sowohl links- als auch rechtsseitig stetig sein, damit ist f am Punkt $x = 0$ unstetig.

Nun die Rechenregeln:

Satz 1.48: (Rechenregeln zur Stetigkeit)

Seien f und g Funktionen. Sei x^* ein Punkt aus dem Schnitt der Definitionsbereiche von f und g (d.h., sowohl $f(x^*)$ als auch $g(x^*)$ ist definiert). Seien f und g am Punkt x^* stetig. Sei c eine Konstante. Dann gilt:

- *Die Funktion $h(x) = c \cdot f(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist am Punkt x^* stetig.*
- *Die Funktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ist am Punkt x^* stetig, **falls** $g(x^*) \neq 0$.*
- *Die Funktion $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ist am Punkt x^* stetig (hier setzen wir $f(x) \ge 0$ voraus).*

Beispiel 1.49: Die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ist überall stetig: Da konstante Funktionen sowie $g(x) = x$ stetig sind, ist auch $h(x) = x + 1$ stetig. Analog ist $i(x) = x^2$ und damit auch $j(x) = x^2 + 1$ stetig. Außerdem gilt $j(x) > 0$ für alle x, womit der Quotient $f(x) = \frac{h(x)}{j(x)}$ ebenfalls überall stetig ist.

An diesem Beispiel merkt man, daß folgende „Pi mal Daumen-Regel“ gültig ist:

Merkregel 1.50:

> *Aus stetigen Funktionen „zusammengesetzte“ Funktionen sind wieder stetig. Lediglich an den Stellen, wo man durch 0 teilt, kann die Funktion unstetig sein.*

Die formale Definition 1.45 der Stetigkeit sollte man sich so merken:

Merkregel 1.51: ↓8.5.01

> *Für beliebige konvergente Folgen x_n gilt*
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big),$$
>
> *wenn die Funktion f an der Stelle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ stetig ist.*

Für die Untersuchung spezieller Funktionen helfen die Rechenregeln nicht. Da muß man die Mathematiker konsultieren, die z.B. Folgendes beweisen:

Satz 1.52: (Stetigkeit der Exponentialfunktion)

Die in Definition 1.17/Beispiel 1.37 eingeführte Exponentialfunktion $\exp(x)$ *mit dem Definitionsbereich* $\mathbb{R}$ *und dem Bildbereich* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ *ist an allen Punkten* $x \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Die Merkregel 1.50 besagt, daß es potentielle Unstetigkeiten gibt, wenn man durch 0 teilt. **Aber:** es kann auch passieren, daß an diesen Stellen Stetigkeit vorliegt (wenn nämlich eine $\frac{0}{0}$–Situation vorliegt):

Beispiel 1.53: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\[2ex] 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist überall (auch an der Stelle $x = 1$) stetig. Dies ist leicht gezeigt: Wegen $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$ ist f nichts anderes als eine komplizierte Schreibweise für $f(x) = x + 1$.

Etwas komplizierter ist

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Auch diese Funktion ist überall (auch an der Stelle $x = 0$) stetig.

Eine $\frac{0}{0}$–Situation läßt sich mit Hilfe der „l'Hospitalschen Regel" systematisch untersuchen, siehe Beispiel 2.30.

Definition 1.54: (Grenzwerte bei Funktionen)

Betrachte eine Funktion f auf dem Defintionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{x^*\}$. Der Wert f^* heißt **„Grenzwert (Limes) von f für $x \to x^*$"**, *wenn für* **jede** *gegen x^* konvergierende Folge (x_n) gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f^*$$

(d.h., die Folge $y_n = f(x_n)$ konvergiert gegen f^*). Die Schreibweise ist dann:

$$f^* = \lim_{x \to x^*} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„rechtsseitiger Grenzwert von f für $x \to x^*$"**, *wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n > x^*$. Schreibweise:*

$$f^* = \lim_{x \to x^* + 0} f(x).$$

Der Wert f^* heißt **„linksseitiger Grenzwert von f für $x \to x^*$"**, *wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$ gilt für alle gegen x^* konvergierende Folgen (x_n) mit $x_n < x^*$. Schreibweise:*

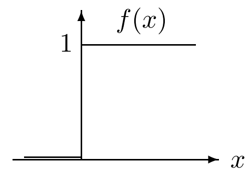
$$f^* = \lim_{x \to x^* - 0} f(x).$$

Beispiel 1.55: Für eine am Punkt x^* definierte und dort stetige Funktion gilt immer

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* + 0} f(x) = \lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*).$$

Beispiel 1.56: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \le x. \end{cases}$$



Hier gilt für die Sprungstelle $x^* = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel 1.57: Für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Formale Begründung: Sei (x_n) eine beliebige gegen ∞ konvergierende Folge:

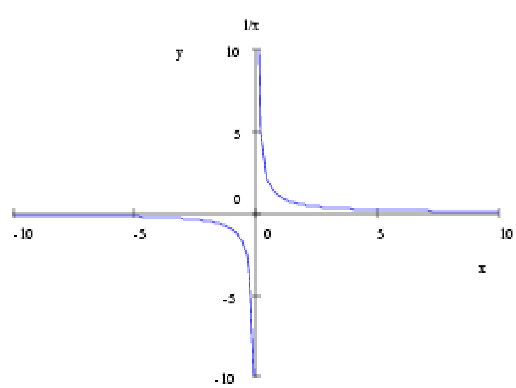
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Am Punkt $x = 0$ ist f unstetig („singulär"): die Funktion hat eine sogenannte Polstelle. Wir lassen die Werte $\pm\infty$ wieder als Grenzwerte zu. Dann existieren einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Das Argument `ViewingBox = [-2..2, -2..2]` im folgenden Befehl weist MuPAD an, alles ausserhalb der angegebenen Bereiche zu ignorieren, wodurch sich eine gut skalierte Graphik ergibt:

```
>> plotfunc2d(1/x, x = -10..10,
              ViewingBox = [-10..10, -10..10])
```



Mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen können wir die Stetigkeit an einem Punkt auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 1.58: (Stetigkeit)

Eine Funktion f ist am Punkt x^* genau dann linksseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann rechtsseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x^* + 0} f(x) = f(x^*)$$

gilt. Sie ist genau dann stetig, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und beide Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to x^* - 0} f(x) = \lim_{x \to x^* - 0} f(x) = f(x^*).$$

$\boxed{11.5.01\downarrow}$

1.4.3 Umkehrfunktionen

Definition 1.59: (Invertierbarkeit von Funktionen)

Eine Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ heißt **invertierbar**, *wenn zu jedem Wert $y \in W$* **genau ein** *Urbild $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert.*

Beispiel 1.60: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = \sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ ist invertierbar: zu $y = f(x) = x^2$ gehört genau ein Urbild $x = -\sqrt{y}$ im Definitionsbereich D.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht invertierbar, wenn man sie auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ betrachtet: Jetzt gibt es zu jedem $y = f(x) = x^2$ aus dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ **zwei Urbilder** $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$.

Definition 1.61: (Inverse einer Funktion)

Die Funktion $f : D \mapsto W$ von einem Definitionsbereich D in den Wertebereich $W = f(D) = \{f(x); x \in D\}$ sei invertierbar. Die **„Umkehrabbildung“ („Inverse“)** *von f ist die Funktion $f^{-1} : W \mapsto D$, die dem Punkt $y = f(x) \in W$ den (eindeutig bestimmten) Wert x zuordnet.*

Beispiel 1.62: Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ mit dem Wertebereich $W = f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ mit dem Wertebereich $f(D) = [0, \infty)$ hat die durch $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ gegebene Inverse $f^{-1} : W \mapsto D$.

Die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ hat keine Inverse.

Die Funktion $f(x) = 2-3\cdot x$ auf dem Wertebereich $D = \mathbb{R}$ hat die Inverse $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$. Um die Inverse zu bestimmen, muß man $y = f(x)$ nach x auflösen:

$$y = 2 - 3 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot x = 2 - y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2-y}{3}.$$

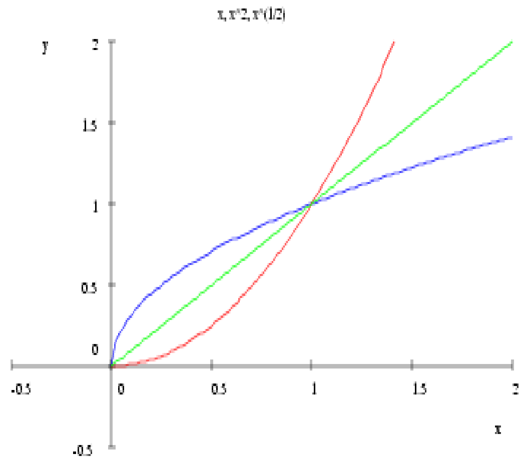
Graphische Darstellung der Inversen 1.63:

Hat man eine invertierbare Funktion f graphisch dargestellt, so hat man auch sofort den Graphen von f^{-1}. Der Graph von f ist eine Punktmenge (x, y) mit $y = f(x)$ in der x-y-Ebene. Der Graph von f^{-1} ist die Punktmenge (y, x) mit $y = f(x)$. Diese ergibt sich einfach durch Spiegelung an der „ersten Winkelhalbierenden“ (dies ist die durch $y = x$ gegebene Gerade).

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen der Funktion f an der ersten Winkelhalbierenden.

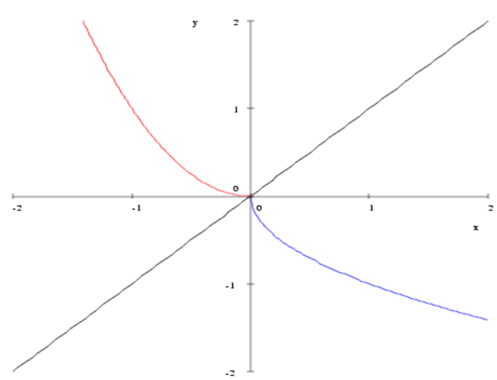
Beispiel 1.64: Zur Demonstration hierzu einige MuPAD Graphiken. Betrachte $f(x) = x^2$ auf $D = [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Statt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ wird $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ eingegeben (Goethe sagt dazu treffend: „Name ist Schall und Rauch“). Die Winkelhalbierende $y = x$ wird zusätzlich eingezeichnet:

```
>> plotfunc2d(x, x^2, sqrt(x), x = 0..2,
              ViewingBox = [-0.5..2, -0.5..2])
```



Dasselbe noch einmal, diesmal wird $f(x) = x^2$ aber auf dem Definitionsbereich $D = (-\infty, 0]$ betrachtet. Da die Inverse $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ auf einem anderen Definitionsbereich lebt ($y \geq 0$, $x \leq 0$), `plotfunc2d` aber alle Funktionen über einem gemeinsamen Bereich zeichnet, wird nun das folgende flexiblere plot-Konstrukt benutzt:

```
>> plot(// die Winkelhalbierende:
        plot::Function2d(x, x = -2..2, Color = RGB::Black),
        // f(x):
        plot::Function2d(x^2, x = -2..0, Color = RGB::Red),
        // die Inverse von f:
        plot::Function2d(-sqrt(y), y = 0..2, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-2..2, -2..2])
```



Nun betrachten wir $y = f(x) = 2 - 3 \cdot x$. Zunächst lösen wir mittels `solve` (engl: solve

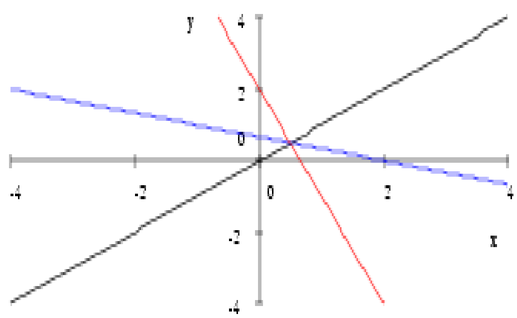
= „löse“) nach x auf:

```
>> solve(y = 2 - 3*x, x)

                              {       y }
                              { 2/3 - - }
                              {       3 }
```

Sei $f = f(x) = 2 - 3 \cdot x$ der Ausdruck, der die Funktion f repräsentiert, sei $g = g(y) = \frac{2}{3} - \frac{y}{3}$ der Ausdruck, der die Inverse von f repräsentiert. Die Winkelhalbierende sowie f und g werden gezeichnet:

```
>> f:= 2 - 3*x: g:= 2/3 - y/3:
>> plot(plot::Function2d(x, x = -4..4, Color = RGB::Black),
        plot::Function2d(f, x = -4..4, Color = RGB::Red),
        plot::Function2d(g, y = -4..4, Color = RGB::Blue),
        ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Bei streng monotonen Funktionen ist die Invertierbarkeit leicht zu garantieren:

Satz 1.65: (Invertierbarkeit bei Monotonie)

Streng monotone Funktionen f : Definitionsbereich $\mapsto$ Wertebereich *sind immer invertierbar. Ist* f *streng monoton steigend, dann auch* f^{-1}*. Ist* f *streng monoton fallend, dann auch* f^{-1}.

1.4.4 Einige mathematische Funktionen

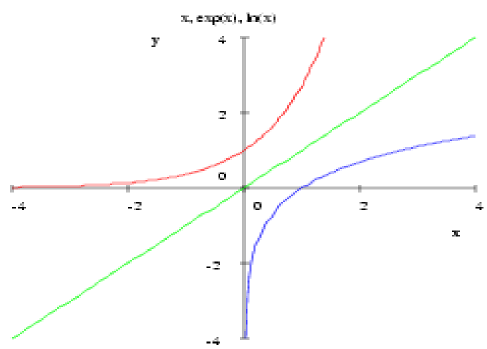
Satz und Definition 1.66:

(Der natürliche Logarithmus) Die in Definition 1.17/Beispiel 1.37 eingeführte Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ *ist stetig und streng monoton steigend. Damit gibt es eine Umkehrfunktion, die man den* **„natürlichen Logarithmus"** $\ln : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *nennt:*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\ , \quad \exp(\ln(y)) = y \text{ für alle } y \in (0, \infty).$$

Beispiel 1.67: Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergibt sich sofort der Graph von ln aus dem Graphen von exp:

```
>> plotfunc2d(x, exp(x), ln(x), x = -4..4,
              ViewingBox = [-4..4, -4..4])
```



Merke 1.68:

- $\exp$ *und* $\ln$ *sind stetig und monoton wachsend.*
- *Es gilt* $\exp(x) > 1$ *für alle* $x > 0$, *es gilt* $\ln(y) > 0$ *für alle* $y > 1$.
- *Es gilt* $\exp(0) = 1$ *und* $\ln(1) = 0$.
- *Es gilt* $\exp(x) < 1$ *für alle* $x < 0$, *es gilt* $\ln(y) < 0$ *für alle* y *mit* $0 < y < 1$.

Satz 1.69: (Rechenregeln für exp und ln)

Für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad (e^x)^y = e^{x \cdot y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

Für beliebiges $x > 0, y > 0$ gilt:

$$\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y \cdot \ln(x), \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

Beispiel 1.70: Die Regel $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ ist besonders interessant. Sie ist nützlich, um Gleichungen aufzulösen, wo die gesuchte Größe in einem Exponenten auftaucht. Z.B.:

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(8) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \ln(2) = \ln(8)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = \frac{3 \cdot \ln(2)}{\ln(2)} = 3.$$

Ein Öko-Beispiel: Ein Kapital K_0 wird mit einem jährlichen Zinssatz von $p = 0.04$ verzinst und vergrößert sich am Ende jeden Jahres um den Aufzinsfaktor $q = 1 + p$ $= 1.04$. Wann hat sich das Kapital verdoppelt? Nach n Jahren ist das Kapital auf $K_n = K_0 \cdot q^n$ angewachsen, d.h., es ist die Gleichung $K_n = K_0 \cdot q^n = 2 \cdot K_0$ nach n aufzulösen:

$$q^n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \ln(q^n) = \ln(2) \quad \Longrightarrow \quad n \cdot \ln(q) = \ln(2) \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\ln(2)}{\ln(q)}.$$

Der numerische Wert ist

```
>> DIGITS:= 3: ln(2.0)/ln(1.04)

                        17.7
```

Also: mit der Zinsauszahlung zu Ende des 17-ten Jahres ist Verdoppelung eingetreten. Genauer, das Kapital ist mit dem Beginn des 18-ten Jahres um den Faktor

```
>> 1.04^18

                        2.02
```

gewachsen.

Bemerkung 1.71: *Es gilt*

$$x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y \cdot \ln(x)} \quad (x > 0).$$

Hierbei ist klar, was mit x^y gemeint ist, wenn y eine ganze oder eine rationale Zahl ist (z.B. $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$). Man benutzt die obige Formel, um Potenzen von $x > 0$ auch für beliebige reelle Werte y zu definieren, z. B.:

```
>> float(2^PI) = float(exp(PI*ln(2)))

                 8.824977827 = 8.824977827
```

Bemerkung 1.72: *Aus der Schulzeit mag man gewöhnt sein, statt mit dem natürlichen Logarithmus mit dem Zehner-Logarithmus* $\log_{10}$ *umzugehen. Hier ist der Zusammenhang:*

$$x = \log_{10}(y) \;\Leftrightarrow\; y = 10^x \;\Leftrightarrow\; \ln(y) = \ln(10^x) = x \cdot \ln(10) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(y)}{\ln(10)},$$

also

$$\boxed{\log_{10}(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)} \quad \textit{für alle } y > 0.}$$

Beispiel 1.73: MuPAD hat Logarithmen `log(b, y)` zu einer beliebigen Basis `b`:

```
>> log(10, 25.0) = ln(25.0)/ln(10.0)

                 1.397940009 = 1.397940009
```

In der Schule waren im Kontext „Geometrie“ die Winkelfunktionen sin und cos eingeführt worden. Hier unsere Versionen:

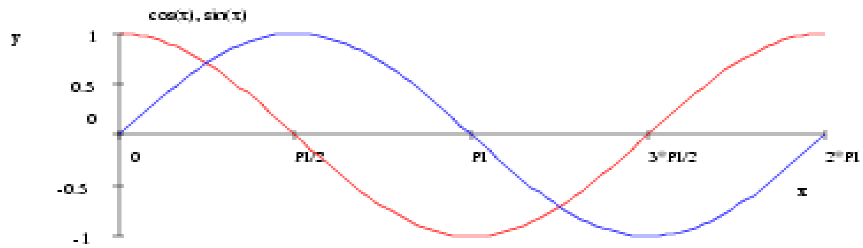
Satz und Definition 1.74:

Betrachte die folgenden Reihen, wobei x *eine beliebige feste reelle Zahl ist. Diese Reihen konvergieren. Die Reihenwerte heißen* $\sin(x)$ *bzw.* $\cos(x)$ *(die „trigonometrischen Funktionen“):*

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2\,i+1}}{(2\,i+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots\,, \\ \cos(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \cdot x^{2\,i}}{(2\,i)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots\,. \end{aligned}$$

Graphisch:

```
>> plotfunc2d(cos(x), sin(x), x=0..2*PI,
              Ticks = [[0 = "0", PI/2 = "PI/2", PI = "PI",
                        3*PI/2 = "3*PI/2", 2*PI = "2*PI"],
                        [-1, -1/2, 0, 1/2, 1]])
```



Es gelten folgende Regeln (die keinesfalls leicht an der obigen Definition abzulesen sind, sondern mühsam bewiesen werden müssen):

Einige spezielle Werte:

$$\sin(0) = 0\ , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = 0\ .$$

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch, d.h., man braucht sie nur auf dem Grundintervall $[0, 2\,\pi)$ *zu kennen:*

$$\sin(x + 2\,\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\,\pi) = \cos(x).$$

Symmetrieeigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

„Additionstheoreme“:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y).$$

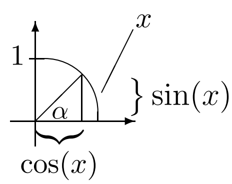
„Pythagoras“:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Bemerkung 1.75: *Vielleicht ist man aus der Schule noch gewohnt, die Argumente der trigonometrischen Funktion in Winkelgraden* $\alpha = 0^0, \ldots, 360^o$ *einzugeben. Mathematiker nehmen statt des Winkels* α *die zugehörige Bogenlänge* x *auf dem Einheitskreis (Einheit: „Radian"), der Zusammenhang ist*

$$x = \frac{\pi}{180}\,\alpha,$$

d.h., $90^o \equiv \frac{\pi}{2}$, $180^o \equiv \pi$, $360^o \equiv 2\,\pi$*:*



1.4.5 Einige ökonomische Funktionen

Einige typische Funktionen, die in der Ökonomie betrachtet werden. Dies sind keine fixierten Funktionen, sondern müssen jeweils in einem konkreten Kontext als Modellfunktionen vorgegeben werden.

Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion). Sei p der Preis eines Gutes, sei x die nachgefragte (abgesetzte) Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Typischerweise ist x als Funktion von p monoton fallend (je niedriger der Preis, um so höher der Absatz). Ausnahme: Luxus-Güter, wo die Ware dadurch „was her macht", daß sie teuer ist („Snob-Effekt"). Oft wird statt $x(p)$ auch die Umkehrfunktion $p(x)$ betrachtet.

Angebotsfunktion. Sei p der Preis eines Gutes, sei x die vom Produzenten auf den Markt geworfene Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Typischerweise ist $x(p)$ monoton steigend (steigt der Preis, wird der Produzent die Angebotsmenge erhöhen).

Erlösfunktion. Sei p der Preis eines Gutes, sei x die nachgefragte (abgesetzte) Menge, gemessen in Mengeneinheiten pro Zeitabschnitt. Für x abgesetzte Güter zum „Stückpreis" von $p(x)$ ergibt sich der Erlös zu

$$E(x) = x \cdot p(x).$$

Alternativ kann man mit der Umkehrfunktion $x(p)$ diese Größe auch in Abhängigkeit vom Preis p studieren:

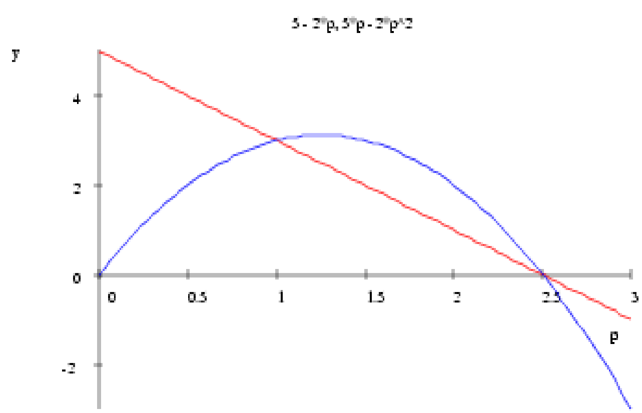
$$E(p) = x(p) \cdot p.$$

Sei beispielsweise die Preis-Absatzfunktion $x(p) = a - b \cdot p$ vorgegeben (biete ich die Ware zum Preis p an, so kann ich pro Zeiteinheit $x(p) = a - b \cdot p$ Mengeneinheiten absetzen). Die Erlösfunktion ist dann

$$E(p) = x(p) \cdot p = a \cdot p - b \cdot p^2.$$

Beispiel: (Man beachte, daß in MuPAD der Bezeichner `E` geschützt ist, er steht für `E = exp(1)`. Daher wird hier `EE` benutzt.)

```
>> a:= 5: b:= 2: x:= p -> a - b*p: EE:= p -> a*p - b*p^2:
>> plotfunc2d(x(p), EE(p), p = 0..3)
```



Die typische Fragestellung ist hier: zu welchem Preis p sollte ich die Ware anbieten, um den Erlös zu maximieren? Die Antwort hierauf liefert die Differentialrechnung (nächstes Kapitel).