Kapitel 1

Grundlagen der Analysis (Rückblick auf die Schule)

1.1 Bezeichnungen, Notation, Rechenregeln

$\boxed{\downarrow 17.4.01}$

Notation 1.1:

Folgende Standardbezeichnungen und Symbole sollten aus der Schule bekannt sein und werden auch hier verwendet werden:

- **Mengen:** $\{1, 2, 3, x, y, z\}$,
- **Elemente von Mengen:** $x \in A$ *bedeutet „x ist aus der Menge A"*,
- **Vereinigung:** $A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}$,
- **Durchschnitt:** $A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\}$,
- **Teilmengen:** $A \subset B$ *heißt: alle Elemente von A sind auch in B enthalten,*
- **Differenzmengen:** $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$,
- $\mathbb{N}$ = *die Menge der natürlichen Zahlen* $\{1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z}$ = *die Menge der ganzen Zahlen* $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{Q}$ = *die Menge der rationalen Zahlen* $= \{\frac{z}{n}; z \in \mathbb{Z}; n \in N\}$,
- $\mathbb{R}$ = *die Menge der reellen Zahlen,*
- **Intervalle:**

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, && \text{„offene" Intervalle,}\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}, && \text{„geschlossene" Intervalle,}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\}, && \text{„halboffene" Intervalle,}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}, && \text{„halboffene" Intervalle,}
\end{aligned}$$

- **„Unendlich“**: $\pm\infty$,
- **Wurzel:** $x = \sqrt{y}$ *ist die* **positive** *Lösung von* $x^2 = y$.

Elementare Rechenregeln 1.2:

Einige aus der Schule bekannte Rechenregeln fürs Potenzieren:

- $x^0 = 1$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$,
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$,
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}$

1.2 Folgen und Grenzwerte

Die Grundlage der Analysis ist der Begriff des Grenzwertes, der hier rekapituliert werden soll:

1.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 1.3: (Folgen)

Eine **Folge** $(x_n) = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$, *manchmal auch* $(x_n) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, *ist eine Zuordnung*

$$\textit{Index } n \in \mathbb{N} \ (\textit{bzw. } \mathbb{N}_0) \longrightarrow \ \textit{Wert } x_n \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.4:

a) $x_n = (-1)^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

b) $x_n = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

c) $x_n = 1 - \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist $(0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \ldots)$.

d) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n; n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist

$$(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \frac{7776}{3125}, \ldots) \approx (2.0, 2.25, 2.3703..., 2.4414..., 2.4883..., \ldots).$$

Beispiel 1.5: Einige simple Berechnungen mit MuPAD 2.0. Folgen können z.B. als Funktionen definiert werden:

```
>> x := n -> (1 + 1/n)^n
                              n -> (1 +  1/n)^n
```

Der „Folgengenerator" `$` dient zur Erzeugung von Folgen:

```
>> x(n) $ n = 1..5

               2, 9/4, 64/27, 625/256, 7776/3125
```

Gleitpunktnäherungen werden durch `float` erzeugt:

```
>> float(x(n)) $ n = 1..5

          2.0, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832
```

Zunächst die formale Definition von „Konvergenz" und „Grenzwert", die etwas abschreckend sein mag, aber (keine Angst!) im WiWi-Kontext später auch nicht wirklich benutzt werden wird:

Definition 1.6: (Grenzwerte von Folgen)

Eine Folge (x_n) heißt **„konvergent"**, *wenn eine reelle Zahl x^* existiert, sodaß sich (intuitiv) „alle Zahlen x_n für großes n dem Wert x^* beliebig genau annähern". Formal: zu jedem noch so kleinen $\epsilon > 0$ läßt sich eine reelle Zahl $N(\epsilon)$ angeben, sodaß $|x_n - x^*| \leq \epsilon$ gilt für alle Indizes $n \geq N(\epsilon)$. Anschaulich: alle Werte x_n weichen für $n \geq N(\epsilon)$ maximal um den Wert ϵ vom Grenzwert ab.*

Der Wert x^* heißt dann **„Grenzwert" („Limes")** *der Folge (x_n). Schreibweise:*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \ .$$

Eine nicht konvergierende Folge heißt **„divergent"**.

Satz 1.7: (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Grenzwerte sind eindeutig, d.h., zu (x_n) gibt es höchstens ein x^* mit der obigen Eigenschaft.

Einige einfache Beispiele mit formalem Beweis:

Beispiel 1.8: Die konstante Folge $(x_n) = (c, c, c, \ldots)$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = c$, denn für alle n gilt

$$|x_n - x^*| = |c - c| = 0 \leq \epsilon \ ,$$

wie auch immer $\epsilon > 0$ vorgegeben wird. Formal: zu $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = 1$.

Nun ja, im obigen Beispiel war sogar das formale $N(\epsilon)$–Kriterium sehr einfach zu handhaben. Im nächsten Beispiel wird es ein klein wenig komplizierter:

Beispiel 1.9: Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Formaler Beweis: zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq N(\epsilon)$:

$$|x_n - x^*| = |x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\epsilon)} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Und noch ein Beispiel, diesmal ohne formalen Beweis:

Beispiel 1.10: Sei $x_n = c^n$ mit einer Zahl $c \in (-1, 1)$ (also: $|c| < 1$). Diese Folge konvergiert gegen den Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Z.B.:

$$c = 0.5: \quad (c^n) = (0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ 0.0625,\ 0.03125\ldots).$$

Für $|c| \geq 1$ gilt diese Aussage nicht! Z.B.:

$$\begin{aligned} c = 1: &\quad (c^n) = (1, 1, 1, 1, \ldots) &&\text{(konvergiert gegen 1)},\\ c = 2: &\quad (c^n) = (2, 4, 8, 16, \ldots) &&\text{(divergiert, bzw. „konvergiert gegen } \infty\text{“)}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.11: Einige Berechnungen mit MuPAD 2.0:

```
>> x := n -> c^n
                          n -> c^n
>> x(n) $ n = 1..10

                 2    3    4    5    6    7    8    9    10
            c, c , c , c , c , c , c , c , c , c
```

Grenzwerte werden mit `limit` berechnet. Die Hilfeseite dazu wird mittels `?limit` angefordert:

```
>> ?limit
```

Ohne Weiteres kann der Grenzwert nicht bestimmt werden, da er ja von den Eigenschaften von c abhängt:

```
>> limit(x(n), n = infinity)
Warning: cannot determine sign of ln(c) [stdlib::limit::limitMRV]

                          n
                   limit(c , n = infinity)
```

Nehmen wir an, es gilt $0 < c < 1$:

```
>> assume(0 < c < 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                    0
```

Nehmen wir an, $c > 1$:

```
>> assume(c > 1):
>> limit(x(n), n = infinity)

                                infinity
```

Ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge:

Beispiel 1.12: Die Folge $x_n = (-1)^n$, also $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist nicht konvergent (hat keinen Grenzwert). Formaler Beweis (etwas abschreckend?): zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich kein $N(\epsilon)$ finden. Angenommen, ein Grenzwert x^* existiert. Dann müßte $N(\epsilon)$ existieren mit

$$|x_n - x^*| \leq \epsilon, \quad |x_{n+1} - x^*| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon)$. Es würde folgen:

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n \underbrace{- x^* + x^*}_{=0} - x_{n+1}| \leq |x_n - x^*| + |x^* - x_{n+1}| \leq \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Für die betrachtete Folge gilt aber $|x_n - x_{n+1}| = 2$ für jedes n. Widerspruch! Damit muß die Annahme „es existiert x^*" falsch gewesen sein.

Man sieht: die formale Definition mit ϵ und $N(\epsilon)$ ist eigentlich nur was für die Mathematiker (das sind i.A. Formalisten). Wie geht man stattdessen beim praktischen Rechnen vor? Es gibt Rechenregeln! Damit läßt sich ϵ und $N(\epsilon)$ praktisch immer verbannen:

Satz 1.13: (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (x_n), (y_n) konvergierende Folgen, sei c eine konstante Zahl. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, **falls** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ **gilt (!)**,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$ *vorausgesetzt).*

Beispiel 1.14: Wir wissen bereits, daß konstante Folgen $x_n = c$ gegen c konvergieren, und daß $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert („eine Nullfolge ist"). Durch Einsatz der Rechenregeln folgt unmittelbar: ↓20.4.01

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \cdot 0 = 0,$$

usw., d.h.:

Alle Folgen der Form $x_n = \frac{1}{n^k}$ mit positiven Potenzen k sind Nullfolgen.

Manchmal muß man etwas manipulieren und umschreiben:

Beispiel 1.15:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 + \frac{1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2\ .$$

Hierbei wurde die Zahl 2 als konstante Folge angesehen und benutzt, daß wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ schon kennen. Man sieht, mit etwas Geschick eingesetzt, machen die Rechenregeln die Berechnung von Grenzwerten oft sehr einfach. Manchmal muß man allerdings „tricksen":

Beispiel 1.16:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\Big)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ +\ 1\Big)}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}\ +\ 1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0.$$

Manchmal helfen alle Rechenregeln nichts, und man muß sich auf die Hilfe der Mathematiker verlassen, die z.B. folgende Konvergenzaussage beweisen können:

Satz und Definition 1.17:

Sei c eine reelle Zahl. Die Folge $x_n = (1 + \frac{c}{n})^n$ *konvergiert gegen einen von* c *abhängenden Grenzwert* $x^*(c)$, *der auch als* e^c *oder auch als* $\exp(c)$ *bezeichnet wird. Die Funktion* $\exp\ :\ c \mapsto e^c$ *heißt* **„Exponential-Funktion“**. *Der spezielle Grenzwert* $e = e^1$ *für* $c = 1$ *heißt* **„Eulersche Zahl“***:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828... \ .$$

Beispiel 1.18: Einige Rechnungen mit MuPAD 2.0: die Exponentialfunktion heißt `exp`:

```
>> limit((1 + 1/n)^n, n = infinity);

                              exp(1)
```

Mit % wird auf den letzten Wert zugegriffen:

```
>> float(%);
                           2.718281829

>> exp(20) = exp(20.0)

                     exp(20) = 485165195.4
```

Die Exponentialfunktion kann mittels `plotfunc2d` gezeichnet werden. Falls `x` vorher einen Wert zugewiesen bekommen hatte, muß dieser zunächst mittels `delete` gelöscht werden:

```
>> delete x:
>> plotfunc2d(exp(x), x = -2..3)
```

Beispiel 1.19: („unterjährige und stetige Verzinsung“)
Ein Startkapital K_0 wird fest angelegt und jährlich mit dem zeitlich konstanten Zinssatz p verzinst (z.B., $p = 0.05$ entspricht einem Zinssatz von 5%). In jedem Jahr wächst das Kapital um den Faktor $1 + p$ an, wenn die Zinsen am Ende des Jahres ausbezahlt werden („ganzjährige Verzinsung“), d.h., nach einem Jahr ist K_0 auf $K_1 = K_0 \cdot (1 + p)$ angewachsen.
Nehmen wir an, die Zinsen werden monatlich ausgezahlt (mit dem monatlichen Zinssatz $p/12$) und „verzinseszinsen“ sich ebenfalls, so vergrößert sich das Kapital in jedem Monat um den Faktor $1 + \frac{p}{12}$, d.h., nach einem Jahr ist das Kapital auf

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12}$$

angewachsen („unterjährige Verzinsung", hier: „monatliche Verzinsung").
Bei wöchentlicher Verzinsung wächst das Kapital pro Woche jeweils um den Faktor $1 + \frac{p}{52}$, also in einem Jahr auf

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{52}\right)^{52} .$$

Bei täglicher Verzinsung wächst das Kapital pro Tag jeweils um den Faktor $1 + \frac{p}{365}$, also in einem Jahr auf

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{365}\right)^{365} .$$

Man kann dieses Spiel weiter treiben und von „stündlicher Verzinsung" oder „minütlicher Verzinsung" reden. Im Grenzfall („kontinuierliche Verzinsung") läuft dies auf das Folgende hinaus: zerlege das Jahr in n gleiche Zeitabschnitte. Am Ende jedes Zeitabschnitts vermehrt sich das Kapital um den Faktor $1 + \frac{p}{n}$, nach n Abschnitten (also am Ende des Jahres) ist das Kapital auf

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n}$$

angewachsen. „Stündliche"/„minütliche"/„sekündliche"/... Verzinsung heißt, daß man immer kleinere Zeitabschnitte betrachtet, d.h., den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachtet:

$$K_1 = \lim_{n\to\infty} K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n} = K_0 \; e^p \; .$$

Zahlenbeispiel: Startkapital$K_0 = 1\,000$ (DM oder Euro oder Islandkronen), Zinsatz $p = 0.05 \equiv 5\%$. Bei ganzjähriger Verzinsung hat man nach einem Jahr $K_1 = 1\,050$, bei kontinuierlicher Verzinsung $K_1 = 1\,000 \cdot \exp(0.05) \approx 1\,051.27$.

1.2.2 Unendliches

Die „unendlichen Werte" $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen, sondern dienen nur als nützliche Abkürzungen, um gewisse Situationen zu beschreiben. Wir lassen $\pm\infty$ als Grenzwerte zu:

Definition 1.20: ($\pm\infty$ als Grenzwert)

- *Eine Folge (x_n)* **„konvergiert gegen ∞"**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c > 0$ überschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, sodass $x_n \geq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \; .$$

- *Eine Folge (x_n)* **„konvergiert gegen $-\infty$"**, *wenn die Folgenglieder jede beliebig vorgegebene Schranke $c < 0$ unterschreiten: zu jedem reellen c existiert eine reelle Zahl $N(c)$, sodass $x_n \leq c$ gilt für alle Indizes $n \geq N(c)$. Schreibweise:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \; .$$

Beispiel 1.21: Die Folgen $x_n = n$, $x_n = n^2$, $x_n = \sqrt{n}$, $x_n = 2^n$ konvergieren gegen ∞. Die Folgen $x_n = -n$, $x_n = -2 \cdot n^2$, $x_n = -\sqrt{n}$, $x_n = -(2^n)$ konvergieren gegen $-\infty$. $\boxed{\downarrow 24.4.01}$

Beispiel 1.22: Achtung: die Folgen $x_n = (-1)^n \cdot n$ (also $(-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$) oder auch $x_n = (-2)^n$ (also $(-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$) konvergieren **nicht** gegen ∞ oder $-\infty$, sie divergieren!

Man darf getrost mit ∞ und $-\infty$ rechnen, wobei folgende Rechenregeln gelten:

Rechenregeln für $\pm\infty$ 1.23:

Sei c eine reelle Zahl.

- $c \pm \infty = \pm\infty$,
- $c \cdot (\pm\infty) = \pm\mathrm{sign}(c)\,\infty$ **für** $c \neq 0$. *Hierbei ist* $\mathrm{sign}(c)$ *das Vorzeichen von c.*
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$,
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$,
- $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$,
- $c^\infty = \infty$ *für* $c > 1$, $c^\infty = 0$ *für* $0 < c < 1$,
- $c^{-\infty} = 0$ *für* $c > 1$, $c^{-\infty} = \infty$ *für* $0 < c < 1$.

Beispiel 1.24: Die Folge $x_n = n^3 + n$ konvergiert gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + n) = \lim_{n\to\infty} n^3 + \lim_{n\to\infty} n = \infty + \infty = \infty \ .$$

Aus dem obigen Ergebnis folgt sofort das nächste Ergebnis:

Beispiel 1.25: Die Folge $x_n = \frac{1}{n^3+n}$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 + n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 + n)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Beim Rechnen mit $\pm\infty$ muß man aber etwas Vorsicht walten lassen. Wenn man auf eine der folgenden Situationen stößt, darf man nicht weiterrechnen, sondern muß die betrachteten Grenzwerte anders ermitteln:

Undefinierte Ergebnisse beim Rechnen mit $\pm\infty$ 1.26:

- $0 \cdot (\pm\infty) =$ *„undefiniert“*,
- $\infty - \infty =$ *„undefiniert“*, $-\infty + \infty =$ *„undefiniert“*,
- $c^\infty =$ *„undefiniert“ für* $c \le 0$ *und* $c = 1$,
- $c^{-\infty} =$ *„undefiniert“ für* $c \le 0$ *und* $c = 1$,
- $\frac{1}{0} =$ *„undefiniert“*.

Beispiel 1.27: Betrachte die Folge $x_n = n^3 - n$:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - n) \overset{(??)}{=} \lim_{n\to\infty} n^3 - \lim_{n\to\infty} n \overset{(??)}{=} \infty - \infty \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert“}.$$

Dies heißt nicht, daß kein Grenzwert existiert, sondern nur, daß wir den Grenzwert über die Rechenregeln mit $\pm\infty$ nicht berechnen können. Man muß in einem solchen Fall genauer untersuchen. Z.B funktioniert folgendes Argument:

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - n) = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} n^3 \ \cdot \ \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)$$

$$= \infty \ \cdot \ \Big(1 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}\Big) = \infty \ \cdot \ \Big(1 - \frac{1}{\infty}\Big) = \infty \ \cdot \ (1 - 0) = \infty \ .$$

Ein weiteres solches Beispiel:

Beispiel 1.28: Betrachte die Folge $x_n = \frac{2\,n^3 + n}{n^4 + 1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^3 + n}{n^4 + 1} \overset{(??)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2\,n^3 + n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^4 + 1)} \overset{(??)}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{(??)}{=} \text{„undefiniert“}.$$

Dies sagt wiederum gar nichts darüber aus, ob ein Grenzwert existiert oder nicht. In diesem Fall führt wieder ein wenig Manipulation zum Erfolg:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^3 + n}{n^4 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \Big(2 + \frac{1}{n^2}\Big)}{n^4 \cdot \Big(1 + \frac{1}{n^4}\Big)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{n \cdot \Big(1 + \frac{1}{n^4}\Big)}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{\infty}}{\infty \cdot \Big(1 + \frac{1}{\infty}\Big)} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

1.3 Reihen

Reihen sind Folgen (s_n), in denen die Folgenglieder s_n Summen sind:

Definition 1.29: (Reihen)

Eine **Reihe** $\sum_i a_i$ *ist eine Folge* (s_n) *von sogenannten* **„Partialsummen“**

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Die Reihe $\sum_i a_i$ *heißt* **„konvergent gegen** s^***“**, *wenn die Partialsummen gegen einen Grenzwert* s^* *konvergieren. Schreibweise:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s^* = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

(Reihen können auch mit anderen Werten als $i = 1$ *starten.)*

Beispiel 1.30: Mit dem folgenden Beispiel soll Carl Friedrich Gauß (das ist der Mann auf dem 10-DM-Schein, einer der größten Mathematiker aller Zeiten) als kleiner Junge seinen Lehrer in Bedrängnis gebracht haben. Dieser hatte die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100(?) aufzuaddieren. In der Erwartung, die Klasse für eine Weile beschäftigt zu haben, wollte er den Raum verlassen um sich vergnüglicheren Dingen als dem Unterricht hinzugeben. Gauß hatte das Ergebnis, bevor der Lehrer den Raum verlassen konnte.

Der kleine Carl Friedrich fand folgende explizite Formel für die sogenannte **„arithmetische Reihe“**:

$$\begin{aligned}
s_n = \sum_{i=1}^{n} i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
&\qquad\quad n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ Summanden}} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).
\end{aligned}$$

Halten wir fest:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.}$$

Ein weiteres Beispiel, die „geometrische Reihe“:

Beispiel 1.31: Sei p eine reelle Zahl. Eine **„geometrische Reihe“** ist von der Form

$$s_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \sum_{i=0}^{n} p^i \ .$$

Auch in diesem Fall kann man eine explizite Formel für s_n angeben:

$$\boxed{s_n = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \ .}$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen:

$$\begin{array}{rcl} (1-p) \cdot s_n & = & (1-p) \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\ & = & \quad 1 \quad \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\ & & \ -p \quad \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n) \\ & = & 1 + p + p^2 + \cdots + p^n \\ & & \quad - p - p^2 - \cdots - p^n - p^{n+1} \\ & = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad - p^{n+1}. \end{array}$$

Mit der expliziten Summenformel ist die Konvergenz geometrischer Reihen leicht zu überprüfen. Für $|p| < 1$ konvergiert p^{n+1} gegen $p^\infty = 0$:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1 - p} \quad \text{für } |p| < 1 \ .}$$

Für $p > 1$ ist der Grenzwert ∞:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \lim_{n \to \infty} \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} = \frac{p^\infty - 1}{p - 1} = \frac{\infty - 1}{p - 1} = \frac{\infty}{p - 1} = \infty \ .$$

Beispiel 1.32: Einige Berechnungen mit MuPAD 2.0. Für die symbolische Berechnung von Summen ist die Funktion `sum` zuständig:

```
>> sum(i, i = 1..n)
                                     2
                                n   n
                                - + --
                                2   2
```

Durch Faktorisierung mittels `factor` ergibt sich oft eine einfachere Form:

```
>> factor(%)
                              1/2 n (n + 1)
```

Die geometrische Reihe:

```
>> sum(p^i, i = 0..n)
                                n
                            p p  - 1
                            --------
                             p - 1
>> assume(0 < p < 1):
>> sum(p^i, i = 0..infinity)
                                  1
                             - -----
                               p - 1
```

Eine Öko-Anwendung der „geometrischen Reihe“:

Beispiel 1.33: Ein Anfangskapital K_0 wird zu Beginn des „0-ten Jahres“ eingezahlt und mit dem konstanten jährlichen Zinssatz p verzinst. Jedes Jahr vermehrt sich das Kapital um den Faktor $q = 1 + p$ (der „Aufzinsfaktor“). Am Ende jeden Jahres wird dem Kapital jeweils ein fester Betrag R (die „Rente“) entnommen. Wie groß ist das Kapital K_n zu Beginn des n-ten Jahres?

Zu Beginn des ersten Jahres:

$$K_1 = K_0 \cdot q - R.$$

Zu Beginn des zweiten Jahres:

$$K_2 = K_1 \cdot q - R = (K_0 \cdot q - R) \cdot q - R = K_0 \cdot q^2 - R \cdot q - R.$$

Zu Beginn des dritten Jahres:

$$K_3 = K_2 \cdot q - R = (K_0 \cdot q^2 - R \cdot q - R) \cdot q - R = K_0 \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R.$$

Man sieht, wie es weitergeht: zu Beginn des n-ten Jahres beträgt das Kapital

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot q^{n-1} - R \cdot q^{n-2} - \cdots - R \cdot q - R$$

$$= K_0 \cdot q^n - \sum_{i=0}^{n-1} R \cdot q^i = K_0 \cdot q^n - R \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\ .$$

Damit ergibt sich die folgende **„Sparkassenformel“** für den Kapitalabbau durch Auszahlung einer festen Rente bei einem Zinssatz p:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \overset{(q=1+p)}{=} K_0 \cdot (1+p)^n - R \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p}\ .}$$

Für Reihen gibt es spezielle Konvergenzkriterien:

Satz 1.34: (einige Konvergenzkriterien für Reihen) ↓27.4.01

Betracht $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

- *Der Grenzwert für* $n \to \infty$ *kann nur existieren, wenn die Summanden* (a_i) *eine Nullfolge bilden. Aber Achtung: selbt wenn* $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ *gilt, so ist im Allgemeinen die Konvergenz der Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *nicht automatisch garantiert (dies ist ein Divergenzkriterium, kein Konvergenzkriterium!).*
- **(„Quotientenkriterium")** *Gilt für alle* i *ab einem (beliebigen) Wert* i_0
$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq c$$
für einen Wert $c \in (0,1)$, *so konvergiert* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
- **(„Majorantenkriterium")** *Sei* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *eine konvergente Reihe mit positiven Summanden. Gilt für alle* i *ab einem (beliebigen) Wert* i_0
$$|a_i| \leq b_i,$$
so konvergiert auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beispiel 1.35: Die Reihe $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$, da die Summanden $a_i = \frac{i}{i+1}$ nicht gegen 0 konvergieren (sie konvergieren gegen 1).

Beispiel 1.36: Die Reihe $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ konvergiert nicht für $n \to \infty$: zwar konvergieren die Summanden $a_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$ gegen 0, aber „nicht schnell genug":

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 18.5896... \, , \quad \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{i}} = 61.8010... \, , \quad \sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{i}} = 198.5446... \, .$$

Genauer gesagt: die Reihe „konvergiert gegen ∞": $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = \infty.$

Beispiel 1.37: Betrachte die Reihe $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, wo x eine beliebige feste reelle Zahl ist (beachte: $0! = 1$). Diese Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Mit $a_i = \frac{x^i}{i!}$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Summanden

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{|x|^i}{i!}} = \frac{|x|^{i+1} \cdot i!}{|x|^i \cdot (i+1)!}.$$

Mit $(i+1)! = (i+1)\cdot i\cdot(i-1)\cdot\ \ldots\cdot 1 = (i+1)\cdot i!$ folgt

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{|x|\cdot i!}{(i+1)\cdot i!} = \frac{|x|}{i+1}\ .$$

Für hinreichend große i (nämlich $i \geq 2\cdot|x|$) gilt

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq \frac{|x|}{2\cdot|x|+1} < \frac{|x|}{2\cdot|x|} = \frac{1}{2} =: c < 1,$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist.

Der Grenzwert heißt **„Exponentialfunktion"** e^x bzw. $\exp(x)$. In der Tat stimmt die Reihe mit der in Satz 1.17 benutzten Definition überein (was allerdings nicht ganz so trivial zu zeigen ist):

$$\boxed{e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\ .}$$

Die Reihendarstellung der exp-Funktion bietet einige Vorteile. Für kleine Argumente x gilt z.B. die Näherung

$$\exp(x) = 1 + \underbrace{x}_{\text{klein}} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\text{noch kleiner}} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{\substack{\text{noch viel}\\ \text{kleiner}}} + \cdots \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}\ .$$

Betrachten wir die in Beispiel 1.19 eingeführte stetige Verzinsung. Bei einem jährlichen Zinsatz von $x = p$ ergibt die jährliche Verzinsung das Anwachsen eines Kapitals um den Aufzinsfaktor $1 + p$ pro Jahr. Die stetige Verzinsung ergibt den Faktor $\exp(p)$, der allerdings nur unwesentlich größer ist:

$$\exp(p) = \underbrace{1\ +\ p}_{\substack{\text{jährliche}\\ \text{Verzinsung}}} + \underbrace{\frac{p^2}{2!} + \cdots}_{\substack{\text{Zusatz durch}\\ \text{stetige Verzinsung}}} = \underbrace{1\ +\ 0.05}_{\substack{\text{jährliche}\\ \text{Verzinsung}}} + \underbrace{0.00125 + \cdots}_{\substack{\text{Zusatz durch}\\ \text{stetige Verzinsung}}}.$$

Vergleiche mit dem in Beispiel 1.19 berechneten Wert von $K_1 = 1\,000\cdot\exp(0.05) \approx 1\,051.27$ für das Startkapital $K_0 = 1\,000$ bei stetiger Verzinsung gegenüber $K_1 = 1\,000\cdot(1{+}0.05) = 1\,050$ bei jährlicher Verzinsung. Die zusätzlichen 1.27 bei stetiger Verzinsung entsprechen im Wesentlichen dem nächsten Term $\frac{p^2}{2}$ der Exponentialreihe.

Es gibt einige Situationen, wo man (endliche) Reihen explizit berechnen kann und damit dann den Grenzwert bestimmen kann:

Beispiel 1.38: Betrachte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}$. Die entscheidende Beobachtung ist: ↓4.5.01

$$a_i = \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(man bringe $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ auf den Hauptnenner). Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \\ &\qquad - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Man nennt so eine Summe auch „Teleskopsumme“: sie läßt sich zu einigen wenigen Termen „zusammenschieben“, da sich fast alle Summanden aufheben. Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

Beispiel 1.39: Wir setzen das Majorantenkriterium aus Satz 1.34 ein, um zu zeigen, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. Dazu schätzen wir $a_i = \frac{1}{i^2}$ gegen $\tilde{b}_i = \frac{1}{i\cdot(i+1)}$ ab (wir wollen ausnutzen, daß wir nach dem letzten Beispiel bereits wissen, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_i$ konvergiert). Es gilt zwar nicht unmittelbar $|a_i| = a_i \leq \tilde{b}_i$, aber mit

$$i^2 \geq \frac{i \cdot (i+1)}{2}$$

($\Leftrightarrow\ 2 \cdot i^2 \geq i^2 + i\ \Leftrightarrow i^2 \geq i$; dies ist für alle $i \geq 1$ erfüllt) folgt

$$a_i = \frac{1}{i^2} \leq \frac{2}{i \cdot (i+1)} = 2 \cdot \tilde{b}_i =: b_i\ .$$

Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \tilde{b}_i = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i = 2$$

konvergiert, ist nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ garantiert. Welchen Wert diese Reihe hat, haben wir damit allerdings nicht herausbekommen.

Beispiel 1.40: Die im letzten Beispiel betrachtete Summe wird mit MuPAD 2.0 berechnet:

```
>> sum(1/i^2, i = 1..infinity)
                                  2
                                PI
                                ---
                                 6
```

Hierbei ist `PI` $= \pi = 3.1415....$ Zur Kontrolle vergleichen wir diesen Wert mit einer langen, aber endlichen Summe:

```
>> float(%)
                              1.644934067

>> sum(1.0/i^2, i = 1..1000)

                              1.643934567
```

(Das passt einigermaßen.) Einige weitere Summen, z.B. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{i \cdot (i+2) \cdot (i+5)}$:

```
>> sum((i + 1)/i/(i + 2)/(i + 5), i = 1..infinity)

                                323/900
```

Oder auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$:

```
>> sum(1/i^3, i = 1..infinity)

                                zeta(3)
```

Nun ja, dieser Reihenwert hat keine elementare Darstellung. Stattdessen stellt MuPAD ihn mittels der (unter Mathematikern) berühmten speziellen Funktion `zeta` (die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion) dar. Das nützt uns hier relativ wenig, da wir mit dieser Funktion nicht näher vertraut sind. Zumindestens kann man hiermit aber bequem Gleitpunktnäherungen berechnen:

```
>> float(%)
                              1.202056903
```

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch eine exakte Aussage (ohne Beweis):

Satz 1.41:

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ *konvergiert genau dann gegen einen endlichen Wert, wenn* $k > 1$ *gilt.*

Beispiel 1.42: Für $k = 2$ und $k = 3$ haben wir die Reihenwerte $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ im Beispiel 1.40 bereits berechnet. In Beispiel 1.36 wurde $k = \frac{1}{2}$ betrachtet und festgestellt, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ nicht konvergiert. Der Wert $k = 1$ ist der Grenzfall: die sogenannte **„harmonische Reihe"** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ divergiert (genauer: konvergiert gegen ∞). Der Summenwert wächst für $n \to \infty$ gegen ∞, allerdings sehr langsam:

```
>> DIGITS := 3: // nur 3 Dezimalstellen werden berechnet
>> sum(1.0/i, i=1..10), sum(1.0/i, i=1..10^2),
   sum(1.0/i, i=1..10^3), sum(1.0/i, i=1..10^4)

                        2.93, 5.19, 7.49, 9.79
```
