

Nukleare Räume und der Satz vom Kern

Sönke Hansen*

31. Januar 2025

1. Einführung

Der Schwartzsche Satz vom Kern [Sch52, Sch55] besagt, dass jede stetige lineare Abbildung $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ aufgefasst werden kann als Integraloperator mit einem Kern $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$. Die Integraldarstellung $Tu(x) = \int K(x, y)u(y) dy$ ist im Distributionensinne zu verstehen als Bilinearform $\langle Tu, v \rangle = \langle K, v \otimes u \rangle$. Die Korrespondenz

$$L(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)) \cong \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n}), \quad T \leftrightarrow K,$$

ist ein linearer Homöomorphismus. Kurze Beweise findet man in [Ehr56, Gas60].

Die von Grothendieck entwickelte Theorie topologischer Tensorprodukte und nuklearer Räume, [Gro52, Gro55], führt zu folgender Abstraktion der obigen Formel:

$$L(Y, X') \cong (X \widehat{\otimes} Y)', \quad T \leftrightarrow K, \tag{1}$$

ist ein linearer Homöomorphismus, wenn X und Y nukleare Frécheträume oder nukleare (LF)-Räume sind. Die Dualräume und der Raum der linearen stetigen Operatoren $L(Y, X')$ tragen ihre starken Topologien. Dem vervollständigten Tensorprodukt $X \widehat{\otimes} Y$ liegen zwei lokalkonvexe Topologien zugrunde, die im allgemeinen verschieden sind. Der Dualraum des (vervollständigten) projektiven Tensorprodukts $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ wird mit dem Raum $B(X, Y)$ stetiger Bilinearformen identifiziert, dieser wiederum mit dem Operatorraum $L(Y, X')$. Das (vervollständigte) injektive Tensorprodukt $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ von Räumen glatter (Test-)Funktionen ist kanonisch isomorph zum Raum der (Test-)Funktionen auf dem Produktraum der Definitionsgebiete. Die Gleichheit von projektiver und injektiver Topologie ist charakteristisch für nukleare Räume.

In der Theorie linearer partieller Differentialoperatoren beschreibt man Eigenschaften von Operatoren über entsprechende Eigenschaften ihrer Schwartzkerne. Ein Satz von

*soenke@math.uni-paderborn.de

Peetre [Pee60] besagt, dass die Lokalität von Differentialoperatoren für diese Klasse von Operatoren charakteristisch ist. Die Lokalität impliziert, dass der Träger des Schwartzkerns in der Diagonale enthalten ist; die Struktur solcher Distributionen ist bekannt. Die Kommutatoren beliebiger Länge eines Pseudodifferentialoperators T mit Differentialoperatoren erster Ordnung sind Pseudodifferentialoperatoren deren Ordnungen nicht größer sind als die von T . Ein Satz von Beals [Bea79] zeigt, dass diese Eigenschaft charakteristisch ist für diese Pseudodifferentialoperatoren; dies hängt damit zusammen, dass die Schwartzkerne konormale Distributionen bezüglich der Diagonale sind, [Hör85, 18.2]. Siehe [Zwo12, §8.2] für eine semiklassische Version des Bealsschen Satzes. Kalküle der mikrolokalen Analysis funktionieren unter Voraussetzungen über die Träger (properly supported) und über die Singularitäten (Wellenfrontmengen) der Schwartzkerne der beteiligten Operatoren. Anwendungen für nukleare Räume gibt es auch in der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren auf einem Hilbertraum. Mit einem geeigneten Gelfandschen Dreier (Rigged Hilbert Space) $S \subset H \subset S'$, S nuklear, zeigt man die Existenz vollständiger Systeme verallgemeinerter Eigenfunktionen, [GV64, I 4.5]. Die Theorie nuklearer Räume und das Rechnen mit topologischen Tensorprodukten wird in der mathematischen Quantenfeldtheorie angewendet zur Auswertung von Feynman-Diagrammen, [Cos11].

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, einen Beweis des Satzes vom Kern in der Gestalt (1) für nukleare Fréchet- und (LF)-Räume und ihre Dualräume zu geben. Dies schließt die Themen topologische Tensorprodukte, nukleare Räume und Anwendungen auf konkrete Räume ein. Die Monographie [Trè67, Part III] ist die Standardreferenz. Um die Darstellung kurz zu halten, setze ich Grundkenntnisse in der (prä nuklearen) Funktionalanalysis und in der globalen Analysis voraus.

In den Abschnitten 2 und 3 werden die Räume $C^\infty(M; E)$ und $C_c^\infty(M; E)$ der glatten Schnitte in Vektorbündeln $E \rightarrow M$ über Mannigfaltigkeiten M , der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und die zugehörigen Distributionenräume behandelt. Es wird gezeigt, dass diese Räume mit ihren (starken) lokalkonvexen Topologien Montelsch sind, insbesondere reflexiv. Bilinearformen und ihr Zusammenhang mit Operatoren sind Gegenstand des Abschnitts 4. Das injektive Tensorprodukt $X \otimes_\varepsilon Y$ wird im Abschnitt 5 eingeführt; für konkrete Funktionenräume wird die Vervollständigung des injektiven Tensorprodukts im Abschnitt 6 bestimmt. Das projektive Tensorprodukt wird im Abschnitt 7 thematisiert. Dort wird folgender Satz von Grothendieck bewiesen: Die kanonische lineare Isomorphie $B(X, Y) \cong (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$ ist ein topologischer Isomorphismus, wenn X und Y Fréchet–Montelräume sind. Dieser Satz ist fundamental für den Beweis der topologischen Isomorphie im Satz vom Kern. In der Theorie nuklearer Räume spielen nukleare, absolutsummierende und Hilbert–Schmidtsche Operatoren und ihre wechselseitigen Beziehungen eine wichtige Rolle; diese Operatoren werden in den Abschnitten 8 bis 11 studiert. Im Abschnitt 12 werden nukleare Räume definiert, die Approximationseigenschaft und die charakteristische Gleichheit von injektiver und projektiver Tensorprodukttopologie werden dort bewiesen. Über Hilbert–Schmidtsche Einbettungen von Sobolevräumen und Permanenzeigenschaften nuklearer Räume zeigen wir im Abschnitt 13 die Nuklearität konkreter Räume von Funktionen und Distributionen. Formulierung und Beweis des Satzes vom Kern sind Gegenstand des Abschnitts 14. Im Anhang A werden Konzepte

und Sätze aus der Theorie lokalkonvexer Räume präsentiert, die der Arbeit zugrunde liegen. Es mag sinnvoll sein, diesen Anhang zuerst zu überfliegen.

Die Skalkörper von Vektorräumen sind \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Generisch ist der Skalkörper \mathbb{C} ; \mathbb{R} ist wo sinnvoll mit gemeint. Wird nichts Anderes gesagt, bezeichnen X, Y, Z, X_k usw. lokalkonvexe Räume; $X \subseteq Y$ heißt, dass X ein topologischer Unterraum von Y ist. Sind X oder X_i normierte Räume, dann bezeichnen $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_i$ ihre Normen. Der schwache und starke Dualraum von X wird mit X'_σ bzw. X'_β bezeichnet. Die Anwendung einer linearen Abbildung T oder einer Linearform ξ auf einen Vektor schreiben wir klammerlos als Tx bzw. ξx ; entsprechend schreiben wir ST für die Verkettung zweier linearer Abbildungen S und T . Dualräume und Räume von Operatoren tragen die starke lokalkonvexe Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen, also $X' = X'_\beta$ und $L(X, Y) = L_\beta(X, Y)$, wenn keine abweichenden Spezifikationen gemacht werden.

Bei der Vorbereitung habe ich mich neben [Trè67] auf die Werke [FW68, Kab14, MV92, Pie69, SW99] gestützt. In den inspirierenden Vorlesungen von Professor Floret über topologische Vektorräume [Flo73] begegnete ich dem Satz vom Kern, topologischen Tensorprodukten und nuklearen Räumen zum ersten Mal.

2. Räume differenzierbarer Funktionen

Wir verwenden die Multiindexnotation für partielle Ableitungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Der Raum $C^m(\bar{\Omega})$ der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, deren Ableitungen $\partial^\alpha f$ der Ordnung $|\alpha| \leq m$ stetig fortsetzbar sind auf den Abschluss $\bar{\Omega}$, ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup\{|\partial^\alpha f(x)| ; x \in \Omega\}$$

ein Banachraum.

Man nennt Ω ein **Lipschitzgebiet**, wenn jeder Punkt des Randes $\partial\Omega$ eine Umgebung besitzt, welche nach einer Translation und Drehung des Koordinatensystems von der Gestalt $U = U' \times U_n$ ist, $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Kugel und $U_n \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und wenn es eine Lipschitzfunktion $\varphi : U' \rightarrow U_n$ gibt, so dass gilt

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n) \in U' \times U_n ; x_n > \varphi(x')\}. \quad (2)$$

Der Graph von φ ist gleich $U \cap \partial\Omega$. Die Lipschitzeigenschaft bedeutet, dass für ein $L > 0$ und den Kegel $\Gamma := \{L|x'| \leq x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Für $y \in U \cap \partial\Omega$ ist $(y \pm \Gamma) \cap U \cap \partial\Omega = \{y\}$. Sind alle φ von der Klasse C^∞ , dann heißt Ω ein **Gebiet mit glattem Rand**.

Satz 2.1. *Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet und $k < m$, so ist die Inklusionsabbildung $C^m(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega})$ kompakt.*

Beweis. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli genügt es zu zeigen, dass mit einer nur von Ω abhängigen Konstanten $C > 0$ für $f \in C^1(\bar{\Omega})$ und $x, y \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})}|x - y|. \quad (3)$$

Für $|x - y| \geq \delta > 0$ genügt $C = 2/\delta$. Für konvexes Ω folgt (3) mit $C = 1$ aus dem Mittelwertsatz. Daher und weil $\bar{\Omega}$ kompakt ist, genügt es, zu einem gegebenen Randpunkt von Ω eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass (3) für alle $x, y \in U \cap \Omega$ gilt. Wir wählen $U = U' \times U_n$ wie in (2) und einen Kegel Γ gemäß der Lipschitzbedingung an φ . Nach geeigneter Verkleinerung von U' dürfen wir annehmen, dass für alle $x, y \in U \cap \Omega$ die gerade Verbindungstrecke xy in Ω enthalten ist oder der Durchschnitt $(x + \Gamma) \cap (y + \Gamma) \cap U \cap \Omega$ nichtleer ist. Im letztgenannten Fall wählen wir z aus dem Durchschnitt so, dass die Länge $|x - z| + |z - y|$ der bei z geknickten Verbindungstrecke minimal ist. Diese Länge ist $\leq C|x - y|$ für ein nur von L abhängiges C . Wir wenden den Mittelwertsatz an entlang der Strecken xz und zy . Somit gilt (3) für alle $x, y \in \Omega$. \square

Der Raum $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega})$ ist ein Fréchetraum. Der Teilraum $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$ derjenigen Funktionen, deren Fortsetzung nach $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch Null in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist ein abgeschlossener Unterraum von $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Satz 2.2. *Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, so sind $C^\infty(\bar{\Omega})$ und $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$ Fréchet-Montelräume, insbesondere reflexiv.*

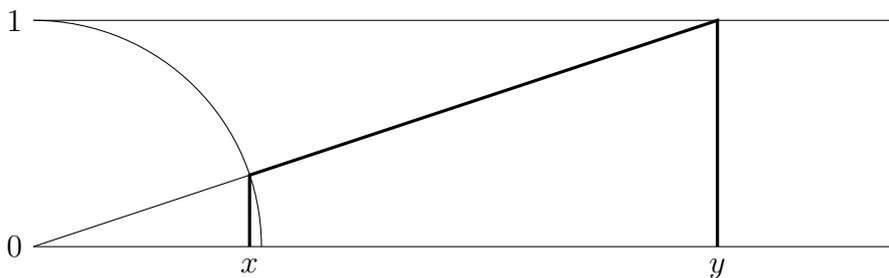
Beweis. $C^\infty(\bar{\Omega})$ trägt die projektive Topologie der Inklusionen in $C^k(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$. Aus Satz 2.1 folgt, dass die Inklusionen kompakt sind. Somit ist $C^\infty(\bar{\Omega})$ ein Montelraum. \square

Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann besitzt Ω eine (global) definierende Funktion; das ist eine reellwertige Funktion $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $\Omega = \{r > 0\}$ und $dr \neq 0$ auf $\partial\Omega$ gelten. Mittels Taylorabschätzung sieht man, dass $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$ aus allen $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ besteht, für die $r^{-k} \partial^\alpha f$ in Ω beschränkt ist, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Die Halbnormen $f \mapsto \sum_{k+|\alpha| \leq m} \sup_\Omega r^{-k} |\partial^\alpha f|$ definieren die Fréchetraumtopologie auf $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Für die offene Einheitskugel $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist $r(x) = 1 - |x|^2$ eine definierende Funktion. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto y = (1 - |x|^2)^{-1/2} x,$$

ist ein Diffeomorphismus; ihre Inverse $\Phi^{-1} : y \mapsto x = (1 + |y|^2)^{-1/2} y$ wird in [Mel07, 1.9] als radiale Kompaktifizierung des \mathbb{R}^n bezeichnet. Die Graphik illustriert die Definition von $\Phi : x \mapsto y$.



Mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den **Schwartzraum** der schnell fallenden Funktionen f auf \mathbb{R}^n : $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\sup_y |y^\alpha \partial^\beta f(y)| < \infty$ für alle Multiindizes α, β . Mit dem durch die Suprema gegebenen Halbnormensystem ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Fréchetraum.

Satz 2.3. Die Zurückziehung $\Phi^* : f \mapsto f \circ \Phi$ ist ein Isomorphismus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cong \dot{C}^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$. Insbesondere ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Fréchet–Montelraum.

Beweis. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und setze $g = \Phi^* f \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\partial_x^\alpha g(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} h_{\alpha\beta}(x) \partial_y^\beta f(y), \quad y = (1 - |x|^2)^{-1/2} x,$$

mit Koeffizienten $h_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$, welche Linearkombinationen von Produkten partieller Ableitungen der Komponenten y^j von Φ sind. Für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ haben wir die Abschätzungen $h_{\alpha\beta}(x) = \mathcal{O}((1 - |x|)^{-k})$. Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \mathbb{N}$, dann gilt $\partial_y^\beta f(y) = \mathcal{O}(|y|^{-N}) = \mathcal{O}((1 - |x|)^N)$ für $|x| \uparrow 1$. Für solch ein f ist daher $g \in \dot{C}^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$. Somit ist $\Phi^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{C}^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$ definiert, linear und injektiv. Wir beweisen die Surjektivität. Es gilt $\partial_y^\alpha f(y) = \sum_{\beta \leq \alpha} h_{\alpha\beta}(y) \partial_x^\beta g(x)$, wobei die Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ beschränkte Funktionen auf \mathbb{R}^n sind. Für $g \in \dot{C}^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$ und $N \in \mathbb{N}$ ist $\partial_x^\beta g(x) = \mathcal{O}((1 - |x|)^N) = \mathcal{O}(|y|^{-N})$ wenn $|x| \uparrow 1$. Daraus folgt $g = \Phi^* f$ mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Da konvergente Folgen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und in $\dot{C}^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$ insbesondere punktweise konvergieren, ist der Graph von Φ^* abgeschlossen. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen für Frécheträume folgt, dass Φ^* und seine Inverse stetig sind. \square

Unter einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit, deren Topologie Hausdorffsch ist und die eine abzählbare Basis besitzt. Speziell ist M parakompakt. Wir nehmen auch an, dass M zusammenhängend ist. Der Raum $C^\infty(M)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ trägt die projektive Topologie der Familie der linearen Abbildungen

$$C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\overline{\kappa(U)}), \quad f \mapsto f \circ \kappa^{-1},$$

wobei die Karten $\kappa : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ einen abzählbaren Atlas von M durchlaufen, deren Parameterbereiche $\kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete mit glattem Rand sind. Wegen Satz 2.2 ist auch $C^\infty(M)$ ein Fréchet–Montelraum.

Sei $E \rightarrow M$ ein (komplexes) C^∞ -Vektorbündel endlichen Ranges r über einer Mannigfaltigkeit M . Mit $C^\infty(M; E)$ wird der Vektorraum glatter Schnitte bezeichnet. Jeder Punkt in M besitzt eine relativ kompakte offene Umgebung U , so dass das Bündel in einer Umgebung von \bar{U} einen Rahmen besitzt. Die Wahl eines Rahmens trivialisiert die Einschränkung $E|_U$ zu $U \times \mathbb{C}^r$ und liefert einen kanonischen linearen Isomorphismus: $C^\infty(U; E|_U) \cong C^\infty(U)^r$. Durch Verkettung mit Restriktionen auf solche U erhalten wir ein projektives System linearer Abbildungen $C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(U)^r$. Ausgestattet mit der zugehörigen projektiven Topologie ist $C^\infty(M; E)$ ein Fréchet–Montelraum.

Ist $F \rightarrow M$ ein weiteres glattes Vektorbündel, dann definiert man (lineare) Differentialoperatoren $D : C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$ indem man diese bezüglich lokaler Koordinaten und lokaler Rahmen durch Systeme linearer Differentialoperatoren mit C^∞ -Koeffizienten auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n repräsentiert, [Hör90, S. 151]. Im Falle $C^\infty(M; F) = C^\infty(M)$ nennen wir D einen **skalaren Differentialoperator**. Differentialoperatoren sind stetig; ohne weitere Rechnung folgt dies aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Ist M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein hermitescher

Zusammenhang auf E , dann sind $\nabla^k : C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; T^{(k,0)}M \otimes E)$ Differentialoperatoren, [Bes08, 1.17]. Abzählbar viele Halbnormen der Gestalt $s \mapsto \sup_{x \in K} |\nabla^k s(x)|$ erzeugen die Topologie auf $C^\infty(M; E)$. Jede Mannigfaltigkeit kann mit einer riemannschen Struktur ausgestattet werden und jedes Bündel mit einem hermiteschen Zusammenhang. Durch Kontraktion der ∇^k gegen Vektorfelder erhalten wir skalare Differentialoperatoren.

Bei der Untersuchung von Tensor-Topologien wird es zweckmäßig sein, stetige Halbnormen auf $C^\infty(M; E)$ der Gestalt $s \mapsto \sup_{x \in K} |Ds(x)|$ zu verwenden, wobei D ein skalarer Differentialoperator ist und $K \subseteq M$ ein Kompaktum. Nach Obigem ist klar, dass eine abzählbare Familie solcher Halbnormen existiert, die den Fréchetraum $C^\infty(M; E)$ definiert.

Bemerkung 2.4. Neben offenen Mannigfaltigkeiten sind auch (kompakte) Mannigfaltigkeiten M mit (glattem) Rand ∂M von Interesse, [Mel93]. Um Produkte von Mannigfaltigkeiten mit Rand zu erfassen, ist es sinnvoll, auch Mannigfaltigkeiten mit Ecken zuzulassen. Die Parameterbereiche von Karten (U, κ) sind offene Teilmengen $\kappa(U)$ von $\bar{\mathbb{R}}_+^n$, $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty[$, und die Koordinatenwechselfunktionen sind lokal als C^∞ -Funktionen fortsetzbar, [Lee13, 415f]. Es ist keine Einschränkung anzunehmen, dass $\kappa(U)$ der Abschluss eines beschränkten Lipschitzgebietes in \mathbb{R}^n ist. Somit sind auch in dieser allgemeineren Situation die Räume $C^\infty(M; E)$ definiert und Fréchet-Montelräume. Ist M kompakt mit glattem Rand ∂M , so ist die Menge aller Schnitte, die am Rand von unendlicher Ordnung verschwinden, ein abgeschlossener Unterraum $\dot{C}^\infty(M; X) \subseteq C^\infty(M; X)$.

Ist $K \subseteq M$ kompakt, dann ist $C_K^\infty(M; E) := \{s \in C^\infty(M; E) ; \text{supp } s \subseteq K\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^\infty(M; E)$. Sei $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von M durch kompakte Teilmengen, $K_j \subset \text{int } K_{j+1}$. Die Schnitte in E mit kompaktem Träger bilden einen (LF)-Raum

$$C_c^\infty(M; E) := \text{ind}_{j \rightarrow} C_{K_j}^\infty(M; E).$$

Jede beschränkte Teilmenge von $C_c^\infty(M; E)$ liegt in einer Stufe $C_{K_j}^\infty(M; E)$, ist dort beschränkt, somit relativ kompakt. Somit ist $C_c^\infty(M; E)$ ein Montelraum, insbesondere tonneliert und reflexiv. Außerdem ist dieser Raum vollständig und bornologisch.

3. Distributionen

Eine Lebesgue-messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt lokal integrierbar, wenn für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ gilt: $\int_K |f(x)| dx < \infty$. Eine lokal integrierbare Funktion f definiert ein stetiges lineares Funktional $\varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x) dx$ auf $C_c^\infty(\Omega)$. Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $C_c(\Omega)$ liegt, ist f durch dieses Funktional bis auf eine Nullfunktion eindeutig bestimmt. Man nennt $C_c^\infty(\Omega)$ den Raum der Testfunktionen auf Ω und seinen starken Dualraum $\mathcal{D}'(\Omega) := (C_c^\infty(\Omega))'_\beta$ den Raum der Distributionen. Der Lebesgue-Raum $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (der Äquivalenzklassen) lokal integrierbarer Funktionen wird in der oben angegebenen Weise mit einem linearen Teilraum des Raumes der Distributionen identifiziert, dem Raum der Funktionen $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Die Dirac-Distribution (Deltafunktion) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta : \varphi \mapsto \varphi(0)$, ist ein Beispiel einer nicht lokal integrierbaren

Distribution. Die Dualitätsklammer schreiben wir oft $\langle f, \varphi \rangle := f(\varphi)$ für $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Mittels Dualität erweitert man für Funktionen bekannte Begriffe und Operationen auf Distributionen, speziell die Multiplikation mit $C^\infty(\Omega)$ -Funktionen, den Träger $\text{supp } f$ einer Distribution f , die partiellen Ableitungen $\langle \partial_j f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_j \varphi \rangle$, $\partial_j := \partial/\partial x_j$. Lineare Differentialoperatoren D mit Koeffizienten in $C^\infty(\Omega)$ sind stetige lineare Operatoren auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit der besonderen Eigenschaft lokal zu sein, d.h., es gilt stets $\text{supp } Df \subseteq \text{supp } f$. Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ sind Translations- und Faltungsoperatoren definiert, Letztere i.A. nur wenn einer der Faktoren einen kompakten Träger besitzt. Das Produkt von Distributionen ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen definiert.

Der starke Dualraum des Schwartzraumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum der temperierten Distributionen und wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Die Inklusionsabbildung $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig mit dichtem Bild. Die dazu duale Abbildung identifiziert $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit einem linearen Teilraum von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ist \mathbb{C} der Skalkörper, dann ist die Fouriertransformation $F : u \mapsto \hat{u}$, $\hat{u}(x) = \int e^{-iy \cdot x} u(y) dy$, definiert. Sie ist ein Automorphismus des Schwartzraumes. Die zur Fouriertransformation duale Abbildung setzt F fort zu einem Automorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf sich.

Distributionenräume sind nicht einfach Dualräume von Räumen von Testfunktionen. Bestandteil des Konzepts ist auch die Interpretation lokal integrierbarer Funktionen als Distributionen.

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Für eine Inklusion von $L_{\text{loc}}^1(M)$ in einen Dualraum von Testfunktionen wird die Definition eines Integrals benötigt. Das **Dichtenbündel** über M ist dasjenige Vektorbündel $|\Lambda| \rightarrow M$ vom Rang 1, dessen Übergangsfunktionen die Absolutbeträge der Jacobideterminanten der Kartenwechsel sind. Dank der Transformationsformel für Lebesgue-Integrale kann das Integral

$$\int_M : C_c^\infty(M; |\Lambda|) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_M f,$$

definiert werden. Die Definition geschieht mit Hilfe von Zerlegungen der Eins, welche einem Atlas untergeordnet sind; das Integral hängt nicht von der Wahl einer Zerlegung ab. Der Raum der Distributionen auf M ist der starke Dualraum $\mathcal{D}'(M) := C_c^\infty(M; |\Lambda|)'_\beta$. Ordnet man Funktionen $f \in L_{\text{loc}}^1(M)$ das Funktional $\varphi \mapsto \int_M f\varphi$ zu, so erhält man eine kanonische Inklusion $L_{\text{loc}}^1(M) \subset \mathcal{D}'(M)$. Liegt alternativ eine positive Dichte $\mu \in C^\infty(M; |\Lambda|)$ vor, beispielsweise für eine riemannsche Mannigfaltigkeit das Volumenelement, dann definiert μ einen kanonischen Isomorphismus $C^\infty(M; |\Lambda|) \cong C^\infty(M)$. Konsistent damit, identifiziert man $f \in L_{\text{loc}}^1(M)$ mit der Distribution $\varphi \mapsto \int_M f\varphi d\mu$.

Sei $E \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel und $E^* \rightarrow M$ das duale Bündel. Dann ist

$$\mathcal{D}'(M; E) := (C_c^\infty(M; E^* \otimes |\Lambda|))'_\beta$$

der Raum der Distributionenschnitte in E . Für $f \in C^\infty(M; E)$ und $\varphi \in C_c^\infty(M; E^* \otimes |\Lambda|)$ ist $f \otimes \varphi \in C^\infty(M; E \otimes E^* \otimes |\Lambda|)$. Nach Anwendung der Kontraktion von $E \otimes E^*$ auf das skalare Bündel $M \times \mathbb{C}$ erhalten wir $f\varphi \in C^\infty(M; |\Lambda|)$. Auf diese Weise wird f mit der Distribution $\varphi \mapsto \int_M f\varphi$ identifiziert. Somit ist $C^\infty(M; E) \subset \mathcal{D}'(M; E)$ und allgemeiner

$L^1_{\text{loc}}(M; E) \subset \mathcal{D}'(M; E)$. Ein linearer Differentialoperator $D : C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$ lässt sich wie folgt zu einem Differentialoperator auf Distributionenräumen fortsetzen. Durch partielle Integrationen findet man genau einen Differentialoperator

$$D^* : C_c^\infty(M; F^* \otimes |\Lambda|) \rightarrow C_c^\infty(M; E^* \otimes |\Lambda|) \quad \text{mit} \quad \int_M (Df)\varphi = \int_M f(D^*\varphi).$$

Der zu D^* duale Operator ist die gewünschte Fortsetzung.

Mit $\mathcal{E}'(M; E) := (C^\infty(M; E^* \otimes |\Lambda|))'_\beta$ wird der Raum der Distributionsschnitte mit kompaktem Träger bezeichnet.

Im Zusammenhang mit L^2 -Theorie ist oft die Verwendung des Bündels $|\Lambda|^{1/2} \rightarrow M$ der Halbdichten zweckmäßig. Ist M orientierbar, $n = \dim M$, dann kann man statt des Dichtenbündels $|\Lambda|$ das Bündel der alternierenden n -Formen verwenden.

4. Bilineare Abbildungen

Eine bilineare Abbildung $b : X \times Y \rightarrow Z$ heißt **getrennt stetig**, wenn für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$, die linearen Abbildungen $b(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$ und $b(\cdot, y) : X \rightarrow Z$ stetig sind. Für getrennt stetiges b folgt aus der Identität

$$b(x, y) - b(x_0, y_0) = b(x - x_0, y - y_0) + b(x_0, y - y_0) + b(x - x_0, y_0),$$

dass b genau dann stetig ist, wenn b im Nullpunkt von $X \times Y$ stetig ist. Die Dualität $X' \times X \ni (\xi, x) \mapsto \xi x$ ist getrennt stetig; sie ist stetig genau dann, wenn X eine beschränkte Nullumgebung besitzt und somit normierbar ist. Mit $B(X, Y; Z)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen bilinearen Abbildungen $X \times Y \rightarrow Z$, mit $B(X, Y)$ den der stetigen bilinearen Formen.

Für $A = A_1 \times A_2$, $A_i \subset X_i$ beschränkt, ist $b \mapsto \sup_A |b|$ eine Halbnorm auf $B(X_1, X_2)$. Die Familie dieser Halbnormen definiert einen lokalkonvexen Raum $B_\beta(X_1, X_2)$, den mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Produkten beschränkter Mengen ausgestatteten Raum der bilinearen stetigen Funktionale. Wir kürzen $B_\beta(X_1, X_2)$ ab als $B(X_1, X_2)$, wenn keine andere lokalkonvexe Topologie festgelegt ist. Mit $B_c(X_1, X_2)$ bezeichnen wir den mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Produkten $A = A_1 \times A_2$ kompakter absolutkonvexer Mengen A_i ausgestatteten lokalkonvexen Raum bilinearer stetiger Funktionale.

Hilfssatz 4.1. *Seien X und Y metrisierbar, X tonneliert. Sei $b : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear und getrennt stetig. Dann ist b stetig.*

Beweis. Angenommen, b wäre nicht stetig. Dann gäbe es Nullfolgen (x_n) und (y_n) in X bzw. Y und eine stetige Halbnorm p auf Z , so dass $p(b(x_n, y_n)) > 1$ für alle n gilt. Setze $\varphi_n = b(\cdot, y_n) \in L(X, Z)$. Die Menge $U := \bigcap_n \{x ; p(\varphi_n(x)) \leq 1\} \subset X$ ist absolutkonvex und abgeschlossen. Ist $x \in X$, so ist $b(x, \cdot) \in L(Y, Z)$. Da (y_n) beschränkt ist, folgt $\sup_n p(\varphi_n(x)) < \infty$. Somit ist U auch absorbierend, also eine Tonne. Da X tonneliert ist, ist U eine Nullumgebung. Für hinreichend große n gilt daher $x_n \in U$ und $p(b(x_n, y_n)) = p(\varphi_n(x_n)) \leq 1$, ein Widerspruch. \square

Mit $T \in L(Y, X')$ assoziieren wir die getrennt stetige Bilinearform $b_T : (x, y) \mapsto (Ty)x$.

Satz 4.2. *Seien X und Y Fréchet-Räume. Die Abbildung $L(Y, X') \ni T \mapsto b_T$ ist ein Isomorphismus $L(Y, X') \cong B(X, Y)$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 4.1 ist $b_T \in B(X, Y)$ für $T \in L(Y, X')$. Wir zeigen, dass die lineare Injektion $J : L(Y, X') \rightarrow B(X, Y)$, $T \mapsto b_T$, surjektiv ist. Sei $b \in B(X, Y)$. Die Abbildung $T : Y \ni y \mapsto b(\cdot, y) \in X'$ ist linear. Ist $A \subset X$ beschränkt, so existiert eine Nullumgebung $U \subset Y$ mit $|(Ty)x| = |b(x, y)| \leq 1$ für $(x, y) \in A \times U$. Folglich ist $TU \subset A^\circ$ und $T \in L(Y, X')$.

Seien $A_X \subset X$ und $A_Y \subset Y$ beschränkt, $V := (A_X)^\circ \subset X'$. Für $T \in L(Y, X')$ gilt

$$\sup\{p_V(Ty) ; y \in A_Y\} = \sup\{|b_T(x, y)| ; x \in V^\circ, y \in A_Y\}.$$

Nach dem Bipolarenatz ist V° der Abschluss der absolutkonvexen Hülle von A_X . Damit ist gezeigt, dass J ein Homöomorphismus ist. \square

5. Das injektive Tensorprodukt

Eine bilineare Abbildung $\otimes : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, ist ein (algebraisches) **Tensorprodukt** von X mit Y , wenn sie folgende universelle Eigenschaft hat: Jede bilineare Abbildung $b : X \times Y \rightarrow Z$ faktorisiert als $b = \hat{b} \otimes$ mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\hat{b} : X \otimes Y \rightarrow Z$. Man nennt \hat{b} die lineare Erweiterung von b . Das Tensorprodukt ist bis auf lineare Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist die Erweiterung \hat{b} ein linearer Isomorphismus, dann ist auch $b : X \times Y \rightarrow Z$ ein Tensorprodukt. Diese Situation liegt genau dann vor, wenn $\{b(x_j, y_k)\} \subset Z$ linear unabhängig ist, falls $\{x_j\} \subset X$ und $\{y_k\} \subset Y$ dies sind, und wenn Z die lineare Hülle von $b(X \times Y)$ ist.

Satz 5.1. *Sind X und Y lokalkonvex, so ist die Abbildung $b : X \times Y \rightarrow B(X'_\sigma, Y'_\sigma)$ mit $b(x, y) : (\xi, \eta) \mapsto (\xi x)(\eta y)$ ein Tensorprodukt von X mit Y .*

Beweis. (Vergleiche [Trè67, Prop. 42.4].) Sei $z \in B(X'_\sigma, Y'_\sigma)$. Wegen der Stetigkeit von z gibt es endliche Teilmengen $F_X \subset X$ und $F_Y \subset Y$, so dass

$$|z(\xi, \eta)| \leq \left(\sum_{x \in F_X} |\xi x| \right) \left(\sum_{y \in F_Y} |\eta y| \right) \quad \text{für } (\xi, \eta) \in X' \times Y'.$$

Wähle Basen $\{x_j\} \subset X$ und $\{y_k\} \subset Y$ der von F_X und F_Y erzeugten Unterräume und duale Familien $\{\xi_j\} \subset X'$ und $\{\eta_k\} \subset Y'$, d.h. $\xi_i x_j = \delta_{ij}$ und $\eta_i y_k = \delta_{ik}$. Die Linearform $\xi - \sum_j (\xi x_j) \xi_j$ verschwindet auf F_X . Entsprechendes gilt für F_Y . Folglich haben wir $z = \sum_{j,k} z(\xi_j, \eta_k) b(x_j, y_k)$. Somit liegt z in der linearen Hülle von $b(X \times Y)$. Liegt eine Linearkombination $\sum_{j,k} \lambda_{jk} b(x_j, y_k) = 0$ vor, dann folgt aus $b(x_j, y_k)(\xi_n, \eta_m) = \delta_{jn} \delta_{km}$, dass die Skalare λ_{jk} sämtlich Null sind. \square

Seien $U \subset X$ und $V \subset Y$ absolutkonvexe Nullumgebungen. Nach Satz 5.1 ist

$$(p_U \otimes_\varepsilon p_V)(z) := \sup_{\xi \in U^\circ, \eta \in V^\circ} \left| \sum_j (\xi x_j)(\eta y_j) \right| = \sup_{U^\circ \times V^\circ} |z| \quad (4)$$

für $z = \sum_j x_j \otimes y_j \in X \otimes Y = B(X'_\sigma, Y'_\sigma)$ wohldefiniert. Wegen (15) gilt

$$(p_U \otimes_\varepsilon p_V)(x \otimes y) = p_U(x)p_V(y). \quad (5)$$

Die Halbnormenfamilie $\{p_U \otimes_\varepsilon p_V\}_{U,V}$ definiert den topologischen Vektorraum $B_\varepsilon(X'_\sigma, Y'_\sigma)$ bilinearer Funktionale mit bi-gleichstetiger Konvergenz. Der Raum ist Hausdorffsch: Ist $z \neq 0$, so gibt es $(\xi, \eta) \in U^\circ \times V^\circ$ mit $z(\xi, \eta) \neq 0$, und es ist $(p_U \otimes_\varepsilon p_V)(z) > 0$. Das ε - oder **injektive Tensorprodukt** lokalkonvexer Räume X und Y ist der lokalkonvexe Raum $X \otimes_\varepsilon Y := B_\varepsilon(X'_\sigma, Y'_\sigma)$. Die vollständige Hülle von $X \otimes_\varepsilon Y$ wird mit $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ bezeichnet.

Sind $T_j : X_j \rightarrow Y_j$ linear, dann bezeichnet $T_1 \otimes T_2 : X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \otimes Y_2$ die lineare Erweiterung der bilinearen Abbildung $X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto T_1 x_1 \otimes T_2 x_2$.

Einen injektiven Operator $T \in L(X, Y)$ nennen wir eine Einbettung (von X in Y), wenn T ein Isomorphismus auf den Unterraum TX von Y ist.

Satz 5.2. *Seien $T_j \in L(X_j, Y_j)$. Dann ist $T_1 \otimes T_2 \in L(X_1 \otimes_\varepsilon X_2, Y_1 \otimes_\varepsilon Y_2)$. Sind T_1 und T_2 Einbettungen, dann ist auch $T_1 \otimes T_2$ eine Einbettung.*

Wir benötigen eine spezielle Polarenformel.

Hilfssatz 5.3. *Seien $U \subset X$ eine Nullumgebung und $W \subset X$ ein linearer Teilraum. Dann ist $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.*

Beweis. Für Polaren bezüglich eines Dualsystem gilt allgemein: $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ und $(U \cap W)^\circ = \overline{\Gamma(U^\circ \cup W^\circ)}$. Die zweite Formel folgt aus der ersten und dem Bipolarenatz. In X'_σ ist U° nach dem Satz von Alaoglu–Bourbaki kompakt und W° ist ein abgeschlossener linearer Teilraum. Somit ist $U^\circ + W^\circ$ abgeschlossen in X'_σ . Weil W° ein Vektorraum ist, folgt $\overline{\Gamma(U^\circ \cup W^\circ)} = U^\circ + W^\circ$. \square

Beweis von Satz 5.2. Es ist $T'_j \in L((Y'_j)_\sigma, (X'_j)_\sigma)$. Somit ist

$$T_1 \otimes T_2 : B((X'_1)_\sigma, (X'_2)_\sigma) \rightarrow B((Y'_1)_\sigma, (Y'_2)_\sigma), \quad z \mapsto z \circ (T'_1 \times T'_2).$$

Für Nullumgebungen $V_j \subset Y_j$ und $U_j \subset X_j$ mit $T_j U_j \subset V_j$ gilt $T'_j V_j^\circ \subset T'_j (T_j U_j)^\circ = U_j^\circ$. Die Stetigkeit von $T_1 \otimes T_2$ folgt aus der Abschätzung

$$\sup_{V_1^\circ \times V_2^\circ} |z \circ (T'_1 \times T'_2)| \leq \sup_{U_1^\circ \times U_2^\circ} |z| \quad \text{für } z \in B((X'_1)_\sigma, (X'_2)_\sigma).$$

Nun setzen wir voraus, dass die T_j Einbettungen sind. Dann ist $T'_j Y'_j$ ein dichter Teilraum von X'_j , somit $T_1 \otimes T_2$ injektiv. Seien $U_j \subset X_j$ Nullumgebungen. Dann existieren Nullumgebungen $V_j \subset Y_j$ mit $V_j \cap T_j X_j \subset T_j U_j$. Nach Hilfssatz 5.3 ist $(V_j \cap T_j X_j)^\circ = V_j^\circ + \ker T'_j$. Hieraus folgt $U_j^\circ = T'_j (T_j U_j)^\circ \subset T'_j V_j^\circ$. Somit ist

$$\sup_{U_1^\circ \times U_2^\circ} |z| \leq \sup_{V_1^\circ \times V_2^\circ} |z \circ (T'_1 \times T'_2)| \quad \text{für } z \in B((X'_1)_\sigma, (X'_2)_\sigma).$$

Folglich ist $T_1 \otimes T_2$ eine Einbettung. \square

Wie im Beweis von Satz 5.1 sieht man mit Hilfe dualer Basen ein, dass die kanonische Abbildung $X \otimes Y \hookrightarrow L(Y', X)$, $(x \otimes y) : \eta \mapsto (\eta y)x$, eine Injektion ist. Der Bildraum ist der Raum der linearen Operatoren endlichen Ranges, den man auf diese Weise mit dem Tensorprodukt $X \otimes Y$ identifiziert. Die injektive Tensortopologie stimmt mit der Unterraumtopologie überein:

Satz 5.4. *Es gilt $X \otimes_\varepsilon Y \subseteq L_\varepsilon(Y', X)$. Ist Y tonneliert, so ist $X \otimes_\varepsilon Y \subseteq L(Y', X)$.*

Beweis. Seien p und q stetige Halbnormen auf X bzw. Y , $U^\circ \subset X'$ und $V^\circ \subset Y'$ die Polaren der Einheitskugeln $U = \{p \leq 1\}$ und $V = \{q \leq 1\}$. Für $T = \sum_n x_n \otimes y_n$ gilt

$$(p \otimes_\varepsilon q)(T) = \sup_{\xi \in U^\circ} \sup_{\eta \in V^\circ} \left| \sum_n (\xi x_n)(\eta y_n) \right| = \sup_{\eta \in V^\circ} \sup_{\xi \in U^\circ} |\xi(T\eta)| = \sup_{\eta \in V^\circ} p(T\eta).$$

Somit ist $X \otimes_\varepsilon Y$ ein topologischer Unterraum von $L_\varepsilon(Y', X)$. Ist Y tonneliert, dann ist $L_\varepsilon(Y', X) = L(Y', X)$. \square

6. Tensorprodukte von Funktionenräumen

Ist K ein Kompaktum, dann bezeichnet $C(K)$ den üblichen Banachraum der skalarwertigen stetigen Funktionen.

Satz 6.1. *Seien K und L Kompakta. Dann ist $C(K) \widehat{\otimes}_\varepsilon C(L) \cong C(K \times L)$.*

Beweis. Für $f \in C(K)$ und $g \in C(L)$ ist $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Folgende Überlegung zeigt $C(K) \otimes C(L) \subset C(K \times L)$. Liegt eine Linearkombination $\sum_{jk} \lambda_{jk} f_j(x) g_k(y) = 0$ vor mit $\{g_k\} \subset C(L)$ linear unabhängig, dann folgt $\sum_j \lambda_{jk} f_j(x) = 0$ für alle k und $x \in K$. Ist auch $\{f_j\} \subset C(K)$ linear unabhängig, dann ist $\lambda_{jk} = 0$ für alle j und k .

Bezeichne mit $U = \{f ; \forall x \in K : |f(x)| \leq 1\}$ die Einheitskugel in $C(K)$ und mit V die Einheitskugel in $C(L)$. Sei $h = \sum_j f_j \otimes g_j \in C(K) \otimes C(L)$. Mit zweimaliger Anwendung der Halbnormenformel (15) erhalten wir

$$\begin{aligned} (p_U \otimes_\varepsilon p_V)(h) &= \sup_{\phi \in U^\circ} \sup_{\psi \in V^\circ} \left| \sum_j (\phi f_j)(\psi g_j) \right| = \sup_{\phi \in U^\circ} \sup_{y \in L} \left| \sum_j (\phi f_j) g_j(y) \right| \\ &= \sup_{y \in L} \sup_{x \in K} \left| \sum_j f_j(x) g_j(y) \right| = \sup_{(x,y) \in K \times L} |h(x, y)|. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $C(K) \otimes_\varepsilon C(L)$ ein topologischer Unterraum von $C(K \times L)$ ist. Eine Anwendung des Satzes von Stone–Weierstraß vervollständigt den Beweis. \square

Das Beispiel ist exemplarisch für den Umgang mit dem ε -Tensorprodukt; es selbst wird im Weiteren aber nicht benötigt.

Hilfssatz 6.2. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_2}) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ ist ein dichter linearer Teilraum.*

Beweis. Wie in Satz 6.1 identifizieren wir das Tensorprodukt auf kanonische Weise mit einem Teilraum. Für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ und $v = v_1 \otimes v_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_2})$ sind die Riemannsummen des Faltungsintegrals

$$u * v(x_1, x_2) = \int u(y_1, y_2) v_1(x_1 - y_1) v_2(x_2 - y_2) d(y_1, y_2)$$

Elemente des Tensorprodukts. Diese konvergieren in $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ gegen das Faltungsintegral. Die Dichtheit folgt, wenn man v eine Diracfolge durchlaufen lässt. \square

Satz 6.3. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

Beweis. Wie in Hilfssatz 6.2 sehen wir, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ ein dichter linearer Teilraum ist.

Seien D_i lineare Differentialoperatoren mit Polynomkoeffizienten in den Variablen $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Das Produkt $D = D_1 D_2$ ist ein Differentialoperator D auf $\mathcal{S}^{n_1+n_2}$. Wir führen die Halbnormen $q_i(u) := \sup_{\mathbb{R}^{n_i}} |D_i u|$ und die Nullumgebungen $U_i := \{q_i \leq 1\}$ ein. Sei $v = \sum_j u_{1j} \otimes u_{2j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2})$. Unter Anwendung von (15) rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} (q_1 \otimes_\varepsilon q_2)(v) &= \sup_{\psi \in U_1^\circ} \sup_{\phi \in U_2^\circ} \left| \sum_j (\psi u_{1j})(\phi u_{2j}) \right| = \sup_{\psi \in U_1^\circ} \sup_{\phi \in U_2^\circ} \left| \phi \left(\sum_j (\psi u_{1j}) u_{2j} \right) \right| \\ &= \sup_{\psi \in U_1^\circ} \sup_{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \left| \sum_j (\psi u_{1j}) D_2 u_{2j}(x_2) \right| = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left| \sum_j D v(x_1, x_2) \right|. \end{aligned}$$

Linearkombinationen von Produkten der Form D stellen alle Differentialoperatoren mit Polynomkoeffizienten dar. Somit ist das ε -Tensorprodukt ein Unterraum des Fréchetraumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. \square

Seien $E_1 \rightarrow M_1$ und $E_2 \rightarrow M_2$ Vektorbündel. Das **externe Tensorprodukt**

$$E_1 \boxtimes E_2 := \pi_1^* E_1 \otimes \pi_2^* E_2 \rightarrow M_1 \times M_2$$

ist das Tensorprodukt der Vektorbündel $\pi_i^* E_i \rightarrow M_1 \times M_2$, welche Zurückziehungen von $E_i \rightarrow M_i$ unter den kanonischen Projektionen $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ sind. Sind $s_i \in C^\infty(M_i; E_i)$, so definiert

$$(s_1 \otimes s_2)(t_1, t_2) := s_1(t_1) \otimes s_2(t_2) \in (E_1 \boxtimes E_2)_{(t_1, t_2)}, \quad (t_1, t_2) \in M_1 \times M_2,$$

einen C^∞ -Schnitt $s_1 \otimes s_2$ im externen Tensorprodukt. Die lineare Erweiterung der bilinearen Abbildung $(s_1, s_2) \mapsto s_1 \otimes s_2$ ist injektiv; die Begründung hierfür ist ähnlich jener am Beginn des Beweises von Satz 6.1. Wir identifizieren

$$C^\infty(M_1; E_1) \otimes C^\infty(M_2; E_2) \subset C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2).$$

Satz 6.4. $C^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C^\infty(M_2; E_2) \cong C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2)$

Für die Bestimmung der auf dem Tensorprodukt induzierten Unterraumtopologie benötigen wir Eigenschaften skalarer Differentialoperatoren.

Hilfssatz 6.5. Seien $V_1 \subset M_1$ und $V_2 \subset M_2$ gerahmte Koordinatenumgebungen, $K_i \subset V_i$ kompakt. Seien $D_i : C^\infty(M_i; E_i) \rightarrow C^\infty(M_i)$ Differentialoperatoren. Dann gibt es einen Differentialoperator $D : C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2) \rightarrow C^\infty(M_1 \times M_2)$, so dass für $s_i \in C^\infty(M_i; E_i)$ gilt: Die Restriktion auf $K_1 \times K_2$ von $(D_1 s_1 \circ \pi_1) \cdot (D_2 s_2 \circ \pi_2)$ stimmt überein mit der von $D(s_1 \otimes s_2)$. Jeder skalare Differentialoperator $C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2) \rightarrow C^\infty(M_1 \times M_2)$ ist, in einer Umgebung von $K_1 \times K_2$, eine Linearkombination über dem Ring $C^\infty(M_1 \times M_2)$ von Operatoren $D = D(D_1, D_2)$ des obigen Typs.

Beweis. Fixiere Rahmen $(e_{1k})_k$ für E_1 und $(e_{2\ell})_\ell$ für E_2 über V_1 bzw. V_2 . Es gibt skalare Differentialoperatoren D_{1k} auf $C^\infty(V_1)$, so dass für $s_1 = \sum_k s_{1k} e_{1k}$, $s_{1k} \in C^\infty(V_1)$, in V_1 gilt: $D_1 s_1 = \sum_k D_{1k} s_{1k}$. Wir ersetzen Koeffizienten κ in der Koordinatendarstellung von D_{1k} durch $\kappa \circ \pi_1$. Auf diese Weise sehen wir D_{1k} an als Differentialoperatoren auf $C^\infty(V_1 \times V_2)$. Wir haben dann $D_1 s_1 \circ \pi_1 = \sum_k D_{1k}(s_{1k} \circ \pi_1)$. Eine entsprechende Formel gilt für $D_2 s_2 \circ \pi_2$. Die Operatoren D_{1k} und $D_{2\ell}$ kommutieren miteinander. Mit einer Abschneidefunktion $\chi \in C_c^\infty(V_1 \times V_2)$, $\chi = 1$ in einer Umgebung von $K_1 \times K_2$, definieren wir für $u \in C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2)$:

$$Du := \chi \sum_{k\ell} D_{1k} D_{2\ell} u_{k\ell}, \quad u(t_1, t_2) = \sum_{k\ell} u_{k\ell}(t_1, t_2) e_{1k}(t_1) \otimes e_{2\ell}(t_2),$$

$(t_1, t_2) \in V_1 \times V_2$, und $Du = 0$ sonst. Für $u = s_1 \otimes s_2$ ist $u_{k\ell} = (s_{1k} \circ \pi_1)(s_{2\ell} \circ \pi_2)$. Es folgt, dass der Differentialoperator D hat die gewünschten Eigenschaften hat.

Einen Beweis der letzten Aussage erhält man aus Koordinatendarstellungen für Differentialoperatoren. \square

Beweis von Satz 6.4. Seien $D_i : C^\infty(M_i; E_i) \rightarrow C^\infty(M_i)$ Differentialoperatoren, $K_i \subset M_i$ kompakt. Wir führen Halbnormen $q_i(u) := \sup_{K_i} |D_i u|$ und die zugehörigen Nullumgebungen $U_i := \{q_i \leq 1\}$ ein. Wie im Beweis von Satz 6.3 erhalten wir für $v = \sum_j u_{1j} \otimes u_{2j} \in C^\infty(M_1; E_1) \otimes C^\infty(M_2; E_2)$:

$$(q_1 \otimes_\varepsilon q_2)(v) = \sup_{(t_1, t_2) \in K_1 \times K_2} \left| \sum_j D_1 u_{1j}(t_1) D_2 u_{2j}(t_2) \right|.$$

Wir nehmen zusätzlich an, dass K_i in einer gerahmten Koordinatenumgebung $V_i \subset M_i$ enthalten ist, und wir wählen einen skalaren Differentialoperator D gemäß Hilfssatz 6.5. Somit gilt $(q_1 \otimes_\varepsilon q_2)(v) = \sup_{(t_1, t_2) \in K_1 \times K_2} |Dv(t_1, t_2)|$. Unter Berücksichtigung der letzten Aussage des Hilfssatzes 6.5 schliessen wir, dass die injektive Topologie des Tensorproduktes mit der Unterraumtopologie übereinstimmt.

Der Raum $C^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2)$ ist vollständig. Es bleibt noch zu zeigen, dass das Tensorprodukt ein dichter Teilraum ist. Mittels Zerlegungen der Eins lokalisiert man diese Aufgabe auf gerahmte Karten und benutzt Hilfssatz 6.2. \square

Satz 6.6. $C_c^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_c^\infty(M_2; E_2) \cong C_c^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2)$

Beweis. Seien $K_j \subset M_j$ kompakt. Die Inklusion des Fréchetraumes $C_{K_j}^\infty(M_j; E_j)$ in den (LF)-Raum $C_c^\infty(M_j; E_j)$ ist eine Einbettung. Aus den Sätzen 5.2 und 6.4 folgt, dass

$$\begin{aligned} C_{K_1}^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_{K_2}^\infty(M_2; E_2) &\subset C_c^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_c^\infty(M_2; E_2) \quad \text{und} \\ C_{K_1}^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_{K_2}^\infty(M_2; E_2) &\subset C_{K_1 \times K_2}^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2) \end{aligned}$$

Einbettungen sind. Ist $K \subset M_1 \times M_2$ kompakt und enthalten Inneren von $K_1 \times K_2$, so folgt, mittels Lokalisierung und Regularisierung

$$C_K^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2) \subseteq C_{K_1}^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_{K_2}^\infty(M_2; E_2).$$

Sei $(K_{j,k})_k$ eine Ausschöpfung von M_j durch kompakte Mengen, $K_{j,k} \subset \text{int } K_{j,k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach Obigem sind, unter Berücksichtigung der kanonischen Identifikationen, die Räume $C_c^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_c^\infty(M_2; E_2)$ und $C_c^\infty(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes E_2)$ die induktiven Limites $\text{ind}_{k \rightarrow} C_{K_{1,k}}^\infty(M_1; E_1) \widehat{\otimes}_\varepsilon C_{K_{2,k}}^\infty(M_2; E_2)$ desselben induktiven Spektrums. Hieraus folgt die im Satz behauptete Isomorphie. \square

7. Das projektive Tensorprodukt

Trägt $X \otimes Y$ eine lokalkonvexe Topologie, so dass $\otimes : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ stetig ist, dann enthält jede Nullumgebung des Tensorproduktes für geeignete Nullumgebungen $U \subset X$ und $V \subset Y$ die absolutkonvexe Hülle $\Gamma(U \otimes V)$. Hier ist $U \otimes V$ nach Definition das Bild $\otimes(U \times V)$, nicht die lineare Hülle des Bildes.

Hilfssatz 7.1. *Seien $U \subset X$ und $V \subset Y$ absolutkonvexe Nullumgebungen. Die Halbnorm*

$$(p_U \otimes_\pi p_V)(z) := \inf \left\{ \sum_j p_U(x_j) p_V(y_j) ; z = \sum_j x_j \otimes y_j \right\}. \quad (6)$$

ist das Minkowski-Funktional von $\Gamma(U \otimes V) \subset X \otimes Y$. Es gilt $p_U \otimes_\varepsilon p_V \leq p_U \otimes_\pi p_V$ und $(p_U \otimes_\pi p_V)(x \otimes y) = p_U(x) p_V(y)$.

Beweis. $p_U \otimes_\pi p_V$ ist eine Halbnorm, $W := \Gamma(U \otimes V)$ ist absorbierend und absolutkonvex.

Sei z gegeben mit $(p_U \otimes_\pi p_V)(z) \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Darstellung $z = \sum_j x_j \otimes y_j$, so dass für ein $\delta > 0$ und $\lambda_j := (p_U(x_j) + \delta)(p_V(y_j) + \delta)$ gilt: $\sum \lambda_j < 1 + \varepsilon$. Setze $\bar{x}_j = (p_U(x_j) + \delta)^{-1} x_j \in U$ und $\bar{y}_j = (p_V(y_j) + \delta)^{-1} y_j \in V$. Dann liegt $z = \sum_j \lambda_j \bar{x}_j \otimes \bar{y}_j$ in $(1 + \varepsilon)W$. Folglich ist $p_W(z) \leq 1$. Ist andererseits z mit $p_W(z) \leq 1$ gegeben, dann ist $z \in (1 + \varepsilon)W$ für $\varepsilon > 0$. Somit ist z eine Linearkombination $z = \sum_j \lambda_j x_j \otimes y_j$ mit $x_j \in U$, $y_j \in V$ und $\sum_j |\lambda_j| \leq 1 + \varepsilon$. Es folgt $(p_U \otimes_\pi p_V)(z) \leq 1$. Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass $p_W = p_U \otimes_\pi p_V$.

Die Ungleichung $p_U \otimes_\varepsilon p_V \leq p_U \otimes_\pi p_V$ folgt, unter Benutzung von (15), durch Abschätzung von (4). Wegen (5) gilt daher auch $p_U(x) p_V(y) \leq (p_U \otimes_\pi p_V)(x \otimes y)$. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus (6). \square

Das (π - oder) **projektive Tensorprodukt** ist der mit der Halbnormenbasis $\{p_U \otimes_\pi p_V\}_{U,V}$ ausgestattete lokalkonvexe Raum $X \otimes_\pi Y$. Die Hausdorff-Eigenschaft folgt aus der injektiven Topologie, diese ist nach obigem Hilfssatz gröber als die projektive. Die vollständige Hülle von $X \otimes_\pi Y$ wird mit $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ bezeichnet. Sind X und Y metrisierbar, dann auch $X \otimes_\pi Y$, und $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ ist ein Fréchetraum.

Die Familie $\{\Gamma(U \otimes V)\}_{U,V}$, in der U und V Nullumgebungsbasen von X bzw. Y durchlaufen, ist eine Nullumgebungsbasis für $X \otimes_\pi Y$. Somit ist das Tensorprodukt $\otimes : X \times Y \rightarrow X \otimes_\pi Y$ stetig.

Hilfssatz 7.2. *Eine bilineare Abbildung $b : X \times Y \rightarrow Z$ ist stetig genau dann, wenn die lineare Erweiterung $\hat{b} : X \otimes_{\pi} Y \rightarrow Z$ stetig ist.*

Beweis. Aus der Stetigkeit von \hat{b} folgt die von $b = \hat{b} \circ \otimes$. Sei b stetig. Sei $W \subset Z$ eine absolutkonvexe Nullumgebung. Es gibt Nullumgebungen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $b(U, V) \subset W$. Aus der Linearität von \hat{b} folgt, dass $\hat{W} := \hat{b}^{-1}(W)$ absolutkonvex ist. Folglich ist $\Gamma(U \otimes V) \subset \hat{W}$ und \hat{b} stetig. \square

Folgerung 7.3. $\otimes^* : (X \otimes_{\pi} Y)' \rightarrow B(X, Y)$, $z' \mapsto z' \circ \otimes$, ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis. Wähle $Z = \mathbb{C}$ (oder $Z = \mathbb{R}$) im Hilfssatz 7.2. \square

Der lineare Isomorphismus \otimes^* ist ein Homöomorphismus, wenn X und Y Fréchet-Montel-Räume sind. Der Beweis beruht auf folgendem fundamentalen Resultat.

Satz 7.4 ([Gro55, Seite 51, Théorème 1]). *Seien X und Y metrisierbar. Sei $K \subset X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$ kompakt. Dann existieren Nullfolgen (x_j) und (y_j) in X bzw. Y und eine kompakte Teilmenge Λ der abgeschlossenen Einheitskugel in ℓ^1 , so dass für $z \in K$ gilt:*

$$z = \sum_j \lambda_j x_j \otimes y_j \quad \text{für eine Folge } (\lambda_j) \in \Lambda. \quad (7)$$

Insbesondere gibt es Kompakta $K_X \subset X$ und $K_Y \subset Y$, so dass $K \subset \overline{\Gamma(K_X \otimes K_Y)}$.

Der Raum ℓ^1 der absolut konvergenten Reihen ist mit der Norm $|\lambda|_1 := \sum_j |\lambda_j| < \infty$, $\lambda = (\lambda_j)$, ein Banachraum. Eine Teilmenge $\Lambda \subset \ell^1$ ist relativ kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist und die Reihen gleichmäßig auf Λ konvergieren. Letzteres bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sum_{j \geq m} |\lambda_j| \leq \varepsilon$ für alle $(\lambda_j) \in \Lambda$ gilt.

Beweis. Fixiere monoton wachsende Folgen (p_n) und (q_n) von Halbnormen, welche Halbnormbasen für X bzw. Y bilden. Die offenen Mengen

$$W_n = \{z \in X \widehat{\otimes}_{\pi} Y ; (p_n \widehat{\otimes}_{\pi} q_n)(z) < 2^{-3n-1}\}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

bilden eine Nullumgebungsbasis in $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $K \subset W_0$. Für $n = 1, 2, \dots$ finden wir rekursiv Kompakta K_n und endliche Mengen F_n mit folgenden Eigenschaften: $K_1 := K$,

$$K_n \subset F_n + W_{n+1} \quad \text{mit } F_n \subset (X \otimes Y) \cap W_{n-1},$$

und $K_{n+1} := (K_n - F_n) \cap \overline{W_{n+1}} \subset W_n$.

Sei $\zeta = \sum_k \xi_k \otimes \eta_k \in F_{n+1} \subset W_n$ mit $\sum_k p_n(\xi_k) q_n(\eta_k) < 2^{-3n-1}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \lambda_{\zeta k} &= 2^{2n} (p_n(\xi_k) + \varepsilon) (q_n(\eta_k) + \varepsilon), \\ x_{\zeta k} &= 2^{-n} \xi_k / (p_n(\xi_k) + \varepsilon), \quad y_{\zeta k} = 2^{-n} \eta_k / (q_n(\eta_k) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Hier ist $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $\sum_k \lambda_{\zeta k} < 2^{-n-1}$. Es gilt $\zeta = \sum_k \lambda_{\zeta k} x_{\zeta k} \otimes y_{\zeta k}$ in $X \otimes Y$ mit $p_n(x_{\zeta k}) < 2^{-n}$ und $q_n(y_{\zeta k}) < 2^{-n}$. Die endliche Menge der Indizes k in der Tensorarstellung von ζ bezeichnen wir mit $I(\zeta)$.

Sei $z \in K$. Wir wählen $\zeta_n \in F_{n+1}$ und setzen z_n für $n = 0, 1, 2, \dots$ rekursiv wie folgt. Angenommen wir haben $z_n := z - \sum_{0 \leq j < n} \zeta_j \in K_{n+1}$. Dann gibt es ein $\zeta_n \in F_{n+1}$, so dass $z_n - \zeta_n \in W_{n+2}$. Somit ist $z_{n+1} \in K_{n+2}$, und die Rekursion ist durchführbar.

Es gilt $z_n \in K_{n+1} \subset W_n$ für alle n . Folglich konvergiert die Reihe $z = \sum_n \zeta_n$ in $X \widehat{\otimes}_\pi Y$. Nach Obigem haben wir

$$z = \sum_{n \geq 0} \sum_k \lambda_{\zeta_n k} x_{\zeta_n k} \otimes y_{\zeta_n k}, \quad \sum_{n \geq 0} \sum_k \lambda_{\zeta_n k} \leq \sum_{n \geq 0} 2^{-n-1} = 1.$$

Die Indizes der Summe durchlaufen die durch $\zeta = \zeta_n$ definierte Teilmenge der Menge aller zulässigen Indizes (n, ζ, k) , $\zeta \in F_{n+1}$ und $k \in I(\zeta)$. Wir ordnen die zulässigen Indizes in einer Folge an, in der n monoton wächst, und erhalten (7). Nur die Koeffizientenreihen $\sum_j \lambda_j \leq 1$ hängen von $z \in K$ ab; sie konvergieren gleichmäßig bezüglich z .

Mit $K_X = \{x_j\} \cup \{0\}$ und $K_Y = \{y_j\} \cup \{0\}$ folgt die letzte Aussage des Satzes. \square

Ist X vollständig, dann ist $X \cong X \widehat{\otimes}_\pi \mathbb{C}$.

Folgerung 7.5. *Sei X Fréchet, $K \subset X$ kompakt. Dann existiert eine Nullfolge $(x_j) \subset X$ und eine kompakte Teilmenge Λ der abgeschlossenen Einheitskugel in ℓ^1 , so dass für $z \in K$ gilt: $z = \sum_j \lambda_j x_j$ für eine Folge $(\lambda_j) \in \Lambda$.*

Der Dualraum eines lokalkonvexen Raumes ist kanonisch identifiziert mit dem seiner Vervollständigung. Nach Folgerung 7.3 ist $\otimes^* : (X \widehat{\otimes}_\pi Y)' \rightarrow B(X, Y)$ ein linearer Isomorphismus.

Folgerung 7.6. *Seien X und Y metrisierbar. Dann ist $\otimes^* : \zeta \mapsto \zeta \circ \otimes$ ein linearer Homöomorphismus $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)'_c \cong B_c(X, Y)$. Sind X, Y und $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ Fréchet–Montelräume, so ist $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)' \cong B(X, Y)$.*

Beweis. Seien $K_X \subset X$ und $K_Y \subset Y$ kompakt. Wegen der Stetigkeit von $\otimes : X \times Y \rightarrow X \widehat{\otimes}_\pi Y$ ist $K := \otimes(K_X \times K_Y)$ kompakt. Es gilt $\sup_{K_X \times K_Y} |\otimes^* \zeta| = \sup_K |\zeta|$ für $\zeta \in (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$. Somit ist $\otimes^* : (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'_c \rightarrow B_c(X, Y)$ stetig. Sei andererseits ein Kompaktum $K \subset X \widehat{\otimes}_\pi Y$ gegeben. Nach Satz 7.4 gibt es Kompakta $K_X \subset X$ und $K_Y \subset Y$, so dass $K \subset \overline{\Gamma(K_X \otimes K_Y)}$. Für $\zeta \in (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$ gilt somit

$$\sup_{z \in K} |\zeta z| \leq \sup_{z \in \overline{\Gamma(K_X \otimes K_Y)}} |\zeta z| = \sup_{x \otimes y \in K_X \otimes K_Y} |\zeta(x \otimes y)| = \sup_{(x, y) \in K_X \times K_Y} |(\otimes^* \zeta)(x, y)|.$$

Dies beweist, dass \otimes^* ein Homöomorphismus ist. Da in Fréchet–Montelräumen beschränkte Mengen relativ kompakt sind, ist die Folgerung bewiesen. \square

8. Summierbarkeit

Tensortopologien auf $X \otimes \ell^1$ korrespondieren mit Summierbarkeit von Folgen in X .

Eine Folge $z = (z_j) \subset X$ heißt **absolut summierbar**, wenn für jede stetige Halbnorm p auf X gilt: $\pi_p(z) := \sum_j p(z_j) < \infty$. Der Vektorraum $\ell^1(X)$ der absolut summierbaren Folgen ist ein lokalkonvexer Raum mit der durch die Halbnormen π_p definierten Topologie.

Die kanonische bilineare Abbildung

$$b : X \times \ell^1 \rightarrow \ell^1(X), \quad (x, \lambda) \mapsto (\lambda_j x), \quad \lambda = (\lambda_j),$$

ist stetig. Die lineare Fortsetzung \hat{b} bildet das Tensorprodukt bijektiv ab auf die Menge der Folgen $z = (z_j) \subset \ell^1(X)$, deren lineare Hülle der Folgenglieder z_j endlichdimensional ist. Dies weist man nach mittels dualer Basen. Wir identifizieren das Tensorprodukt mit dem Bild von \hat{b} , $X \otimes \ell^1 \subset \ell^1(X)$. Die Unterraumtopologie ist die π -Tensortopologie:

Satz 8.1. $X \otimes_\pi \ell^1 \subseteq \ell^1(X)$, und für jede stetige Halbnorm p auf X gilt $p \otimes_\pi ||_1 = \pi_p$.

Beweis. Sei p eine stetige Halbnorm auf X . Aus den Definitionen folgt $\pi_p \leq p \otimes_\pi ||_1$. Es bleibt $p \otimes_\pi ||_1 \leq \pi_p$ zu zeigen. Sei $z = (z_j) = \sum_n x_n \otimes \lambda_n \in X \otimes \ell^1$, also $z_j = \sum_n \lambda_{nj} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_n p(x_n) \sum_{j>N} |\lambda_{nj}| < \varepsilon$. Mit den Standardbasisvektoren $e_j = (\delta_{ji}) \in \ell^1$ definiere $\bar{z} = \sum_{j \leq N} z_j \otimes e_j$. Aus

$$(p \otimes_\pi ||_1)(\bar{z}) \leq \sum_{j \leq N} p(z_j) \quad \text{und} \quad (p \otimes_\pi ||_1)(z - \bar{z}) < \varepsilon$$

folgt die Behauptung. □

Eine Folge (z_j) in X heißt **schwach summierbar**, wenn $\sum_j |\xi z_j| < \infty$ für jedes $\xi \in X'$ gilt. Sei (z_j) schwach summierbar, $V \subset X$ eine absolutkonvexe Nullumgebung. Die Menge B der endlichen Summen $\sum_j \lambda_j z_j$, $|\lambda_j| \leq 1$, ist schwach beschränkt in X , also auch beschränkt. Somit ist $B \subset \rho V$ für ein $\rho > 0$. Für $\xi \in V^\circ \subset X'$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{j \leq n} |\xi z_j| = \xi \left(\sum_{j \leq n} \lambda_j z_j \right) \leq \rho$$

mit geeigneten $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $|\lambda_j| = 1$. Folglich ist $(z_j) \mapsto \sup_{\xi \in V^\circ} \sum_j |\xi z_j|$ eine Halbnorm auf dem Raum der schwach summierbaren Folgen [Pie69, 1.2.3].

Satz 8.2. Sei q eine stetige Halbnorm auf X , $V = \{q \leq 1\}$. Für $z = (z_j) \in X \otimes_\varepsilon \ell^1$ ist $(q \otimes_\varepsilon ||_1)(z) = \sup_{\xi \in V^\circ} \sum_j |\xi z_j|$.

Beweis. Der Dualraum von ℓ^1 ist der Raum ℓ^∞ der beschränkten Folgen $\mu = (\mu_j)$, $|\mu|_\infty = \sup_j |\mu_j| < \infty$. Die Polare der Einheitskugel in ℓ^1 ist die Einheitskugel in ℓ^∞ . Für $z = (z_j) = \sum_n x_n \otimes \lambda_n \in X \otimes \ell^1$ mit $z_j = \sum_n \lambda_{nj} x_n$ gilt

$$\begin{aligned} (q \otimes_\varepsilon ||_1)(z) &= \sup_{\xi \in V^\circ} \sup_{|\mu|_\infty \leq 1} \left| \sum_n \xi x_n \sum_j \mu_j \lambda_{nj} \right| \\ &= \sup_{\xi \in V^\circ} \sup_{|\mu|_\infty \leq 1} \left| \sum_j \mu_j \xi z_j \right| = \sup_{\xi \in V^\circ} \sum_j |\xi z_j|. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

9. Absolutsummierende Operatoren

Seien X und Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ heißt **absolutsummierender Operator**, wenn $T \otimes \text{id} : X \otimes_{\varepsilon} \ell^1 \rightarrow Y \otimes_{\pi} \ell^1$ stetig ist:

$$\sum_j \|Tz_j\|_Y \leq C \sup_{\|\xi\|_{X'} \leq 1} \sum_j |\xi z_j|, \quad (z_j) \in X \otimes \ell^1, \quad (8)$$

gilt mit einer Konstanten $C > 0$. Absolutsummierende Operatoren sind stetig.

Ein Radonmaß auf einem Kompaktum K ist eine stetige Linearform $\mu : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu f = \int_K f \, d\mu$, auf dem reellen Banachraum $C(K) = C(K; \mathbb{R})$.

Satz 9.1 ([Pie63, Theorem 9]). *Eine Abbildung $T \in L(X, Y)$ ist absolutsummierend genau dann, wenn es auf der kompakten Teilmenge $U^\circ \subset X'_\sigma$, U die Einheitskugel von X , ein positives Radonmaß μ gibt, so dass*

$$\|Tx\|_Y \leq \int_{U^\circ} |\xi x| \, d\mu(\xi) \quad \text{für } x \in X. \quad (9)$$

Beweis. (Vergleiche [Pie69, Theorem 2.3.3] und [FW68, Anhang 4.1].) Für $z = (z_j) \in X \otimes \ell^1$ folgt aus (9) die Abschätzung

$$\sum_j \|Tz_j\|_Y \leq \int_{U^\circ} \sum_j |\xi z_j| \, d\mu(\xi) \leq \mu(U^\circ) \sup_{\xi \in U^\circ} \sum_j |\xi z_j|,$$

und somit die Absolutsummierbarkeit von T .

Zum Beweis der Umkehrung setzen wir (8) voraus. Wir definieren

$$s(f) := \inf_{(z_j)} \sup_{\xi \in U^\circ} (f(\xi) + C \sum_j |\xi z_j| - \sum_j \|Tz_j\|_Y) \quad \text{für } f \in C(U^\circ; \mathbb{R}).$$

Das Infimum ist über alle Folgen (z_j) zu erstrecken, deren Folgenglieder fast alle Null sind. Aus (8) folgt $\inf_{U^\circ} f \leq s(f)$. Andererseits ist $s(f) \leq \sup_{U^\circ} f$. Somit ist $s(f)$ eine reelle Zahl. Wir zeigen nun, dass $s : C(U^\circ; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear ist, also positiv homogen und subadditiv. Die Homogenität, $s(\lambda f) = \lambda s(f)$ für $\lambda > 0$, ist klar, wenn man z_j durch λz_j ersetzt. Aus

$$\begin{aligned} s(f+g) &\leq \sup_{\xi \in U^\circ} (f(\xi) + C \sum_j |\xi z_j| - \sum_j \|Tz_j\|_Y) \\ &\quad + \sup_{\eta \in U^\circ} (g(\eta) + C \sum_k |\eta y_k| - \sum_k \|Ty_k\|_Y) \end{aligned}$$

folgt, nach Übergang zu den Infima, $s(f+g) \leq s(f) + s(g)$. Eine Anwendung (der reellen Version) des Satzes von Hahn–Banach auf den reellen Vektorraum $C(U^\circ; \mathbb{R})$ impliziert die Existenz eines Radonmaßes $\mu \in C(U^\circ; \mathbb{R})'$ mit $\mu \leq Cs$. Ist $f \geq 0$, so gilt $\mu(-f) \leq Cs(-f) \leq C \sup_{U^\circ} (-f) \leq 0$. Also ist μ positiv. Für $x \in X$ setzen wir $f_x : U^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \mapsto C|\xi x|$, und wir erhalten

$$\mu(-f_x) \leq Cs(-f_x) \leq C \sup_{\xi \in U^\circ} (-f_x(\xi) + C|\xi x| - \|Tx\|_Y) = -C\|Tx\|_Y.$$

Es folgt (9). □

Ist K ein kompakter Raum und μ ein positives Radonmaß, so sind für $1 \leq p < q \leq \infty$ kanonische Inklusionsabbildungen $C(K) \hookrightarrow L^q(K, \mu) \hookrightarrow L^p(K, \mu)$ definiert; diese sind linear und stetig.

Folgerung 9.2. *Sei Y ein Banachraum, $T \in L(X, Y)$ absolutsummierend, U und μ wie in (9). Dann besitzt T eine Faktorisierung $T : X \rightarrow C(U^\circ) \hookrightarrow L^2(U^\circ, \mu) \rightarrow Y$ in ein Produkt stetiger linearer Operatoren.*

Beweis. Die lineare Abbildung $X \rightarrow C(U^\circ)$, $x \mapsto f_x$, $f_x(\xi) := \xi x$, ist injektiv und stetig. Der Bildraum H der Verlängerung $X \rightarrow C(U^\circ) \hookrightarrow L^2(U^\circ, \mu)$ ist ein linearer Unterraum von $L^2 := L^2(U^\circ, \mu)$. Aus (9) folgt mit $C := (\mu(U^\circ))^{1/2}$ und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung $\|Tx\|_Y \leq C\|f_x\|_{L^2}$ für $x \in X$. Da Y vollständig ist, können wir $f_x \mapsto Tx$ zu einem Operator in $L(\bar{H}, Y)$ fortsetzen. Durch Verkettung mit der orthogonalen Projektion $L^2 \rightarrow \bar{H}$ erhalten wir einen Operator in $L(L^2, Y)$, der die gesuchte Faktorisierung vervollständigt. \square

Das folgende Resultat über absolutsummierende Abbildungen wird dem Beweis der Nuklearität der Dualräume nuklearer Frécheträume und nuklearer (LF)-Räume zugrunde liegen.

Satz 9.3 ([Pie69, 1.5.8&4.2.10]). *Sei X ein Fréchetraum mit $X \otimes_\varepsilon \ell^1 = X \otimes_\pi \ell^1$. Sei $A \subset X$ eine beschränkte Banachkugel. Dann existiert eine beschränkte Banachkugel $B \subset X$, $A \subset B$, so dass die kanonische Abbildung $[A] \rightarrow [B]$ absolutsummierend ist.*

Beweis. Sei \tilde{A} die Menge aller Folgen $(z_j) \in [A] \otimes \ell^1$ mit $\sup_{\xi \in A^\circ} \sum_j |\xi z_j| \leq 1$. Da A beschränkt ist, ist diese Menge in $X \otimes_\varepsilon \ell^1$ beschränkt. Aufgrund unserer Voraussetzungen ist \tilde{A} auch eine beschränkte Teilmenge von $X \otimes_\pi \ell^1$. Fixiere eine abzählbare gerichtete Nullumgebungsbasis (U_n) für X . Es existieren $\delta_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_j p_{U_n}(z_j) \leq \delta_n$ für $(z_j) \in \tilde{A}$. Die Teilmenge $B := \{x \in X ; \sum_n p_{U_n}(x)/2^n \delta_n \leq 1\}$ ist eine beschränkte Banachkugel. Wegen $p_B(x) = \sum_n p_{U_n}(x)/2^n \delta_n$ folgt

$$\sum_j p_B(z_j) = \sum_n 2^{-n} \delta_n^{-1} \sum_j p_{U_n}(z_j) \leq 1 \quad \text{für alle } (z_j) \in \tilde{A}.$$

Folglich ist $p_B \otimes_\pi |\cdot|_1 \leq p_A \otimes_\varepsilon |\cdot|_1$ auf $[A]$. \square

10. Hilbert–Schmidtsche Operatoren

H und H_k bezeichnen Hilberträume, $(\cdot|\cdot)$ und $(\cdot|\cdot)_k$ ihre Skalarprodukte.

Eine lineare Abbildung $T : H_1 \rightarrow H_2$ heißt **Hilbert–Schmidtsch**, wenn es eine Orthonormalbasis $(e_i) \subset H_1$ gibt mit $\sum_i \|Te_i\|_2^2 < \infty$. Ist (f_i) eine Orthonormalbasis von H_2 , dann gilt auf Grund der Parsevalschen Gleichung

$$|T|^2 := \sum_i \|Te_i\|_2^2 = \sum_{ij} |(Te_i|f_j)_2|^2 = \sum_{ij} |(e_i|T^*f_j)_1|^2 = |T^*|^2.$$

Somit ist die Hilbert–Schmidtsche Eigenschaft unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Die Adjungierte T^* ist genau dann Hilbert–Schmidtsch, wenn T dies ist;

die Hilbert–Schmidt-Normen sind gleich, $|T| = |T^*|$. Es gilt $Tx = \sum_j (x|e_j)_1 Te_j$. Als starke Grenzwerte von linearen Operatoren mit endlichdimensionalen Bild sind Hilbert–Schmidtsche Operatoren kompakt. Die Komposition eines Hilbert–Schmidtschen Operators mit einem stetigen linearen Operator ist wieder Hilbert–Schmidtsch.

Die Hilbert–Schmidtschen Operatoren auf dem Raum ℓ^2 der quadratsummierbaren Folgen sind genau jene mit quadratsummierbarer Koeffizientenmatrix. Eine lineare Abbildung $T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann Hilbert–Schmidtsch, wenn sie durch einen quadratintegrierbaren Kern $K \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ gegeben ist: $(Tu)(x) = \int K(x, y)u(y) dy$. Der Operatorkernel K ist durch T eindeutig bestimmt.

Wir geben hinreichende Bedingungen für die Hilbert–Schmidt-Eigenschaft an.

Hilfssatz 10.1. *Sei $T : H_1 \rightarrow H_2$ linear. Gibt es auf der schwach kompakten Einheitskugel $U = \{x \in H_1 ; \|x\|_1 \leq 1\}$ ein positives Radon-Maß μ , so dass*

$$\|Tx\|_2 \leq \left(\int_U |(x|y)_1|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \quad \text{für } x \in H_1$$

gilt, dann ist T Hilbert–Schmidtsch.

Beweis. Sei (e_j) eine Orthonormalbasis in H_1 . Aus

$$\sum_j \|Te_j\|_2^2 \leq \int_U \sum_j |(e_j|y)_1|^2 d\mu(y) = \int_U \|y\|_1^2 d\mu(y) \leq \mu(U) < \infty$$

folgt die Behauptung. □

Für die Operatornorm gilt $\|T\|_{L(H_1, H_2)} \leq \mu(U)^{1/2}$.

Hilfssatz 10.2. *Sei H ein Hilbertraum, K ein kompakter Raum, μ ein positives Radonmaß auf K und $T_1 \in L(H, C(K))$. Ist $T_2 : C(K) \hookrightarrow L^2(K, \mu)$ die kanonische Inklusionsabbildung, dann ist $T_2T_1 \in L(H, L^2(K, \mu))$ Hilbert–Schmidtsch.*

Beweis. Wir schreiben $\eta \mapsto \eta^*$ für die antilineare Rieszsche Isometrie $H' \rightarrow H$ und $\delta_x \in C(K)'$ für das Dirac-Maß in $x \in K$. Ist (e_i) eine Orthonormalbasis von H , so gilt

$$\sum_i |T_1 e_i(x)|^2 = \sum_i |((T_1' \delta_x)^* | e_i)|^2 \leq \|T_1'\|^2 \quad \text{für } x \in K,$$

und somit $\sum_i \|T_2 T_1 e_i\|_{L^2}^2 \leq \|T_1'\|^2 \mu(K) < \infty$. □

Der L^2 -Sobolewraum $H^k(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, besteht aus allen $f \in L^2(\Omega)$, deren schwache Ableitungen $\partial^\alpha f$ der Ordnungen $|\alpha| \leq k$ in $L^2(\Omega)$ liegen. Ausgestattet mit dem Skalarprodukt $(f|g)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha f \overline{\partial^\alpha g}$ und der zugehörigen Norm $|f|_k = \sqrt{(f|f)_k}$ ist $H^k(\Omega)$ ein Hilbertraum. Es ist $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann liegt $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H^k(\Omega)$, und es gilt der Sobolewsche Einbettungssatz:

$$H^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega}) \quad \text{wenn } k > m + n/2. \quad (10)$$

Die Inklusionsabbildung $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega})$ ist stetig. Ist $k > n/2$, so bildet die Fouriertransformation $H^k(\mathbb{R}^n)$ stetig ab in $L^1(\mathbb{R}^n)$; es gilt dann $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Die Einbettung (10) kann hierauf zurückgeführt werden mit einer Anwendung des Steinschen Fortsetzungssatzes [Ste70, VI.3 Theorem 5] für Lipschitzgebiete: Es gibt einen linearen Fortsetzungsoperator $E : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der stetig bezüglich jeder Sobolewnorm ist. Ist der Rand von Ω glatt, dann gibt es einfachere Beweise für die Existenz eines Fortsetzungsoperators; siehe z.B. [Fol95, 6E].

Aus der obigen Dichtheitsaussage und dem Sobolewschen Satz folgt:

Satz 10.3. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, so trägt $C^\infty(\bar{\Omega}) = \cap_k H^k(\Omega)$ die projektive Topologie der kanonischen Inklusionen in $H^k(\Omega)$. Ferner ist $H^k(\Omega)$ der zur Norm $|\cdot|_k$ gehörige lokale Banachraum.*

Satz 10.4 ([Mau61, Satz 4]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $k > m + n/2$. Dann ist die Inklusionsabbildung $H^k(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ Hilbert-Schmidtsch.*

Beweis. Sei $C > 0$ die Norm der Inklusion (10). Für alle $x \in \Omega$ und alle Multiindizes α der Ordnung $|\alpha| \leq m$, sind die Auswertungen $H^k(\Omega) \ni u \mapsto \partial^\alpha u(x) \in \mathbb{C}$ Funktionale mit Normen $\leq C$. Es gilt $\partial^\alpha u(x) = (u|g_x^\alpha)_k$ mit $g_x^\alpha \in H^k(\Omega)$ und $\|g_x^\alpha\|_k \leq C$. Ist (e_i) eine Orthonormalbasis von $H^k(\Omega)$, dann ist

$$\sum_i |\partial^\alpha e_i(x)|^2 = \sum_i |(e_i|g_x^\alpha)_k|^2 = \|g_x^\alpha\|_k^2 \leq C^2$$

wenn $|\alpha| \leq m$ und $x \in \Omega$. Folglich ist $\sum_i \|e_i\|_m^2 = \sum_i \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha e_i(x)|^2 < \infty$. \square

11. Nukleare Operatoren

Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y heißt **nuklearer Operator**, wenn sie eine **nukleare Darstellung** besitzt:

$$Tx = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\xi_j | x) y_j \quad \text{mit} \quad \sum_j \|\xi_j\|_{X'} \|y_j\|_Y < \infty. \quad (11)$$

Ist T nuklear, so muss die Einschränkung $T : X \rightarrow \overline{TX}$ dies nicht sein.

Nukleare Operatoren sind kompakt, insbesondere stetig.

Satz 11.1. *Ist T ein nuklearer Operator, so auch der duale Operator T' .*

Beweis. Aus (11) und der isometrischen Einbettung $Y \subset Y''$ folgt $T'\eta = \sum_j (\eta | y_j) \xi_j$ mit $\sum_j \|y_j\|_{Y''} \|\xi_j\|_{X'} < \infty$. Dies ist eine nukleare Darstellung für T' . \square

Satz 11.2. *Die Verkettung eines nuklearen Operators mit einem stetigen Operator ist nuklear.*

Beweis. Sei $T \in L(X, Y)$ nuklear mit (11). Seien $S_1 \in L(Z_1, X)$ und $S_2 \in L(Y, Z_2)$. Dann gilt $S_2 T S_1 z = \sum_{j \in \mathbb{N}} S_1' \xi_j(z) S_2 y_j$ mit

$$\sum_j \|S_1' \xi_j\|_{Z_1} \|S_2 y_j\|_{Z_2} \leq \|S_1'\| \|S_2\| \sum_j \|\xi_j\|_{X'} \|y_j\|_Y < \infty.$$

Somit ist $S_2 T S_1$ nuklear. \square

Satz 11.3. *Die Verkettung zweier Hilbert–Schmidtscher Operatoren ist nuklear.*

Beweis. Seien $T : H_1 \rightarrow H_2$ und $S : H_0 \rightarrow H_1$ Hilbert–Schmidtsche Operatoren. Ist $(e_j) \subset H_1$ eine Orthonormalbasis, so ist $TSx = \sum_j (Sx|e_j)_1 Te_j = \sum_j (x|S^*e_j)_0 Te_j$ eine nukleare Darstellung, denn $\sum_j \|S^*e_j\|_0 \|Te_j\|_2 \leq \|S^*\| \|T\| < \infty$ aufgrund der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. \square

Satz 11.4. *Nukleare Abbildungen sind absolutsummierend.*

Beweis. Sei $T \in L(X, Y)$ nuklear mit einer Darstellung (11). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\|\xi_j\|_{X'} \leq 1$ und $C := \sum_j \|y_j\|_Y < \infty$ gelten. Bezeichnet U die Einheitskugel in X , dann haben wir für $z = (z_k) \in X \otimes \ell^1$:

$$\sum_k \|Tz_k\|_Y \leq \sum_{k,j} |\xi_j z_k| \|y_j\|_Y \leq C \sup_{\xi \in U^\circ} \sum_j |\xi z_k|.$$

Somit ist T absolutsummierend. \square

Satz 11.5. *Seien $T_k \in L(X_k, X_{k+1})$ absolutsummierende Operatoren, X_k Banachräume. Dann ist $T_3 T_2 T_1 \in L(X_1, X_4)$ nuklear.*

Beweis. Folgerung 9.2 impliziert eine Faktorisierung

$$X_1 \rightarrow L^2(U_1^\circ, \mu_1) \rightarrow C(U_2^\circ) \hookrightarrow L^2(U_2^\circ, \mu_2) \rightarrow C(U_3^\circ) \hookrightarrow L^2(U_3^\circ, \mu_3) \rightarrow X_4$$

von $T_3 T_2 T_1$. Die Behauptung folgt aus dem Hilfssatz 10.2 und dem Satz 11.3. \square

12. Nukleare Räume

Seien X lokalkonvex, $U \subset X$ eine absolutkonvexe Nullumgebung, $1 \leq q < \infty$ und μ ein positives Radonmaß auf der schwach kompakten Polaren U° . Dann ist $x \mapsto (\int_{U^\circ} |\xi x|^q d\mu(\xi))^{1/q}$ eine stetige Halbnorm auf X , denn sie ist $\leq \mu(U^\circ)^{1/q} p_U(x)$. Im Falle $q = 1$ nennen wir die Halbnorm **integral**. Im Falle $q = 2$ liegt eine **Hilbert-Halbnorm** $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ vor mit dem Semiskalarprodukt $(x|y) = \int_{U^\circ} (\xi x)(\overline{\xi y}) d\mu(\xi)$.

In der Definition nuklearer Räume folgen wir [MV92, §28]. Ein lokalkonvexer Raum X heißt **nuklearer Raum**, wenn es zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung $U \subset X$ eine Nullumgebung $V \subset X$ und ein positives Radonmaß μ auf der schwach kompakten Polaren V° gibt, so dass

$$p_V(x) \leq \int_{V^\circ} |\xi x| d\mu(\xi) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (12)$$

Somit bilden in einem nuklearen Raum die integralen Halbnormen eine Halbnormenbasis.

Die Vervollständigungen nuklearer Räume sind nuklear.

Satz 12.1 ([MV92, 28.4 Satz]). *Für einen lokalkonvexen Raum X sind äquivalent:*

(i) X ist nuklear.

- (ii) Es gibt eine Halbnormenbasis bestehend aus Hilbert-Halbnormen, und zu jeder stetigen Hilbert-Halbnorm p auf X existiert eine stetige Hilbert-Halbnorm $q \geq p$, so dass $\iota_q^p : X_q \rightarrow X_p$ Hilbert-Schmidt ist.
- (iii) Zu jeder stetigen Halbnorm p auf X existiert eine stetige Hilbert-Halbnorm $q \geq p$, so dass $\iota_q^p : X_q \rightarrow X_p$ nuklear ist.

Beweis. Aus (12) folgt mit Cauchy-Schwarz $p_U(x)^2 \leq \mu(V^\circ) \int_{V^\circ} |\xi x|^2 d\mu(\xi)$. Mit Hilfssatz 10.1 schließen wir: (i) impliziert (ii). Nach Satz 11.3 folgt (iii) aus (ii).

Wir zeigen, dass (i) aus (iii) folgt. Sei $U \subset X$ eine absolutkonvexe Nullumgebung, $p = p_U$. Sei $q \geq p$ eine stetige Halbnorm, so dass $\iota_q^p : X_q \rightarrow X_p$ nuklear ist, $\iota_q^p x = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\xi_j x) y_j$ eine nukleare Darstellung. Wir dürfen annehmen, dass $\|\xi_j\|_{X'_q} = 1$ für alle j gilt und $\sum_j \|y_j\|_{X_p} < \infty$. Die zu $\iota^q : X \rightarrow X_q$ duale Abbildung $(\iota^q)' : X'_q \rightarrow X'$ bildet die Einheitskugel von X'_q ab in die Polare von $V = \{q \leq 1\}$. Mit $\eta_j := (\iota^q)' \xi_j \in V^\circ$ haben wir $\iota^p x = \sum_j (\xi_j \iota^q x) y_j = \sum_j (\eta_j x) y_j$, $x \in X$. Hieraus folgt (12) mit dem Maß $\mu = \sum_j \|y_j\|_{X_p} \delta_{\eta_j}$. Hier bezeichnet δ_η das in η lokalisierte Dirac-Maß. \square

Satz 12.2. *Ist X nuklear, tonneliert und vollständig, dann ist X ein Montelraum. Insbesondere sind nukleare Frécheträume und nukleare (LF)-Räume Montelräume.*

Beweis. Sei $B \subset X$ beschränkt. Wir haben zu zeigen, dass B relativ kompakt ist. Zu einer stetigen Halbnorm p auf X wählen wir q nach Satz 12.1(iii). Es ist also ι_q^p nuklear, insbesondere kompakt. Das Bild $\iota^p B = \iota_q^p \iota^q B$ ist somit eine relativ kompakte Teilmenge des Banachraumes X_p . Sei P eine Halbnormenbasis für X . Die kanonische Abbildung $X \rightarrow \prod_{p \in P} X_p$ ist ein Homöomorphismus auf einen Unterraum. Das Produkt ist ein vollständiger lokalkonvexer Raum, und der Unterraum X ist abgeschlossen, da vollständig. Aus dem Satz von Tychonoff folgt, dass das Bild von B im Produkt, und folglich auch $B \subset X$, relativ kompakt ist. \square

Nukleare Räume haben folgende **Approximationseigenschaft**.

Satz 12.3. *Die Identität eines nuklearen Raumes X liegt im starken Abschluss der Operatoren endlichen Ranges: $\text{id}_X \in \overline{(X' \otimes X)}^{L_\beta(X)}$.*

Hilfssatz 12.4. *Seien X und Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ ein nuklearer Operator. Sei Z ein dichter linearer Unterraum von Y . Dann besitzt T eine nukleare Darstellung (11) mit allen $y_j \in Z$.*

Beweis. Sei $y \in Y$. Wähle $v_k \in Z$ wie folgt: $v_0 = 0$ und $\|y - v_k\| \leq 2^{-k} \|y\|$. Definiere $z_k := v_k - v_{k-1} \in Z$. Dann gilt $y = \sum_{k \geq 1} z_k$ und $\sum_{k \geq 1} \|z_k\| \leq 3 \|y\|$.

Wendet man diese Beobachtung an auf alle y_j einer gegebenen nuklearen Darstellung (11), so erhält man $z_{jk} \in Z$ mit $y_j = \sum_{k \geq 1} z_{jk}$ und $\sum_k \|z_{jk}\| \leq 3 \|y_j\|$. Die Doppelreihe $Tx = \sum_{j,k} (\xi_j x) z_{jk}$ ist eine nukleare Darstellung von T . \square

Hilfssatz 12.5. *Sei X nuklear, p eine stetige Halbnorm auf X . Dann gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung $V \subset X$, Folgen $(\xi_j) \subset V^\circ$ und $(\bar{x}_j) \subset X$, $\sum_j p(\bar{x}_j) < \infty$, so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x - \sum_{j \leq n} (\xi_j x) \bar{x}_j) = 0, \quad x \in X. \quad (13)$$

Beweis. Zu p wähle q gemäß Satz 12.1(iii). Setze $V = \{q \leq 1\}$. Da $\iota^p X$ dicht in X_p liegt, besitzt $\iota_q^p : X_q \rightarrow X_p$ nach Hilfssatz 12.4 eine nukleare Darstellung $\iota_q^p y = \sum_j (\eta_j y) \iota^p \bar{x}_j$ mit $\|\eta_j\|_{X'_q} = 1$, $\bar{x}_j \in X$ und $\sum_j p(\bar{x}_j) = \sum_j \|\iota^p \bar{x}_j\|_{X_p} < \infty$. Die duale Abbildung $(\iota^q)'$ bildet die Einheitskugel von X'_q ab in die Polare V° . Mit $\xi_j := (\iota^q)' \eta_j \in V^\circ$ und $y = \iota^q x$ folgt die Behauptung. \square

Beweis von Satz 12.3. Sei p eine stetige Halbnorm auf X . Seien V , ξ_j und \bar{x}_j wie im Hilfssatz 12.5. Da alle ξ_j in der Polaren von V liegen, ist die Konvergenz (13) gleichmäßig auf V . Ist $\varepsilon > 0$, dann erfüllt $T = \sum_{j \leq n} \xi_j \otimes \bar{x}_j \in X' \otimes X \subset L(X)$ für ein hinreichend großes n die Ungleichung $\sup_{x \in V} p(x - Tx) \leq \varepsilon$. Da V beschränkte Mengen absorbiert, ist der Satz bewiesen. \square

Wir kommen zur Rolle nuklearer Räume in der Theorie topologischer Tensorprodukte.

Satz 12.6. *Ist X nuklear, so ist $X \otimes_\pi Y = X \otimes_\varepsilon Y$.*

Sind X oder Y nuklear, dann stattdessen wir $X \otimes Y$ mit π -Topologie aus; diese stimmt nach dem Satz mit der ε -Topologie überein. Außerdem kürzen wir in diesem Fall die vollständige Hülle ab als $X \widehat{\otimes} Y := X \widehat{\otimes}_\pi Y = X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$.

Beweis von Satz 12.6. Sei X nuklear, und seien p und q stetige Halbnormen auf X bzw. Y . Wähle $V \subset X$, $(\xi_j) \subset V^\circ$ und $(\bar{x}_j) \subset X$ gemäß Hilfssatz 12.5. Die Ausdrücke

$$(p \otimes_\pi q)(x \otimes y - \sum_{j \leq n} (\xi_j x) \bar{x}_j \otimes y) = p(x - \sum_{j \leq n} (\xi_j x) \bar{x}_j) q(y)$$

konvergieren gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Sei $z = \sum_k x_k \otimes y_k \in X \otimes Y$. Wähle nach dem Satz von Hahn–Banach ein $\varphi \in (X \otimes_\pi Y)'$ mit $\varphi(z) = (p \otimes_\pi q)(z)$ und $|\varphi| \leq p \otimes_\pi q$. Mit der Konstanten $C := \sum_j p(\bar{x}_j) < \infty$ haben wir

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_k \varphi\left(\sum_j (\xi_j x_k) \bar{x}_j \otimes y_k\right) = \sum_j \varphi(\bar{x}_j \otimes \sum_k (\xi_j x_k) y_k) \\ &\leq \sum_j p(\bar{x}_j) q\left(\sum_k (\xi_j x_k) y_k\right) \leq C \sup_{\xi \in V^\circ} q\left(\sum_k (\xi x_k) y_k\right) = (C p_V \otimes_\varepsilon q)(z). \end{aligned}$$

Somit ist $(p \otimes_\pi q)(z) \leq (C p_V \otimes_\varepsilon q)(z)$, und wir haben gezeigt, dass die ε -Topologie feiner ist als die π -Topologie. Da die π -Topologie stets feiner als die ε -Topologie ist, ist der Satz bewiesen. \square

Die Gleichheit von ε - und π -Tensorprodukt ist charakteristisch für nukleare Räume.

Satz 12.7. *Gilt $X \otimes_\pi \ell^1 = X \otimes_\varepsilon \ell^1$, so ist X nuklear.*

Beweis. Sei p eine stetige Halbnorm auf X . Sind die Tensortopologien gleich, dann gibt es eine stetige Halbnorm q , so dass mit $V := \{q \leq 1\}$ gilt:

$$\sum_j p(z_j) \leq \sup_{\xi \in V^\circ} \sum_j |\xi z_j| \quad \text{für alle } (z_j) \in X \otimes \ell^1.$$

Nach [MV92, 24.5(b)] bildet $(\iota^q)' : X'_q \rightarrow X'$ die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset X'_q$ isometrisch ab auf V° . Somit gilt $\sum_j \|\iota^p z_j\|_{X_p} \leq \sup_{\eta \in B} \sum_j |\eta(\iota^q z_j)|$. Da B schwach kompakt ist, erhalten wir für endliche Folgen (x_j) in X_q :

$$\sum_j \|\iota^p x_j\|_{X_p} \leq \sup_{\eta \in B} \sum_j |\eta x_j|,$$

also die Absolutsummierbarkeit von ι^p . Die duale Abbildung $(\iota^q)'$ ist auch stetig bezüglich der schwachen Topologien; die schwach kompakten Mengen B und V° sind daher homöomorph. Aus Satz 9.1 folgt die Existenz eines positiven Radonmaßes μ , so dass

$$\|\iota^p x\|_{X_p} \leq \int_{V^\circ} |\xi x| d\mu(\xi), \quad x \in X.$$

Folglich ist X nuklear. □

Folgerung 12.8. *Sind X und Y nuklear, dann auch $X \otimes Y$.*

Beweis. Topologische Tensorprodukte sind auf kanonische Weise assoziativ. Somit gilt

$$(X \otimes Y) \otimes_\varepsilon \ell^1 = X \otimes_\varepsilon (Y \otimes_\varepsilon \ell^1) = X \otimes_\pi (Y \otimes_\pi \ell^1) = (X \otimes Y) \otimes_\pi \ell^1,$$

wenn X und Y nuklear sind. Mit Satz 12.7 folgt die Nuklearität von $X \otimes Y$. □

13. Beispiele nuklearer Räume

Hilbert–Schmidtsche Einbettungen zwischen Sobolewräumen liefern fundamentale Beispiele für nukleare Frécheträume differenzierbarer Funktionen.

Satz 13.1. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, dann ist $C^\infty(\bar{\Omega})$ nuklear.*

Beweis. Aufgrund der Sätze 10.3 und 10.4 erfüllt $C^\infty(\bar{\Omega})$ die Bedingung (ii) des Satzes 12.1. □

Weitere Beispiele folgen aus Permanenzeigenschaften.

Satz 13.2. *Unterräume und Quotienten nach abgeschlossenen Unterräumen von nuklearen Räumen sind nuklear.*

Beweis. (Siehe [MV92, 28.6].) Sei X nuklear, Y ein Unterraum von X . Ist p eine stetige Halbnorm auf X , so schreiben wir für die Einschränkung von p auf Y ebenfalls p . Den lokalen Banachraum Y_p identifizieren wir kanonisch mit einem isometrischen Unterraum von X_p . Seien $p \leq q$ stetige Hilbert-Halbnormen auf X , so dass $\iota^p_q : X_q \rightarrow X_p$ nuklear ist. Die Verkettung $Y_q \rightarrow Y_p$ der Inklusion $Y_q \subset X_q$ mit ι^p_q und der orthogonalen Projektion $X_p \rightarrow Y_p$ ist dann auch nuklear. Mit Satz 12.1 folgt hieraus die Nuklearität von Y . Ist Y abgeschlossen, dann ist X/Y Hausdorffsch, folglich lokalkonvex. Seien p und q wie oben. Wir identifizieren $(X/Y)_p$ kanonisch mit X_p/Y_p , wobei wir die Quotientenhalbnorm ebenfalls mit p bezeichnen. Ist $Q_p : X_p \rightarrow (X/Y)_p$ die zugehörige Projektion und R^q eine Rechtsinverse von Q_q , dann ist die Verbindungsabbildung $Q_p \iota^p_q R^q : (X/Y)_q \rightarrow (X/Y)_p$ nuklear. □

Satz 13.3. *Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist nuklear.*

Beweis. Nach Satz 13.1 ist $C^\infty(\bar{\mathbb{B}}^n)$ nuklear, also nach Satz 13.2 auch der Unterraum $\dot{C}^\infty(\mathbb{B}^n)$. Letzterer ist nach Satz 2.3 isomorph zum Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Satz 13.4. *Direkte Produkte und abzählbare direkte Summen nuklearer Räume sind nuklear. Die projektive Topologie eines projektiven Systems nuklearer Räume ist nuklear. Die induktive Topologie eines induktiven Systems nuklearer Räume ist nuklear falls diese Topologie existiert.*

Für einen Beweis siehe [MV92, 28.7-8].

Satz 13.5. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M . Dann ist $C^\infty(M; E)$ ein nuklearer Fréchet-Raum, und $C_c^\infty(M; E)$ ist ein nuklearer (LF)-Raum.*

Beweis. Bezeichne mit n die Dimension von M und mit $r \in \mathbb{N}$ den Rang von E . Zur Vereinfachung der Schreibung nehmen wir an, dass das Bündel komplex ist.

Wir betrachten zunächst den skalaren Fall $E = M \times \mathbb{C}$. Sei $\kappa : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte, $\kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und mit glattem Rand. Ferner setzen wir voraus, dass κ eine Fortsetzung als Karte in eine Umgebung von \bar{U} besitzt. Dann ist $T_\kappa : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\overline{\kappa(U)})$, $f \mapsto f \circ \kappa^{-1}$, linear und stetig. Ferner trägt $C^\infty(M)$ die projektive Topologie der Familie $\{T_\kappa\}$, wobei κ einen Atlas, bestehend aus Karten der genannten Art, durchläuft. Aus Satz 13.4 folgt die Nuklearität von $C^\infty(M)$.

Im allgemeinen Fall erzeugen Trivialisierungen $\pi^{-1}U \cong U \times \mathbb{C}^r$ des Bündels durch Rahmen ein projektives System $C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(U; \mathbb{C}^r)$, $U \subset M$ offen und gerahmt. Der Fréchet-Raum $C^\infty(M; E)$ trägt die projektive Topologie dieses Systems. Der Raum $C^\infty(U; \mathbb{C}^r)$ ist die r -fache direkte Summe des Raumes $C^\infty(U)$. Aus dem skalaren Fall und Satz 13.4 folgen die behaupteten Nuklearitätseigenschaften.

Für jedes Kompaktum $K \subset M$ ist der Unterraum $C_K^\infty(M; E)$ aller $s \in C^\infty(M; E)$ mit $\text{supp } s \subseteq K$ nuklear. Der (LF)-Raum $C_c^\infty(M; E)$ trägt die induktive Topologie einer abzählbaren Familie von Räumen $C_K^\infty(M; E)$, ist somit nach Satz 13.4 nuklear. \square

Satz 13.6. *Starke Dualräume nuklearer Fréchet- oder (LF)-Räume sind nuklear.*

Beweis. Jede beschränkte Teilmenge eines Fréchetraumes ist enthalten in einer beschränkten Banachkugel. Dies gilt auch für (LF)-Räume, da in diesem Fall beschränkte Mengen in (Fréchetraum-)Stufen liegen und in diesen beschränkt sind. Somit bilden für Fréchet- und (LF)-Räume die Polaren beschränkter Banachkugeln eine Nullumgebungsbasis der starken Topologie des Dualraumes.

Sei X ein nuklearer Fréchet- oder (LF)-Raum. Sei $A \subset X$ eine beschränkte Banachkugel. Aus den Sätzen 12.7 und 9.3 folgt die Existenz einer beschränkten Banachkugel $B \subset X$, $A \subset B$, so dass die kanonische Inklusion $J : [A] \rightarrow [B]$ absolutsummierend ist. Wegen Satz 11.5 kann B so gewählt werden, dass J nuklear ist. Nach Satz 11.1 ist der duale Operator $J' : [B]' \rightarrow [A]'$ nuklear. Somit gibt es Folgen $(y_j) \subset [B]''$ und $(\eta_j) \subset [A]'$ mit $\|y_j\|_{[B]''} = 1$ und $\sum_j \lambda_j < \infty$, $\lambda_j := \|\eta_j\|_{[A]'}$, mit denen eine nukleare Darstellung vorliegt:

$$J'\eta = \sum_j (y_j \eta) \eta_j \quad \text{für } \eta \in [B]'.$$

Die Restriktionsabbildung $J'_A : X' \rightarrow [A]'$, $\xi \mapsto \xi|_{[A]}$, ist die zur kanonischen Inklusion $J_A : [A] \rightarrow X$ duale Abbildung. Wegen $J'_A = J'J'_B$ haben wir

$$\|J'_A \xi\|_{[A]'} \leq \sum_j \lambda_j |(J''_B y_j) \xi| \quad \text{für } \xi \in X'.$$

Die Polaren $U := A^\circ$ und $V := B^\circ$ sind Nullumgebungen in X' . Wegen $A = U^\circ$ ist

$$\|J'_A \xi\|_{[A]'} = \sup\{|\xi x| ; x \in A\} = p_U(\xi).$$

Mit dem Radonmaß $\mu = \sum_j \lambda_j \delta_{J''_B y_j}$ auf $V^\circ \subset X'' = X$ erhalten wir

$$p_U(\xi) \leq \int_{V^\circ} |y \xi| d\mu(y) \quad \text{für } \xi \in X',$$

somit die Nuklearität von X' . □

Satz 13.7. *Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist nuklear. Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M , so sind die Distributionenräume $\mathcal{D}'(M; E)$ und $\mathcal{E}'(M; E)$ nuklear.*

Beweis. Die Aussagen folgen aus Satz 13.6 und der oben gezeigten Nuklearität von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $C_c^\infty(M; E^* \boxtimes |\Lambda|)$ und $C^\infty(M; E^* \boxtimes |\Lambda|)$. □

14. Der Satz vom Kern

Unser Blick auf den Satz vom Kern orientiert sich an [Trè67, Chap. 50-51].

Ist $b \in B(X, Y)$, so wird durch $T_b y(x) = b(x, y)$ ein Operator $T_b \in L(Y, X')$ definiert. Die Abbildung $b \mapsto T_b$ ist linear und injektiv. Durch Verkettung mit dem linearen Isomorphismus aus Folgerung 7.3 erhalten wir eine injektive lineare Abbildung

$$\text{Op} : (X \widehat{\otimes}_\pi Y)' \rightarrow B(X, Y) \rightarrow L(Y, X'),$$

die einem „Kern“ $A \in (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$ den Operator $\text{Op}(A) \in L(Y, X')$ zuordnet. Unter geeigneten Voraussetzungen an X und Y ist Op ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume.

Satz 14.1. *Sind X und Y nukleare Frécheträume, dann ist $\text{Op} : (X \widehat{\otimes} Y)' \cong L(Y, X')$.*

Beweis. Nach Satz 4.2 gilt $L(Y, X') \cong B(X, Y)$. Nach Folgerung 12.8 ist auch $X \widehat{\otimes} Y$ ein nuklearer Fréchetraum. Somit sind X , Y und $X \widehat{\otimes} Y$ Montelräume. Die Folgerung 7.6 impliziert dann $(X \widehat{\otimes} Y)' \cong B(X, Y)$. □

Satz 14.2. *Sind X und Y nukleare (LF)-Räume, dann ist $\text{Op} : (X \widehat{\otimes} Y)' \cong L(Y, X')$. Insbesondere ist $L(Y, X')$ nuklear.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von Op . Seien $X = \text{ind}_{n \rightarrow} X_n$ und $Y = \text{ind}_{n \rightarrow} Y_n$ Darstellungen der (LF)-Räume als induktive Limes, X_n und Y_n nukleare Frécheträume. Der Satz 5.2 impliziert, dass $X_n \widehat{\otimes} Y_n \subseteq X_{n+1} \widehat{\otimes} Y_{n+1}$ ein topologischer Unterraum ist. Folglich ist auch $X \widehat{\otimes} Y = \text{ind}_{n \rightarrow} X_n \widehat{\otimes} Y_n$ ein nuklearer (LF)-Raum. Sei $T \in L(Y, X')$. Die Bilinearformen $X_n \times Y_n \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto Ty(x)$, sind getrennt stetig, nach Hilfssatz 4.1 sogar stetig. Somit existieren $A_n \in (X_n \widehat{\otimes} Y_n)'$ mit $A_n(x \otimes y) = Ty(x)$ für $(x, y) \in X_n \times Y_n$. Dann ist $T = \text{Op}(A)$ mit $A \in (X \widehat{\otimes} Y)'$, $A|_{X_n \widehat{\otimes} Y_n} = A_n$.

Sei $B \subseteq X \widehat{\otimes}_\pi Y$ beschränkt. Für ein n ist $K = \bar{B}$ eine kompakte Teilmenge von $X_n \widehat{\otimes}_\pi Y_n$. Nach Satz 7.4 gibt es Kompakta $K_X \subseteq X_n$ und $K_Y \subseteq Y_n$, so dass $K \subseteq \overline{\Gamma(K_X \otimes K_Y)}$. Für $A \in (X \widehat{\otimes} Y)'$ und $T = \text{Op}(A)$ gilt nun

$$\sup_{z \in B} |A(z)| \leq \sup_{z \in K_X \otimes K_Y} |A(z)| = \sup_{y \in K_Y} p_V(Ty), \quad V := K_X^\circ \subseteq X'.$$

Hieraus folgt, dass Op ein Homöomorphismus ist. □

Beispiele 14.3. Die klassischen Schwartzschen Sätze vom Kern lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) &\cong L(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2}), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1})), \\ \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) &\cong L(C_c^\infty(\Omega_2), \mathcal{D}'(\Omega_1)), \end{aligned}$$

wobei Ω_j offene Teilmengen von \mathbb{R}^{n_j} sind. Diese folgen aus Satz 14.1, Satz 14.2, den Resultaten im Abschnitt 6 über ε -Tensortopologien auf Funktionenräumen und dem Satz 12.6. Ebenso erhalten wir

$$\mathcal{D}'(M_1 \times M_2; E_1 \boxtimes (E_2^* \otimes |\Lambda|)) \cong L(C_c^\infty(M_2; E_2), \mathcal{D}'(M_1; E_1))$$

für Vektorbündel $E_j \rightarrow M_j$ über Mannigfaltigkeiten M_j .

Bemerkung 14.4. (i) In [Ehr56, Gas60] wird Satz 14.2 für den Fall von Distributionen bewiesen, $X = Y = C_c^\infty(\Omega)$. Die Rolle des für die topologische Isomorphie verwendeten Satzes 7.4 von Grothendieck übernehmen geeignete Zerlegungen in Fourierreihen.

(ii) In [Hör90, Chap. V] werden Distributionenkerne als Grenzwerte von Regularisierungen der erwarteten Kerne gewonnen; die topologische Isomorphie zwischen Räumen von Operatoren und Kernen wird nicht gezeigt.

(iii) Für Mannigfaltigkeiten mit Rand wird in [Mel93, Thm. 4.18] ein Kerntheorem formuliert; es lässt sich aus den vorliegenden Ergebnissen herleiten und zu einer topologischen Isomorphie verallgemeinern. Im dort verwendeten b -Kalkül ist der Raum der Distributionenschnitte in einem Bündel $E \rightarrow M$, M eine Mannigfaltigkeit mit Ecken, der (starke) Dualraum von $\dot{C}^\infty(M; E^* \otimes {}^b|\Lambda|)$.

Das Tensorprodukt $X' \otimes Y'$ kann via $\xi \otimes \eta : y \mapsto (\eta y)\xi$ mit einem Teilraum von $L(Y, X')$ identifiziert werden, dem Teilraum der Operatoren endlichen Ranges. Mit dieser Identifikation erhalten wir ebenfalls einen Satz vom Kern.

Satz 14.5. *Seien X und Y bornologisch, Y reflexiv und nuklear, Y' nuklear. Dann ist $L(Y, X') \cong X' \widehat{\otimes} Y'$. Insbesondere gilt diese Isomorphie, wenn X und Y Fréchet- oder (LF)-Räume sind und Y nuklear.*

Beweis. Da Y reflexiv ist, ist Y' dies auch. Folglich ist Y' tonneliert, und aus dem zweiten Teil von Satz 5.4 folgt $X' \otimes_\varepsilon Y' \subseteq L(Y, X')$. Nach Satz A.1 ist $L(Y, X')$ vollständig. Satz 12.6 und die Nuklearität von Y' implizieren $X' \widehat{\otimes}_\varepsilon Y' = X' \widehat{\otimes}_\pi Y'$. Somit gilt $X' \widehat{\otimes} Y' \subseteq L(Y, X')$.

Sei $T \in L(Y, X')$, $B \subset Y$ beschränkt und $V \subset X'$ eine Nullumgebung. Da T stetig ist, existiert eine Nullumgebung $U \subset Y$ mit $TU \subset V$. Wähle nach Satz 12.3 ein $R \in Y' \otimes Y \subset L(Y)$ mit $y - Ry \in U$ für $y \in B$. Der Operator $S = TR$ liegt in $X' \otimes Y'$, und es gilt $(T - S)B \subset V$. Folglich ist $X' \otimes Y'$ ein dichter Teilraum von $L(Y, X')$. \square

Wir fassen zentrale Ergebnisse wie folgt zusammen; vergleiche [Trè67, Prop. 50.7].

Satz 14.6. *Sind X und Y nukleare Fréchet- oder (LF)-Räume, so haben wir kanonische Isomorphismen $(X \widehat{\otimes} Y)' \cong L(Y, X') \cong X' \widehat{\otimes} Y'$.*

Eine Bilinearform $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ heißt nuklear, wenn es gleichstetige Folgen $(\xi_j) \subset X'$, $(\eta_j) \subset Y'$ und eine konvergente Reihe $\sum_j \lambda_j$ positiver Zahlen gibt, so dass

$$b(x, y) = \sum_j \lambda_j (\xi_j x)(\eta_j y), \quad (x, y) \in X \times Y. \quad (14)$$

In der funktionalanalytischen Literatur findet man folgende Formulierung des Satzes vom Kern; vergleiche [FW68, §27 4.5], [GV64, I 3.5], [Pie69, 7.4.3], [SW99, IV 9.5].

Satz 14.7 (Abstrakter Satz vom Kern). *Seien X und Y lokalkonvexe Räume, X nuklear. Eine Bilinearform $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn sie nuklear ist.*

Beweis. Sei b eine stetige Bilinearform. Somit gibt es stetige Halbnormen p auf X und q auf Y mit $|b(x, y)| \leq p(x)q(y)$. Mit der Nullumgebung $V \subset X$, $\xi_j \in V^\circ$ und $\bar{x}_j \in X$, $\sum_j p(\bar{x}_j) < \infty$, wie in Hilfssatz 12.5 haben wir $b(x, y) = \sum_j (\xi_j x) b(\bar{x}_j, y)$. Ist $p(\bar{x}_j) = 0$, dann ist der j -te Summand Null, und wir dürfen j ignorieren. Setze $\lambda_j := p(\bar{x}_j) > 0$ und $\eta_j := b(\bar{x}_j, \cdot) / p(\bar{x}_j) \in Y'$. Da alle η_j in der Polaren der Nullumgebung $\{q \leq 1\} \subseteq Y$ liegen, ist b nuklear. Ist andererseits b nuklear vorgegeben, so kann die Summe (14) wegen der Gleichstetigkeit von (ξ_j) und (η_j) durch ein Produkt stetiger Halbnormen abgeschätzt werden. \square

Bemerkung 14.8. Seien X und Y nukleare Frécheträume. Ist $T \in L(Y, X')$ und (14) die nukleare Darstellung von $b = b_T$ aus Satz 4.2, so ist $K = \sum_j \lambda_j \xi_j \otimes \eta_j$ der Schwartzkern von T . Sind X und Y Schwartzräume $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder Funktionenräume $C^\infty(M; E)$, dann konvergiert die Reihe in $(X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'$ gegen eine Distribution K .

A. Lokalkonvexe Räume

Beweise und Einzelheiten zu Nachfolgendem sind, mit Ausnahme von Satz A.1, in den einführenden Lehrbüchern [FW68, MV92, Voi20] zu finden.

Eine Teilmenge eines reellen oder komplexen Vektorraumes X heißt **absolutkonvex**, wenn sie konvex und kreisförmig ist. Ist $A \subset X$ absolutkonvex, so ist das (Eich- oder) **Minkowski-Funktional** $p_A : X \rightarrow [0, \infty[$, $p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 ; x \in \lambda A\}$, eine Halbnorm auf der linearen Hülle $[A] = \cup_{n \in \mathbb{N}} nA$. Enthält A keinen linearen Teilraum, dann ist p_A eine Norm.

Ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum X über dem Skalkörper \mathbb{R} oder \mathbb{C} heißt **lokalkonvexer Raum**, wenn er eine Nullumgebungsbasis bestehend aus absolutkonvexen Mengen besitzt. Nullumgebungen U sind **absorbierend**: $\cup_{\lambda > 0} \lambda U = X$. Eine Teilmenge B eines lokalkonvexen Raumes heißt **beschränkt**, wenn sie von jeder Nullumgebung U absorbiert wird: $B \subseteq \lambda U$ für ein $\lambda > 0$. Normierte Räume sind jene lokalkonvexen Räume, die beschränkte Nullumgebungen besitzen. Ist X lokalkonvex, dann ist die Korrespondenz $U \leftrightarrow p_U$ eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen, absolutkonvexen Nullumgebungen $U \subseteq X$ und den stetigen Halbnormen auf X . Die Menge der stetigen Halbnormen auf X ist durch \leq geordnet und gerichtet; eine konfinale Teilmenge nennen wir eine **Halbnormenbasis**.

Ein lokalkonvexer Raum heißt **vollständig**, wenn jedes Cauchy-Netz (jeder Cauchy-Filter) konvergiert. Jeder lokalkonvexe Raum besitzt eine (bis auf Isomorphie eindeutige) **vollständige Hülle**; [MV92, 22.21], [Voi20, Cor. 9.16]. Ein Raum mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis ist vollständig genau dann, wenn er folgenvollständig ist.

Eine Familie $(T_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$ linearer Abbildungen von einem Vektorraum X in lokalkonvexe Räume X_i heißt **projektives System**, wenn es zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, einen Index i gibt mit $T_i x \neq 0$. Solch ein projektives System erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf X , die initiale oder **projektive Topologie**. Dies ist die grösste Topologie auf X , für die alle T_i stetig sind; [MV92, §24], [Voi20, 1]. Endliche Summen von Halbnormen $q_i \circ T_i$, q_i stetige Halbnorm auf X_i , bilden eine Halbnormenbasis für X . Das direkte Produkt $\prod_i X_i$ trägt seine kanonische projektive Topologie; sind alle Faktoren X_i vollständig, dann ist das Produkt $\prod_i X_i$ vollständig. Durch $\prod_i T_i$ wird X mit einem Unterraum des Produktes identifiziert; dieser ist abgeschlossen, wenn X vollständig ist.

Ist p eine stetige Halbnorm auf X , dann ist der Quotientenraum $X/p^{-1}(0)$ ein normierter Raum mit der Norm $x + p^{-1}(0) \mapsto p(x)$. Die vollständige Hülle X_p des Quotientenraumes heißt **lokaler Banachraum** zur Halbnorm p . Die kanonische lineare Abbildung $\iota^p : X \rightarrow X_p$ ist stetig mit dichtem Bild. Ist $p \leq q$, dann existiert genau eine stetige lineare verbindende Abbildung $\iota_q^p : X_q \rightarrow X_p$ mit $\iota^p = \iota_q^p \iota^q$. Ist P eine Halbnormenbasis für X , dann trägt X die projektive Topologie der Familie $(\iota^p)_{p \in P}$.

Die Topologie eines lokalkonvexen Raumes ist **metrisierbar** genau dann, wenn dieser eine abzählbare Nullumgebungs-/Halbnormenbasis besitzt. Die Metrik kann translationsinvariant gewählt werden. Einen metrisierbaren, vollständigen lokalkonvexen Raum nennt man einen **Fréchetraum**. Ausgestattet mit einer translationsinvarianten Metrik ist ein Fréchetraum ein vollständiger metrischer Raum. Sind X und Y Frécheträume,

so gilt der Satz vom abgeschlossenen Graphen: Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn der Graph ein abgeschlossener Unterraum des Fréchetraumes $X \times Y$ ist.

Der **Dualraum** von X ist der Vektorraum X' aller stetigen Linearformen auf X . Aus dem Satz von Hahn–Banach folgt, dass X' die Punkte in X trennt: Zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, gibt es ein $\xi \in X'$ mit $\xi x \neq 0$. Die **schwache Topologie** auf X ist die von der Familie aller Funktionale $\xi \in X'$ erzeugte projektive Topologie. Die Ausgangstopologie auf X ist feiner als die schwache Topologie. Die von der Linearformenfamilie $(X' \ni \xi \mapsto \xi x)_{x \in X}$ erzeugte projektive Topologie heißt schwache Topologie auf X' .

Die (absolute) **Polare** einer nichtleeren Teilmenge $A \subseteq X$ ist

$$A^\circ := \{\xi ; |\xi x| \leq 1 (x \in A)\} \subset X'.$$

Die Polare von A ist gleich der Polare ihrer **absolutkonvexen Hülle** ΓA . Polaren sind absolutkonvex und schwach abgeschlossen. Eine Polare A° ist genau dann absorbierend, wenn A schwach beschränkt ist. Für $B \subseteq X'$ definiert man entsprechend die Polaren $B^\circ \subseteq X$. Es gilt der Bipolarensatz: $A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma A}$ wenn $A \subseteq X$ oder $A \subseteq X'$. Der Abschluss ist bezüglich der jeweiligen schwachen Topologie zu bilden; im Fall $A \subseteq X$ stimmt dieser mit dem Abschluss bezüglich der Ausgangstopologie überein.

Polaren von Nullumgebungen sind wichtig in der Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume. Nach dem Satz von Alaoglu–Bourbaki sind die Polaren von Nullumgebungen schwach kompakt. Eine Menge stetiger Funktionale ist **gleichstetig** genau dann, wenn sie enthalten ist in der Polaren einer Nullumgebung. Ist $U \subseteq X$ eine absolutkonvexe Nullumgebung, so ist das Minkowski-Funktional gegeben durch die Halbnormenformel

$$p_U(x) = \sup\{|\xi x| ; \xi \in U^\circ\}. \quad (15)$$

Dies ist eine Folgerung aus dem Bipolarensatz.

Neben den schwachen Topologien und der Ausgangstopologie auf X sind weitere Topologien auf X und X' wichtig. Man nennt eine lokalkonvexe Topologie auf X oder X' eine **zulässige Topologie** für das Dualsystem (X, X') , wenn der duale Partner X' bzw. X kanonisch mit dem topologischen Dualraum übereinstimmt. Der Satz von Mackey–Arens [MV92, 23.8] besagt, dass eine lokalkonvexe Topologie genau dann zulässig ist, wenn sie feiner ist als die schwache Topologie und gröber als die Mackey-Topologie. Die Polaren der schwach kompakten, absolutkonvexen Teilmengen von X' (bzw. von X) bilden eine Nullumgebungsbasis der **Mackey-Topologie** auf X (bzw. auf X'). Dies ist konsistent mit dem Satz von Alaoglu–Bourbaki und der Zulässigkeit der Ausgangstopologie auf X . Nach einem Satz von Mackey [MV92, 23.15] haben je zwei (X, X') -zulässige Topologien auf X dieselben beschränkten Mengen. Wir bezeichnen mit $\beta(X)$ die Menge aller absolutkonvexen Teilmengen von X , die bezüglich der schwachen Topologie, und damit bezüglich jeder zulässigen Topologie, abgeschlossen und beschränkt sind.

Zulässige Topologien sind Beispiele **polarer Topologien**. Ist $\gamma \subseteq \beta := \beta(X')$ eine durch Inklusion gerichtete Ausschöpfung von X' , so ist X_γ der Vektorraum X mit der durch die Nullumgebungsbasis $\{B^\circ ; B \in \gamma\}$ definierten (polaren) lokalkonvexen

Topologie. Ausführlicher schreibt man $(X, \gamma(X, X'))$ an Stelle von X_γ . Eine Halbnormenbasis ist gegeben durch

$$p_U(x) = \sup\{|\xi x|; \xi \in B\} \quad U = B^\circ, \quad B \in \gamma.$$

Die Halbnormenformel (15) betrifft den Spezialfall gleichstetiger Mengen $B = U^\circ$: Die Ausgangstopologie ist die polare Topologie der Menge der Polaren einer Nullumgebungsbasis; anders ausgedrückt: Sie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichstetigen Teilmengen von X' . Im Falle der schwachen Topologie ist σ die Menge der (absolutkonvexen Hüllen) endlicher Teilmengen von X' . Der Grundraum X ausgestattet mit der **starken Topologie** ist X_β , der mit der Mackey-Topologie ist X_τ , τ die Menge der schwach kompakten, absolutkonvexen Teilmengen von X' . Vertauscht man die Rollen von X und X' , so erhält man entsprechende polare Topologien auf X' .

Jeder lokalkonvexe Raum besitzt eine Nullumgebungsbasis, die aus Tonnen besteht. Eine **Tonne** ist eine abgeschlossene, absolutkonvexe, absorbierende Teilmenge. Man nennt einen lokalkonvexen Raum **tonneliert**, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist. Man sieht leicht ein, dass lokalkonvexe Räume von zweiter Bairescher Kategorie tonneliert sind. Insbesondere sind Frécheträume tonneliert. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit lautet: Ist X tonneliert, dann ist eine Teilmenge von X' genau dann gleichstetig, wenn sie (schwach) beschränkt ist, [MV92, 23.27 Satz]. Im einem tonnelierten Raum X stimmt die Ausgangstopologie mit der starken Topologie überein: $X = X_\beta = X_\tau$; [Voi20, Thm. 6.14].

Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen lokalkonvexen Räumen heißt **kompakt**, wenn es eine Nullumgebung $U \subseteq X$ gibt, so dass das Bild TU in Y relativ kompakt ist. Kompakte lineare Abbildungen sind stetig. Ein tonnelierter lokalkonvexer Raum, in dem jede beschränkte Teilmenge relativ kompakt ist, heißt **Montelraum**. Zum Nachweis der Montelraumeigenschaft eines vollständigen, tonnelierten Raumes X ist folgende Beobachtung nützlich. Trägt X die projektive Topologie eines Systems $(T_i : X \rightarrow X_i)_i$, so dass für jedes i die Abbildung T_i kompakt ist oder X_i ein Montelraum, dann ist X ein Montelraum. Denn ist $B \subseteq X$ beschränkt, so sind alle $\overline{T_i B}$ kompakt, und nach Tychonoff ist das Produkt $\prod_i \overline{T_i B}$ kompakt. Da X im Produkt abgeschlossen ist, ist $\overline{B} \subseteq X$ kompakt; [MV92, 24.19].

Man nennt $X'' := (X'_\beta)'_\beta$ den **Bidualraum** von X . Ist die kanonische Injektion $J : X \rightarrow X''$ ein topologischer Isomorphismus, dann heißt X **reflexiv**. Wenn jede beschränkte Teilmenge von X relativ schwach kompakt ist, dann ist wegen $X'_\beta = X'_\tau$ die Abbildung J ein linearer Isomorphismus (Halbreflexivität). Ist zusätzlich X tonneliert, dann ist J ein Homöomorphismus von X_β auf $(X'_\tau)'_\beta$. Montelräume sind reflexiv; [MV92, 24.25], [Voi20, Cor. 8.3]. Die starken Dualräume reflexiver Räume (bzw. von Montelräumen) sind reflexiv (bzw. Montelsch). Siehe [MV92, §23+24], [Voi20, Thm. 8.5+6].

Seien X und Y lokalkonvexe Räume, $L(X, Y)$ der Vektorraum der stetigen linearen **Operatoren** $X \rightarrow Y$. Abkürzend setzen wir $L(X) = L(X, X)$. Jedes $T \in L(X, Y)$ bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab. Wenn nichts Anderes gesagt wird, trägt $L(X, Y) = L_\beta(X, Y)$ die starke Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen. Diese Topologie wird gegeben durch das Halbnormensystem

$T \mapsto \sup_{x \in B} p(Tx)$, wobei p die stetigen Halbnormen von Y durchläuft und B die Menge $\beta = \beta(X)$. Ist $\gamma \subseteq \beta$ eine gerichtete Ausschöpfung von X , dann ist $L_\gamma(X, Y)$ jener lokal-konvexe Raum, bei dem das obige Halbnormensystem eingeschränkt wird auf $B \in \gamma$. Speziell ist $L_\sigma(X, Y)$ der Raum der Operatoren mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Der Raum $L_\varepsilon(X', Y)$ trägt die von der Familie $\varepsilon \subseteq \beta(X')$ der Polaren einer Nullumgebungs-basis für X erzeugte lokalkonvexe Topologie.

Ist $T \in L(X, Y)$, so existiert die **duale Abbildung** $T' : Y' \rightarrow X'$, $\eta \mapsto \eta T$, als lineare Abbildung. Diese ist stetig, wenn die Dualräume geeignete Topologien tragen. Speziell gilt $T' \in L(Y'_\beta, X'_\beta) \cap L(Y'_\sigma, X'_\sigma)$, [MV92, 23.30(b)].

Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt **bornivor**, wenn V jede beschränkte Teilmenge von X absorbiert. Man nennt X **bornologisch**, wenn jede absolutkonvexe, bornivore Teilmenge eine Nullumgebung ist. Metrisierbare lokalkonvexe Räume sind bornologisch; [MV92, 24.13], [Voi20, Prop. 6.11]. Eine lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen heißt **lokalbeschränkt**, wenn das Bild beschränkter Mengen beschränkt ist. Stetige lineare Abbildungen sind lokalbeschränkt. Genau dann ist X bornologisch, wenn jede lokalbeschränkte lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$, Y lokalkonvex, stetig ist; [MV92, 24.10]. Der starke Dualraum eines bornologischen Raumes ist vollständig, [MV92, 24.11], [Voi20, Thm. 9.19]. Allgemeiner gilt:

Satz A.1. *Seien Y und Z lokalkonvexe Räume, Y bornologisch und Z vollständig. Dann ist $L(Y, Z)$ vollständig. Insbesondere ist Y' vollständig.*

Beweis. (Siehe [Gro73, S. 114 Ex. 7], [Trè67, Chap. 32 Cor. 1].) Sei $(T_i)_{i \in I}$ ein Cauchynetz in $L(Y, Z)$. Da Y vollständig ist, existiert $Ty := \lim_i T_i y \in Z$ für $y \in Y$. Die lineare Abbildung $T : Y \rightarrow Z$ ist beschränkt: Ist $B \subset Y$ beschränkt und q eine stetige Halbnorm auf Z , dann gibt es ein $k \in I$ mit

$$\sup_{y \in B} q(T_i y - T_j y) \leq 1 \quad (i, j \geq k).$$

Folglich ist $\sup_{y \in B} q(Ty) \leq 1 + \sup_{y \in B} q(T_k y) < \infty$. Da Y bornologisch ist, ist T auch stetig. Schließlich erhalten wir $\lim_i T_i = T$ in $L(Y, Z)$. \square

Eine Familie linearer Abbildungen $(j_i : X_i \rightarrow X)$, X_i lokalkonvex, ist ein **induktives System** auf einem Vektorraum X , wenn X die Vereinigung aller Teilräume $j_i X_i$ ist. Existiert auf X eine feinste lokalkonvexe Topologie, so dass alle j_i stetig sind, so heißt diese die finale oder **induktive Topologie**. Eine absolutkonvexe Menge $U \subseteq X$ ist eine Nullumgebung für die induktive Topologie genau dann, wenn $j_i^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in X_i ist für alle i . Die Existenzbedingung fordert, dass diese Topologie Hausdorffsch sein muss, [MV92, 24.6]. Direkte Summen und Quotienten nach abgeschlossenen Unterräumen sind Beispiele für induktive Topologien. Sind alle X_i tonneliert (bornologisch), so ist auch die induktive Topologie auf X tonneliert (bornologisch); [FW68, § 23 2.9], [Voi20, Thm. 10.14].

Sei X lokalkonvex. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, absolutkonvex und beschränkt, so ist die lineare Hülle $[A]$ mit der Norm $\| \cdot \|_{[A]} := p_A$ ein normierter Raum. Ist A zusätzlich folgenvollständig, dann ist A eine **Banachkugel**; das bedeutet, dass $[A]$ ein Banachraum

ist, [MV92, 23.14]. Das induktive System $([A] \hookrightarrow X)_A$ erzeugt eine induktive Topologie auf X , welche feiner ist als die Ausgangstopologie; die Topologien sind gleich genau dann, wenn X ein bornologischer Raum ist; [FW68, § 23 5.1], [MV92, 24.10]. Speziell trägt ein Fréchetraum X die induktive Topologie der Familie aller $[A] \subseteq X$, A beschränkte Banachkugel, [MV92, 24.15(c)].

Ein lokalkonvexer Raum X ist ein (strikt)er **(LF)-Raum**, wenn er die induktive Topologie eines abzählbaren induktiven Systems $(X_n \hookrightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt, welches aus Frécheträumen X_n besteht, die lineare Unterräume von X sind, $X = \cup_n X_n$, so dass $X_n \subseteq X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, topologischer Unterraum ist. Man nennt X den **induktiven Limes** der Stufenräume X_n und schreibt $X = \text{ind}_{n \rightarrow} X_n$. Aus dem Grothendieckschen Faktorisierungssatz [MV92, 24.33] folgt, dass die Topologie eines (LF)-Raumes X nicht von der Wahl der Stufenfolge X_n abhängt, [MV92, 24.35]. Jede Stufe X_n eines (LF)-Raumes $X = \text{ind}_{n \rightarrow} X_n$ trägt die Unterraumtopologie von X , und jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq X$ ist enthalten in einer Stufe X_n und dort beschränkt; [FW68, § 24 1.2&2.2], [Voi20, Theorem 10.8]. (LF)-Räume sind tonneliert und bornologisch. Nach einem Satz von Köthe sind (LF)-Räume vollständig, [FW68, § 24 3.1], [Voi20, Thm. 10.18].

Literatur

- [Bea79] R. Beals. [Correction to: “Characterization of pseudodifferential operators and applications”](#) (Duke Math. J. **44** (1977), no. 1, 45–57). *Duke Math. J.* **46**:1 (1979), 215. [Zbl 0396.35088](#) [MR 523608](#)
- [Bes08] A.L. Besse. [Einstein manifolds](#). Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008. [Zbl 1147.53001](#) [MR 2371700](#)
- [Cos11] K. Costello. [Renormalization and effective field theory](#). Mathematical Surveys and Monographs **170**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. [Zbl 1221.81004](#) [MR 2778558](#)
- [Ehr56] L. Ehrenpreis. [On the theory of kernels of Schwartz](#). *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 713–718. [MR 82637](#)
- [FW68] K. Floret und J. Wloka. [Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume](#). Lecture Notes in Mathematics, No. 56, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968. [Zbl 0155.45101](#) [MR 0226355](#)
- [Flo73] K. Floret. [Topologische Vektorräume](#). Vorlesungen an der Universität Kiel, 1973.
- [Fol95] G.B. Folland. [Introduction to partial differential equations](#). Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995. [Zbl 0841.35001](#) [MR 1357411](#)
- [GV64] I.M. Gel'fand und N.Y. Vilenkin. [Generalized functions](#). Vol. 4: Applications of harmonic analysis. Academic Press, New York - London, 1964, 1964. [Zbl 0136.11201](#) [MR 0173945](#)

- [Gas60] H. Gask. [A proof of Schwartz's kernel theorem](#). *Math. Scand.* **8** (1960), 327–332. [Zbl 0100.11302](#) [MR 125438](#)
- [Gro52] A. Grothendieck. [Summary of essential results in the theory of topological tensor products and nuclear spaces](#). *Ann. Inst. Fourier* **4** (1952), 73–112. [Zbl 0055.09705](#)
- [Gro55] A. Grothendieck. [Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires](#). *Mem. Amer. Math. Soc.* **No. 16** (1955), Chapter 1: 196 pp.; Chapter 2: 140. [Zbl 0064.35501](#) [MR 0075539](#)
- [Gro73] A. Grothendieck. [Topological vector spaces](#). Notes on Mathematics and its Applications, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1973. [Zbl 0275.46001](#) [MR 372565](#)
- [Hör85] L. Hörmander. [The analysis of linear partial differential operators. III](#). Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **274**, Springer-Verlag, Berlin, 1985. [Zbl 0601.35001](#) [MR 781536](#)
- [Hör90] L. Hörmander. [The analysis of linear partial differential operators. I](#). Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1990. [Zbl 0521.35001](#) [MR 1065993](#)
- [Kab14] W. Kaballo. [Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Distributionen, lokalkonvexe Methoden, Spektraltheorie](#). Berlin: Springer Spektrum, 2014. [Zbl 1291.46001](#)
- [Lee13] J.M. Lee. [Introduction to smooth manifolds](#). Graduate Texts in Mathematics **218**, Springer, 2013. [MR 2954043](#)
- [MV92] R. Meise und D. Vogt. [Einführung in die Funktionalanalysis](#). Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik **62**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992. [MR 1195130](#)
- [Mau61] K. Maurin. [Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendung](#). *Math. Scand.* **9** (1961), 359–371. [Zbl 0107.32702](#)
- [Mel07] R.B. Melrose. [Introduction to Microlocal Analysis](#). MIT Webpage, 2007.
- [Mel93] R.B. Melrose. [The Atiyah-Patodi-Singer index theorem](#). Research Notes in Mathematics **4**, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993. [Zbl 0796.58050](#) [MR 1348401](#)
- [Pee60] J. Peetre. [Réctification à l'article "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels"](#). *Math. Scand.* **8** (1960), 116–120. [MR 0124611](#)
- [Pie63] A. Pietsch. [Absolut summierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen](#). *Math. Nachr.* **27** (1963), 77–103. [Zbl 0114.31404](#)
- [Pie69] A. Pietsch. [Nukleare lokalkonvexe Räume](#). De Gruyter, 1969. [Zbl 0184.14602](#)

- [SW99] H.H. Schaefer und M.P. Wolff. [Topological vector spaces](#). Graduate Texts in Mathematics **3**, Springer-Verlag, New York, 1999. [Zbl 0983.46002](#) [MR 1741419](#)
- [Sch52] L. Schwartz. Théorie des noyaux, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1*. [Zbl 0048.35102](#) [MR 45307](#)
- [Sch55] L. Schwartz. [Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles](#). *J. Analyse Math.* **4** (1954/55), 88–148. [Zbl 0066.09601](#) [MR 80268](#)
- [Ste70] E.M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series **No. 30**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970. [Zbl 0207.13501](#) [MR 290095](#)
- [Trè67] F. Trèves. Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press, 1967. [Zbl 0171.10402](#) [MR 0225131](#)
- [Voi20] J. Voigt. [A course on topological vector spaces](#). Compact Textb. Math., Cham: Birkhäuser, 2020. [Zbl 1453.46001](#) [MR 4182424](#)
- [Zwo12] M. Zworski. Semiclassical analysis. Graduate Studies in Mathematics **138**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. [Zbl 1252.58001](#) [MR 2952218](#)