Das Kakeya'sche Nadelproblem

Prof. Dr. Sönke Hansen

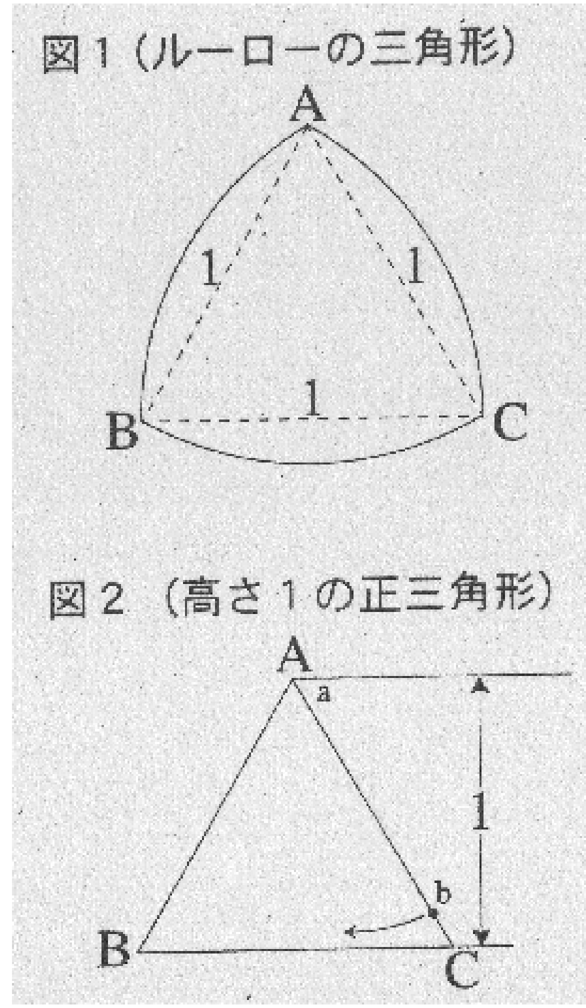
UNIVERSITÄT PADERBORN

Tag der offenen Tür am 10. November 2002

Kakeya (1917): Tauche eine Nadel in Tinte. Lege sie auf ein Blatt Papier. Bewege die Nadel auf dem Papier in jene Position, bei der Anfangs- und Endpunkt der Nadel gegenüber der Ausgangslage vertauscht sind. Wie groß ist die Fläche, die mit Tinte gefüllt wird?

Eine Nadel der Länge 1 kann innerhalb folgender Figuren um 180° gedreht werden.

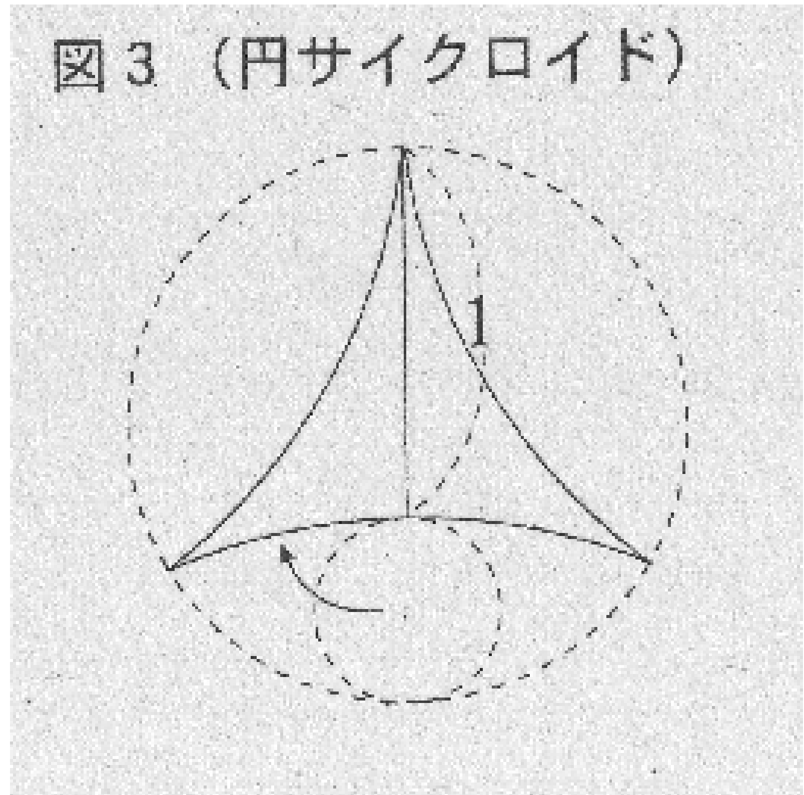
Figur	**Fläche**
Kreis	$0,7854$
„Kreisdreieck“ (1)	$0,7048$
Dreieck (2)	$0,5774$



Die Hypozykloide

Abrollkurve in Kreis mit Radius $r = 3/4$. Der Flächeninhalt $= \frac{2}{9}\pi r^2 \approx 0,3927$ reicht zum Umkehren einer Nadel der Länge 1.

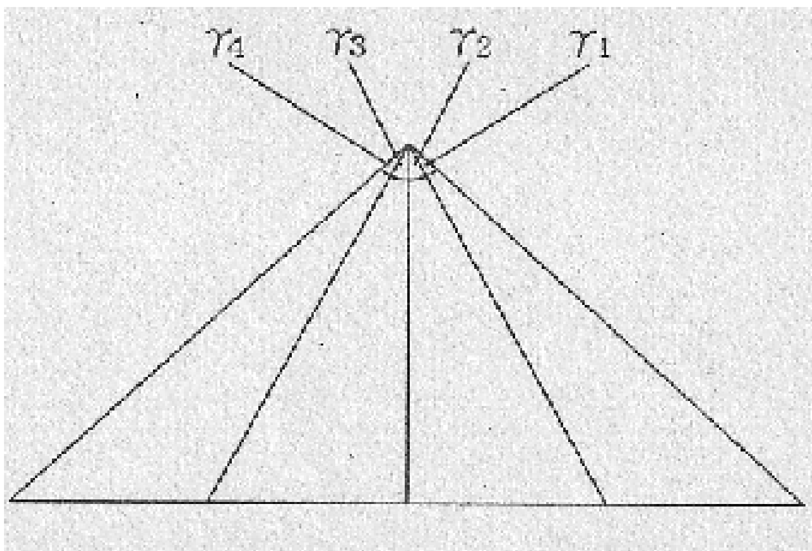
Ist dies die kleinstmögliche Fläche?

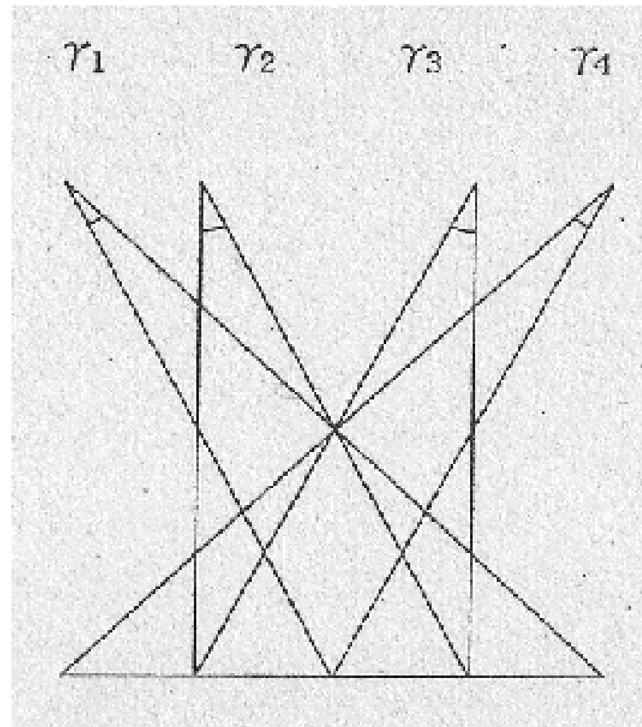


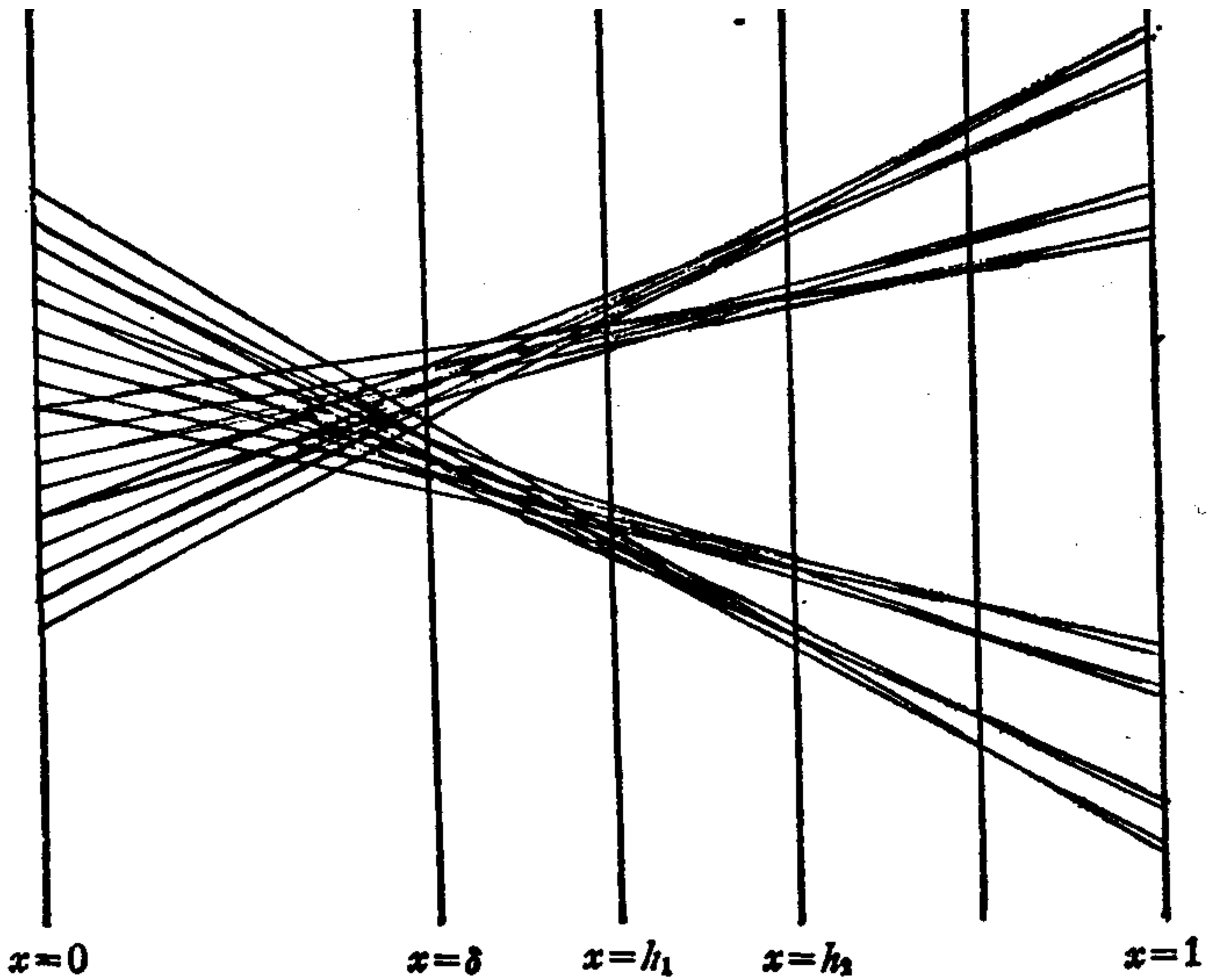
Besicovitch (1928):

Der Inhalt der zum Umkehren einer Nadel der Länge 1 *benötigten Fläche kann beliebig klein gemacht werden.*

Die Grundkonstruktion von Besicovitch und Perron







$x=0$
$x=\delta$
$x=h_1$
$x=h_2$
$x=1$

Und heute?

Kakeya-Mengen sind Teilmengen eines 2-, 3- oder höherdimensionalen euklidischen Raumes, die Platz haben für Nadeln der Länge 1 in beliebiger Richtung.

Das Dimensionsproblem für Kakeya-Mengen: *Hat eine Kakeya-Menge im n-dimensionalen Raum selbst bereits Dimension n?*

Bourgain (1991), Wolff (1995): Kakeya-Mengen im 3-dimensionalen Raum haben eine Dimension $\geq 5/2$.

Warum interessiert das Dimensionsproblem?

Weil es eng verknüpft ist mit Fragestellungen aus ganz anderen Bereichen der Mathematik:

- Dispersion von Wellen (Schrödinger-Gleichungen)
- Verteilung von Primzahlen (Dirichlet-Reihen)

Wie kam Kakeya auf das Nadelproblem?

Zeichnungen: M. Nümann

Das Spiel KAKEYA

The winner is . . .