Hansen 13.10.2009

Mathematatik C für Physiker

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f| =$ konstant. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 2 Sei f eine in $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Setze $\bar{G} = \{z\,;\ \bar{z} \in G\}$. Zeige, dass auch die Funktion

$$g : \bar{G} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$$

holomorph ist.

Aufgabe 3 Bestimme eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = -\sin x \, \sinh y.$$

Aufgabe 4 Ist $\log i^2 = 2 \log i$ eine sinnvolle und korrekte Gleichung?

Abgabe: Dienstag, 20.10.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 20.10.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 5 Berechne $\int_\Gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$, wobei
a) $\Gamma:\ z = t^2 + it,\ 0 \le t \le 2$,
b) $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ mit $\Gamma_1:\ z = it,\ 0 \le t \le 2$ und $\Gamma_2:\ z = 2i + t,\ 0 \le t \le 4$.

Aufgabe 6 Berechne direkt, d.h. ohne Verwendung des Cauchy'schen Integralsatzes, das Kurvenintegral $\int_\Gamma (z^2 + 3z)\,\mathrm{d}z$, wobei
a) $\Gamma:\ z = 2e^{it},\ 0 \le t \le \pi/2$,
b) $\Gamma:\ z = 2 - 2t + 2it,\ 0 \le t \le 1$,
c) $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ mit $\Gamma_1:\ z = 2 + it,\ 0 \le t \le 2$ und $\Gamma_2:\ z = 2i + 2 - t,\ 0 \le t \le 2$.

Aufgabe 7 Sei Γ eine Kurve mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt i. Berechne $\int_\Gamma \cos z\,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 8 Berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes das Integral

$$I = \int_{-\pi}^{0} e^{(\cos t + i \sin t)} (\cos t + i \sin t)\, dt.$$

Abgabe: Dienstag, 27.10.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 27.10.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 3

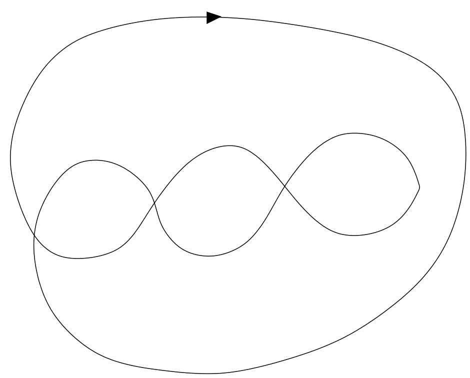
Aufgabe 9 Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

a) $\int_\Gamma \cos z \,\mathrm{d}z$ mit $\Gamma: \; z(t) = 1 - i + t(1+3i), 0 \leq t \leq 1$;

b) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)}$.

Aufgabe 10 Welche Zahlen können als Werte von $\int_\Gamma \frac{dz}{1-z^2}$ vorkommen, wenn von Γ nur verlangt wird, dass es eine ± 1 vermeidende Kurve von $-i$ nach i ist?

Aufgabe 11 Welche Windungszahl hat die abgebildete Kurve um einen gegebenen Punkt, der nicht auf dieser Kurve liegt?



Aufgabe 12 *(Schwarz'sches Spiegelungsprinzip)* Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, die zur reellen Achse symmetrisch ist, d.h. es gilt $\overline{z} \in D$, wenn $z \in D$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in D$. Zeige, dass f holomorph in D ist, wenn f eingeschränkt auf die offene Teilmenge $D^+ = \{z \in D\,;\; \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorph ist.
Tipp: Satz von Morera

Abgabe: Dienstag, 03.11.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 03.11.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 13 Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k z^{2k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k$

Aufgabe 14 Bestimme für die Funktion $f(z) = \sqrt{1 + \log z}$ den Konvergenzradius der Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Aufgabe 15 Bestimme die Laurententwicklungen von $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)}$ in den Kreisringen

a) $0 < |z| < 1$,

b) $1 < |z| < \infty$.

Aufgabe 16 Bestimme die Residuen $\mathrm{Res}(f(z), z_0)$.

a) $f(z) = ze^{1/z}$, $z_0 = 0$,

b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)^4}$, $z_0 = 1$.

Abgabe: Dienstag, 10.11.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 10.11.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 17 $f(z)$ sei holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeige, dass für jeden geschlossenen Weg Γ, der nicht durch den Nullpunkt geht, gilt:

$$\oint_\Gamma f(z^2)\, dz = 0.$$

Aufgabe 18 Berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\, \mathrm{d}z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19 Berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$.

Aufgabe 20 Beweise die Integralformel

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \text{für } a > 1$$

durch eine Betrachtung des Kurvenintegrals

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2iaz-1}.$$

Abgabe: Dienstag, 17.11.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 17.11.2009

Mathematatik C für Physiker

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 21 Die Besselschen Funktionen $J_n(z)$ können über folgende erzeugende Funktion definiert werden:

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

Folgere hieraus:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\vartheta - z\sin\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 22 Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = x|y|$.

Aufgabe 23 Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y_1' = y_1 + y_2, \quad y_2' = y_2/t, \qquad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

Aufgabe 24 Führe für die folgende Anfangswertaufgabe die ersten drei Schritte des Picard'schen Iterationsverfahrens durch:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2x_3, & x_1(0) &= 0,\\
\dot{x}_2 &= -x_1x_3, & x_2(0) &= 1,\\
\dot{x}_3 &= 2, & x_3(0) &= 2.
\end{aligned}$$

Abgabe: Dienstag, 24.11.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 24.11.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 25 Berechne $\exp(A)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 26 Bestimme die Lösung folgender Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 5x_2, \qquad & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 3x_2, \qquad & x_2(0) &= 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 27 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$, wenn $i \geq j$. Zeige, dass jede Lösung von $\dot{X} = AX$ ein vektorwertiges Polynom mit Grad kleiner n ist.

Aufgabe 28 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{X} = AX$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Abgabe: Dienstag, 01.12.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 01.12.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 29 Seien Φ und Ψ Fundamentalmatrizen für ein homogenes lineares $n \times n$-System $\dot{X} = A(t)X$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass $\Psi(t) = \Phi(t)C$ für alle $t \in I$ gilt.

Aufgabe 30 Löse das Anfangswertproblem

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X + e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 31 Sei $\dot{X} = A(t)X$ ein homogenes lineares $n \times n$-Differentialgleichungssystem auf einem offenen Intervall I mit schiefsymmetrischer Matrix, d.h. es gilt $A(t)^T = -A(t)$ für alle $t \in I$. Seien X_1, X_2 Lösungen und Φ eine Fundamentalmatrix für $\dot{X} = A(t)X$. Zeige:

a) Das Skalarprodukt $X_1 \cdot X_2$ ist konstant.

b) Ist $\Phi(t)$ orthogonal für ein $t \in I$, dann auch für alle $t \in I$.

Aufgabe 32 Sei ein homogenes lineares 2×2-Differentialgleichungssystem $\dot{X} = A(t)X$ auf einem Intervall I gegeben, für das eine Lösung $Y : I \to \mathbb{R}^2$ bekannt ist, deren erste Komponente in I nirgends verschwindet.

a) Zeige, dass der Ansatz

$$Z(t) = \alpha(t)Y(t) + \beta(t)e_2$$

mit geeigneten Funktionen $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ auf eine weitere Lösung $Z : I \to \mathbb{R}^2$ führt, die $\Phi = (Y, Z)$ zu einer Fundamentalmatrix macht. ($e_2 = (0, 1)^T$ bezeichnet den zweiten Vektor der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.)

b) Wende die vorstehende Methode an, um eine Fundamentalmatrix zu finden im Fall $I = \mathbb{R}_+$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ -t \end{bmatrix}.$$

Abgabe: Dienstag, 08.12.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 08.12.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 33 Bestimme Potenzreihen um den Nullpunkt, die die folgenden Differentialgleichungen lösen.

a) $y'' + xy' + y = 0$

b) $y'' - x^2 y = 0$

Aufgabe 34 Warum hat die Differentialgleichung $xu_x + yu_y = 1$ keine Lösung, die auf der Diagonalen $x = y$ konstant ist?

Aufgabe 35 Beschreibe die Lösungsmenge von $yu_x - xu_y = 0$.

Aufgabe 36 Bestimme alle Lösungen $u(t, x, y)$ des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} u_t + xu_x + yu_y &= u, \\ u(0, x, y) &= x + y. \end{aligned}$$

Abgabe: Dienstag, 15.12.2009 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 15.12.2009

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 37 Zeige, daß die allgemeine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ der partiellen Differentialgleichung $u_{xy} = 0$ von der Form $u(x, y) = f(x) + g(y)$ ist mit Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.
Anleitung: Löse $v_x = 0$ für $v = u_y$ mit der Charakteristikenmethode, und wende dann diese Methode nochmals an zur Bestimmung von u.

Aufgabe 38 Löse das Anfangswertproblem

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(0, x) = \cos(x), \quad \partial_t u(0, x) = \sin(x) \quad \text{wenn } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 39 *(Spiegelungsprinzip)* Sei $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$. Zeige, daß das Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{wenn } t \geq 0,\, x \geq 0,$$
$$u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = g(x) \quad \text{wenn } x \geq 0,$$
$$u(t, 0) = 0 \quad \text{wenn } t \geq 0,$$

eine in $[0, \infty[\times [0, \infty[$ zweimal stetig differenzierbare Lösung u besitzt.
Tipp: Setze g geeignet auf ganz $\mathbb{R}$ fort und löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 40 Bestätige folgende Formel für die Grundlösung N des Laplaceoperators:

$$\int_{|x|=r} \frac{\partial N}{\partial \nu}(x)\, dS(x) = 1 \quad \text{wenn } r > 0.$$

Abgabe: Dienstag, 05.01.2010 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2010!

Hansen 05.01.2010

Mathematatik C für Physiker

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 41 Bestimme die Fouriertransformierten folgender Funktionen.

a) $f(t) = \max(1 - |t|, 0)$

b) $f(t) = te^{-t^2}$

Aufgabe 42 Sei f eine integrierbare Funktion auf der reellen Achse. Zeige für die Fouriertransformierte, dass $\widehat{f}(\omega) + \widehat{f}(-\omega)$ reell ist für alle $\omega \in \mathbb{R}$, wenn f reellwertig ist. Gilt auch die Umkehrung hiervon?

Aufgabe 43 Sei $s(t) = 1$ für $|t| < 1$ und $s(t) = 0$ sonst. Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung $-y'' + y = s(t)$ mit Hilfe der Fouriertransformation.

Aufgabe 44 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+2x_2)^2 - |x_1 - x_2|}$$

ist integrierbar. Wie lautet die Fouriertransfomierte von f?
Tipp: Eine geeignete Variablensubstitution führt das zweidimensionale Fourierintegral auf zwei eindimensionale Fourierintegrale zurück.

Abgabe: Dienstag, 12.01.2010 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 12.01.2010

Mathematatik C für Physiker

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 45 Zeige die Formeln

$$f * g = g * f, \quad \tau_s(f * g) = (\tau_s f) * g = f * (\tau_s g),$$

wobei τ_s die Translation um $s \in \mathbb{R}$ ist: $\tau_s f(t) = f(t - s)$.

Aufgabe 46 Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1 + x^2)}\, dx$$

(a) mit Hilfe der Parseval'schen Formel,
(b) mit dem Residuensatz.

Aufgabe 47 Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Setze $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi k).$$

Zeige, dass g 2π-periodisch ist und gib eine Formel an, die die Fourierkoeffizienten

$$c_k = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\, \mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z},$$

durch die Fouriertransformierte von f ausdrückt.

Aufgabe 48 Löse die gewöhnliche Differentialgleichung $-u_{tt} + a^2 u = \delta$ mit der Fouriertransformation.

Abgabe: Dienstag, 19.01.2010 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1

Hansen 19.01.2010

Mathematik C für Physiker

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 49 Löse folgendes Anfangswertproblem mit der Laplace-Transformation:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t,$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$$

Aufgabe 50 Löse das Anfangswertproblem mit der Laplace-Transformation.

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$$

Aufgabe 51 Berechne

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)(z-2)^2}\right].$$

Aufgabe 52 Sei $f(t)$ stetig und periodisch mit Periode $T > 0$. Zeige, dass

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{1-e^{-zT}} \int_0^T e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Abgabe: Dienstag, 26.01.2010 bis 12 Uhr im bezeichneten Kasten auf der Ebene D1