

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Sönke Hansen

Wintersemester 2009/10 – Stand: 1. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Integralrechnung in mehreren Variablen	1
1.1	Erinnerung an das eindimensionale Integral	2
1.2	Iterierte Integration	3
1.3	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	6
1.4	Variablensubstitution	8
1.5	Massen, Schwerpunkte und Trägheitsmomente	10
1.6	Ableitung von Integralen nach Parametern	12
2	Eigenwertprobleme	13
2.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	13
2.2	Diagonalisierung, Normalformen	17
2.3	Berechnung von Eigenvektoren	20
3	Lineare Differentialgleichungssysteme	21
3.1	Fundamentalmatrizen	21
3.2	Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	24
3.3	Methode der Variation der Konstanten	26
3.4	Laplace-Transformation	29
4	Vektoranalysis	35
4.1	Kurven	35
4.2	Kurvenintegrale	38
4.3	Potentiale und Wegunabhängigkeit	41
4.4	Flächen und Flächenintegrale	44
4.5	Der Gauß'sche Integralsatz	48

1 Integralrechnung in mehreren Variablen

Es werden Integrale in 2 und 3 Variablen eingeführt. Die Integrationstechniken der iterierten Integration und der Variablensubstitution werden behandelt. 12.Okt.

1.1 Erinnerung an das eindimensionale Integral

Das (bestimmte) Integral einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine reelle Zahl, die mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet wird. Ist $f \geq 0$, dann gibt das Integral den Inhalt der Fläche an, die vom Graphen von f , von der x -Achse und von den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Man definiert das Integral als Grenzwert von Riemannsummen, d.h. von Summen von Rechtecksinhalten. Hierbei wird die Fläche näherungsweise zerlegt in (disjunkte) Vereinigungen von Rechtecken (Ausschöpfungsverfahren).

Zwischen dem Integrieren und dem Differenzieren gibt es einen fundamentalen Zusammenhang, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{wenn } F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Man nennt F eine Stammfunktion für f . Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Man nennt die Gesamtheit der Stammfunktionen das unbestimmte Integral von f , und man schreibt dafür $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Wegen (1) ist eine Integralberechnung einfach, wenn eine Stammfunktion bekannt ist. Wichtige Integrationstechniken sind die partielle Integration und die Substitutionsregel. Diese ergeben sich mittels (1) aus der Produkt- und der Kettenregel der Differentialrechnung.

Das Integral ist linear und positiv:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \\ f \geq 0 &\implies \int_a^b f(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Ferner führt eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ des Integrationsintervalles $[a, b]$ zu einer Summenzerlegung des Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx.$$

Diese Eigenschaften sind grundlegend für einen Beweis des Hauptsatzes (1).

Wenn – auch bei Anwendung der Integrationstechniken – keine Stammfunktion aufgefunden werden kann, dann ist eine numerische Berechnung des Integrals erforderlich. Numerische Rechenverfahren basieren auf der Summenzerlegungseigenschaft und verwenden geeignete Näherungen für die Integrale über die Teilintervalle. Solche Verfahren stehen als Software (in Matlab, Maple u.A.) zur Anwendung zur Verfügung.

Auch wenn die Definition des Integrals durch das Problem der Flächenberechnung motiviert ist, ist eine Gleichsetzung von einem Integral mit einem Flächeninhalt im Allgemeinen zu kurz

gedacht. Ein Integral kann auch eine ganz andere geometrische Bedeutung haben. Ein Beispiel ist die Länge L des Graphen von $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1.2 Iterierte Integration

Seien $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge der Ebene und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ eine Funktion. Man definiert, unter geeigneten Voraussetzungen an den Integrationsbereich B und den Integranden f , das Integral

$$I = \int_B f dA \in \mathbb{R}$$

von f über B erklären. Hier steht dA für das infinitesimale Flächenelement (A von Area). Wenn f nur positive Werte annimmt, dann ist I gerade das Volumen desjenigen Körpers im dreidimensionalen xyz -Raum sein, der begrenzt wird durch den Graphen von f , die xy -Ebene und den Mantel des Zylinders, dessen Basis B und dessen Achse die z -Achse ist.

Zur Definition des Integrals geht man ähnlich vor wie im Eindimensionalen. Man zerlegt B in Teilbereiche B_j :

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N, \quad B_j \cap B_k = \emptyset, \text{ wenn } j \neq k.$$

Man wählt Punkte $(x_j, y_j) \in B_j$ und zielt darauf, das Integral durch die zugehörige Riemannsumme anzunähern:

$$\int_B f dA \approx \sum_{j=1}^N f(x_j, y_j) A(B_j).$$

Der Flächeninhalt $A(B_j)$ kann leicht gebildet werden, wenn B_j eine einfache geometrische Figur ist, wie etwa ein Rechteck oder ein Dreieck. I.A. kann B nur angenähert, aber nicht exakt, in solch einfache Figuren zerlegt werden. Ist B beschränkt und sein Rand stückweise glatt und ist f stetig, dann kann man zeigen, dass Folgen von Riemannsummen konvergieren, wenn die Durchmesser $d(B_j)$ der B_j – genauer: ihr Maximum $\max_{j=1, \dots, N} d(B_j)$ – gegen Null konvergiert. Der Limes der Folgen solcher Riemannsummen ist dann das Integral von f über B . Eine logisch konsistente Begründung wird in einer Integrationstheorie gegeben. Hierauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Man zeigt für das zweidimensionale Integral wieder die grundlegenden Eigenschaften der Linearität und Positivität:

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x)) dA = \alpha \int_B f(x) dA + \beta \int_B g(x) dA,$$

$$f \geq 0 \implies \int_B f(x) dA \geq 0.$$

Ferner hat man die Zerlegungseigenschaft

$$\int_B f(x) dA = \sum_{j=1}^N \int_{B_j} f(x) dA, \quad \text{wenn } B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N,$$

wobei $A(B_j \cap B_k) = 0$, wenn $j \neq k$. Die ebengenannten Eigenschaften sind sehr wichtig und werden oft benutzt. Für die praktische Berechnung konkret gegebener Integrale reichen sie jedoch nicht aus.

Eine praktisch bedeutsame Integrationstechnik für zweidimensionale Integrale $\int_B f(x) \, dA$ ist die iterierte Integration. Wir erläutern sie für Normalgebiete. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet (bzgl. der x -Achse), d.h. es gibt stetige Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \leq h$ derart, dass gilt

$$B = \{(x, y); a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}. \quad (2)$$

Somit wird B von den Graphen von g und h begrenzt.

Satz 1.2.1 (Satz von der iterierten Integration). *Ist B ein Normalgebiet wie in (2) und ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt*

$$\int_B f \, dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (3)$$

Durch diesen Satz wird eine zweidimensionale Integration auf zwei eindimensionale Integrationen zurückgeführt. Man spricht auch von Doppelintegralen und schreibt

$$\int_B f \, dA = \iint_B f(x, y) \, dy \, dx.$$

Beispiel 1.2.2. Sei $B = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq e^x\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_B 2xy \, dA &= \int_0^1 \int_x^{e^x} 2xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x(e^{2x} - x^2) \, dx = \dots = e^2/4. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Bereichs B wird definiert als

$$A(B) = \int_B 1 \, dA. \quad (4)$$

Für B wie in (2) erhält man, wie erwartet, $A(B) = \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx$. Aus der Positivität des Integrals erhält man die einfache aber nützliche Abschätzung:

$$m \leq f(x, y) \leq M \implies m A(B) \leq \int_B f \, dA \leq M A(B)$$

Einen Bereich der Gestalt

$$B = \{(x, y); a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

nennt man ein Normalgebiet bezüglich der y -Achse. Hierfür hat der Satz von der iterierten Integration die Form:

$$\int_B f \, dA = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Ist B sowohl bezüglich der x -Achse als auch bezüglich der y -Achse ein Normalgebiet, dann kann die Integrationsreihenfolge beliebig gewählt werden:

$$\int_B f \, dA = \iint_B f(x, y) \, dy \, dx = \iint_B f(x, y) \, dx \, dy.$$

Eine Anwendung dieser Formel erfordert aber Sorgfalt, denn die Integrationsgrenzen der eindimensionalen Integrale müssen korrekt festgelegt werden.

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gilt allgemeiner für beliebige Integrationsbereiche B . Für eine praktische Berechnung von Integralen über B ist es nützlich, B in Normalbereiche zu zerlegen.

Beispiel 1.2.3. Die Menge B aus Beispiel (1.2.2) kann wie folgt in zwei Normalbereiche bezüglich y -Achse zerlegt werden:

$$B = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\} \\ \cup \{(x, y); 1 \leq y \leq e, \ln y \leq x \leq 1\}.$$

Folglich kann das Integral so dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \int_B 2xy \, dA &= \int_0^1 \int_x^{e^x} 2xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx \, dy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 2xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 y^3 \, dy + \int_1^e y(1 - (\ln y)^2) \, dy. \end{aligned}$$

Auf diesem Wege erhält man natürlich auch für das Integral den Wert $e^2/4$.

Wir illustrieren die Zerlegung in Normalgebiete an einem weiteren Beispiel.

Beispiel 1.2.4. Die folgende Menge B entsteht dadurch, dass aus einer Kreisscheibe eine in ihr enthaltene Kreisscheibe entfernt wird:

$$B = \{(x, y); (x - 2)^2 + y^2 \leq 4, (x - 1)^2 + y^2 > 1\}.$$

Wir zerlegen B in $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ mit

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, \sqrt{1 - (x - 1)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x - 2)^2}\}, \\ B_2 &= \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq y \leq -\sqrt{1 - (x - 1)^2}\}, \\ B_3 &= \{(x, y); 2 \leq x \leq 4, -\sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x - 2)^2}\}. \end{aligned}$$

B_1 , B_2 und B_3 sind Normalbereiche bezüglich der x -Achse.

In drei Dimensionen definiert man für geeignete Integrationsbereiche $B \subset \mathbb{R}^3$ und integrierbare Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ das (bestimmte) Integral $\int_B f \, dV \in \mathbb{R}$ von f über B bezüglich des 19.Okt.

Volumenelements dV . Wie im ein- und zweidimensionalen Fall geschieht die Konstruktion mit geeigneten Ausschöpfungen von B und vom Subgraphen von f . Das Volumen von B ist nach Definition das Integral $V(B) = \int_B 1 dV$. Analog zum zweidimensionalen Integral gelten Sätze über die iterierte Integration und die Vertauschbarkeit von Integrationsreihenfolgen, z.B.

$$\int_B f dV = \iiint_B f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_B f(x, y, z) dy dx dz = \dots$$

Es ist bei der iterierten Integration wieder sehr wichtig, die Integrationsgrenzen korrekt zu berücksichtigen. Für einen Normalbereich B der Gestalt

$$B = \{(x, y, z); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

berechnet man das Integral einer Funktion f über B wie folgt:

$$\int_B f dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Das Volumen von B ist

$$V(B) = \iint_D (h_1(x, y) - h_2(x, y)) dy dx,$$

wobei $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$.

Beispiel 1.2.5. Das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z); |x| \leq 1, |y| \leq \sqrt{1 - x^2}, |z| \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \end{aligned}$$

berechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \pi(1-x^2) dx = 4\pi/3. \end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung wurde die Formel $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi a^2/2$ benutzt.

1.3 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Ein Punkt in der Ebene ist bestimmt durch seine kartesischen Koordinaten x und y . Sein Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems ist nach Pythagoras $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bezeichne φ den Winkel zwischen der positiven x -Achse und der Halbgeraden durch den betrachteten Punkt. Diese Halbgeraden schneiden aus dem Kreis mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung einen Kreisbogen der Länge $r\varphi$ aus. Hierbei ist der Winkel im Bogenmaß (Radian) anzugeben (nicht

in Grad – der Winkel ist eine Länge!). Man nennt r und φ die Polarkoordinaten des Punktes. Seine kartesischen Koordinaten sind dann

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (5)$$

Da der Vollkreis die Länge 2π hat, gilt $0 \leq \varphi < 2\pi$. Es ist sinnvoll, auch negative Winkel zuzulassen; diese entsprechen Durchläufen der Kreisbögen vom Schnittpunkt mit der positiven x -Achse zum betrachteten Punkt im Uhrzeigersinn (= negativer Durchlaufssinn). Winkel mit $|\varphi| > 2\pi$ entsprechen mehrfachen Umläufen. Den Winkel gewinnt man aus den kartesischen Koordinaten im Falle $x > 0$ mit der Formel $\varphi = \arctan(y/x)$.

Die Abbildung Φ ,

$$\Phi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$

die den Polarkoordinaten eines Punktes seine kartesischen Koordinaten zuordnet ist differenzierbar. Ihre Jacobimatrix lautet

$$D\Phi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix},$$

und ihre Jacobideterminante ist folglich $J = J(r, \varphi) = r$. Die Jacobideterminante J spielt eine zentrale Rolle in der weiter unten behandelten Substitutionsregel für Integrale. Die Koordinatentransformation Φ bildet den durch $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ gegebenen Halbstreifen ab auf die längs der negativen x -Achse geschlitzte xy -Ebene. Rechtecke werden auf Kreisringsegmente abgebildet. Die (geschlitzte) Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $R > 0$ entspricht dem Rechteck $]0, R] \times]-\pi, \pi[$ in der $r\varphi$ -Ebene.

Im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 verwenden wir kartesische Koordinaten x, y und z . Liegt eine Symmetrie bezüglich Rotationen um die z -Achse vor, dann ist oft die Verwendung von Zylinderkoordinaten nützlich. Dies sind Polarkoordinaten in der xy -Ebene wie in (5); die z -Koordinate bleibt unverändert. In Zylinderkoordinaten kann man bequem Rotationskörper beschreiben. Ist beispielsweise $R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige positive Funktion, dann ist

$$B = \{(x, y, z); a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq R(z)\}$$

ein massiver Rotationskörper bezüglich der z -Achse, dessen Schnitt in Höhe z eine Kreisscheibe mit Radius $R(z)$ ist.

In kugelsymmetrischen Situationen ist die Verwendung von Kugelkoordinaten ρ, φ und ϑ angebracht. Ausgehend von Zylinderkoordinaten gelangt man zu diesen, indem man in der rz -Ebene Polarkoordinaten ρ und ϑ einführt:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad r = \rho \cos \vartheta, \quad z = \rho \sin \vartheta.$$

Hier sind $r, \rho > 0$, $|\varphi| < \pi$ und $|\vartheta| < \pi/2$. Die Beziehungen zwischen kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten sind:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Auf einer Kugeloberfläche mit Radius $\rho > 0$ geben φ den Längengrad und ϑ den Breitengrad an. Die Jacobideterminante der durch die Formel (6) gegebenen Abbildung (Koordinatentransformation) von Kugelkoordinaten $(\rho, \varphi, \vartheta)$ in kartesische Koordinaten (x, y, z) berechnet man direkt zu $J = J(\rho, \varphi, \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta$.

1.4 Variablensubstitution

Die bekannte Substitutionsregel in einer Variablen hat folgende allgemeine Gestalt:

$$\int_a^b f(\Phi(x))\Phi'(x) dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(s) ds, \quad \text{Subst.: } s = \Phi(x), ds = \Phi'(x) dx.$$

Im Fall höherdimensionaler Integrale wird $\Phi'(x)$ durch die Jacobideterminante der Abbildung Φ ersetzt. Wir betrachten zuerst den zweidimensionalen Fall der Substitutionsregel. Hier ist Φ eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi : U \rightarrow B, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix},$$

welche U bijektiv auf B abbildet. Die Jacobideterminante ist nirgends Null: $J = \det D\Phi \neq 0$. Genauer setzt man voraus: Φ ist ein (C^1) -Diffeomorphismus von U auf B . Ein wichtiges Beispiel ist die Abbildung Φ von Polarkoordinaten $(u, v) = (r, \varphi)$ auf kartesische Koordinaten (x, y) .

Satz 1.4.1 (Variablensubstitution in Doppelintegralen). *Für eine über B integrierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_U f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Der Grund für das Auftreten der Jacobideterminante J ist, dass unter der Transformation Φ infinitesimale Flächeninhalte mit dem Faktor J multipliziert werden. Der Betrag tritt auf, weil Flächeninhalte nicht negativ sind.

Beispiele 1.4.2. Die Formel der Variablensubstitution wird hier illustriert an Beispielen zur Berechnung von Flächeninhalten, d.h. für $f = 1$.

- (i) Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $R > 0$ wird mit Hilfe von Polarkoordinaten (5) wie folgt berechnet:

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R} 1 dx dy = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

Hier wurde $J(r, \varphi) = r$ benutzt.

- (ii) Sei T eine reelle 2×2 -Matrix mit $\det T = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \neq 0$. Die zu T gehörige lineare Abbildung,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

bildet das Einheitsquadrat $Q = [0, 1]^2$ auf ein Parallelogramm P ab. P wird von den Spalten von T aufgespannt. Die Substitutionsregel ergibt die bekannte Formel $A(P) = |\det T|$ für den Flächeninhalt des Parallelogramms P .

Stellt T eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Scherung dar, dann ist $\det T = \pm 1$. Solche Abbildungen erhalten den Flächeninhalt.

(iii) Die achsenparallele Ellipse

$$E = \{(x, y); (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$$

ist das Bild der Einheitskreisscheibe $K = \{(u, v); u^2 + v^2 \leq 1\}$ unter der linearen Abbildung, die durch die Diagonalmatrix $\text{diag}(a, b)$ dargestellt wird. Folglich:

$$A(E) = \iint_{(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} ab \, du \, dv = \pi ab$$

Man beweist die Substitutionsregel indem man sie mittels Zerlegung von U in kleine Quadrate auf den im Beispiel (ii) behandelten Fall zurückführt.

Beispiel 1.4.3. Gesucht sei das Integral von $f(x, y) = y$ über den Kreisringsektor B , der in Polarkoordinaten gegeben ist durch $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Mittels Substitution von Polarkoordinaten erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_B y \, dA &= \iint_B y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \int_1^2 r \sin \varphi \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) = \frac{7(\sqrt{2} - 1)}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den dreidimensionalen Fall der Substitutionsregel. Sei dazu ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U, B \subset \mathbb{R}^3$ gegeben:

26.Okt.

$$\Phi : U \rightarrow B, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix}.$$

Mit J wird wieder die Jacobideterminante bezeichnet:

$$J = J(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{bmatrix}.$$

Satz 1.4.4 (Variablensubstitution in Dreifachintegralen). Für eine über B integrierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_U f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Man sagt auch, dass die kartesischen Koordinaten x, y, z substituiert werden durch i.A. krummlinige Koordinaten u, v, w .

Beispiel 1.4.5. Das Volumen eines rotationssymmetrischen Hohlkörpers

$$B = \{(x, y, z); a \leq z \leq b, R_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2(z)\}$$

kann man durch Substitution von Zylinderkoordinaten berechnen. Man erhält:

$$V(B) = \int_a^b \int_{R_1(z)}^{R_2(z)} \int_{-\pi}^{\pi} r \, d\varphi \, dr \, dz = \pi \int_a^b (R_2(z)^2 - R_1(z)^2) \, dz.$$

Hier wurde die Formel $J = J(r, \varphi, z) = r$ für die Jacobideterminante benutzt.

Beispiel 1.4.6. Wir berechnen das Volumen einer Kugel mit Radius R unter Benutzung von Kugelkoordinaten ρ, φ, ϑ . In diesen Koordinaten entspricht die Kugel B dem Quader

$$0 \leq \rho \leq R, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2.$$

Unter Benutzung von $J = \rho^2 \cos \vartheta$ folgt

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2 \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\rho = 4\pi \int_0^R \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

1.5 Massen, Schwerpunkte und Trägheitsmomente

Die mehrdimensionale Integration ist nicht nur für die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina wichtig.

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein dreidimensionaler Körper. Seine (Massen-)Dichte ρ ist i.A. eine Funktion des Ortes, $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, y, z) > 0$. Eine übliche Einheit für die Dichte ist kg/m^3 . Der Körper heißt homogen, wenn seine Dichte konstant ist. Die Gesamtmasse (etwa in Kilogramm) des Körpers ist

$$m(B) = \int_B dV = \iiint_B \rho(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

bzw. $m(B) = \rho V(B)$ im homogenen Fall.

Die Schwerpunktskoordinaten (x_S, y_S, z_S) von B erhält man durch Mittelung der kartesischen Koordinaten bezüglich der normierten Dichte, z.B.

$$x_S = \frac{1}{m(B)} \iiint_B x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Wenn B homogen ist, dann kann die Konstante ρ gekürzt werden, und man hat dann:

$$x_S = \frac{1}{V(B)} \iiint_B x \, dx \, dy \, dz.$$

Beispiel 1.5.1. Sei B ein Halbzylinder

$$B = \{(x, y, z); 0 \leq y, |z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4\},$$

der aus zwei Materialien unterschiedlicher Dichte zusammengesetzt ist:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_1, & \text{wenn } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \rho_2, & \text{wenn } 1 < x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Wir berechnen y_S . Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten gilt:

$$m(B) = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \left(\int_0^1 \rho_1 r \, dr + \int_1^2 \rho_2 r \, dr \right) d\varphi \, dz = \pi(\rho_1 + 3\rho_2).$$

Weiter:

$$\begin{aligned} m(B)y_S &= \int_{-1}^1 \int_0^\pi \left(\int_0^1 r \sin(\varphi) \rho_1 r \, dr + \int_1^2 r \sin(\varphi) \rho_2 r \, dr \right) d\varphi \, dz \\ &= 4 \left(\int_0^1 \rho_1 r^2 \, dr + \int_1^2 \rho_2 r^2 \, dr \right) = \frac{4}{3}(\rho_1 + 7\rho_2). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$y_S = \frac{4(\rho_1 + 7\rho_2)}{3\pi(\rho_1 + 3\rho_2)}$$

Im homogenen Fall $\rho = \rho_1 = \rho_2$ gilt $y_S = 8/3\pi < 1$. Aus Symmetriegründen gilt $x_S = 0 = z_S$.

Das Trägheitsmoment (Einheit: $kg \cdot m^2$) bezüglich der z -Achse eines Körpers B mit Dichtefunktion $\rho = \rho(x, y, z)$ ist die Zahl

$$I_z(B) = \iiint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Allgemein ist $I(B) = \int_B r^2 \rho \, dV$, wobei r den Abstand zur Drehachse bezeichnet.

Beispiel 1.5.2. Sei B ein homogener Würfel mit Kantenlänge $2a$ und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Sein Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse ist

$$\begin{aligned} I_z(B) &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\ &= (2a)^2 \rho \left(\int_{-a}^a x^2 \, dx + \int_{-a}^a y^2 \, dy \right) = \frac{16}{3} \rho a^5. \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.3. Es sei ein rotationssymmetrischer Hohlkörper B wie im Beispiel 1.4.5 gegeben. Ähnlich wie bei der dort durchgeführten Volumenberechnung verwenden wir Zylinderkoordinaten und erhalten für das Trägheitsmoment:

$$I_z(B) = \dots = \frac{1}{2} \pi \rho \int_a^b (R_2(z)^4 - R_1(z)^4) \, dz.$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass die Dichte ρ konstant ist.

1.6 Ableitung von Integralen nach Parametern

Die Dichte eines strömenden Gases hängt nicht nur vom Ort, sondern auch von der Zeit ab. Will man den Massenfluss durch einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ bilanzieren, so wird man darauf geführt, Integrale der Form

$$m(t) := \iiint_B \rho(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz$$

als Funktionen der Zeit t zu behandeln. Insbesondere ist wichtig, ob und wie man nach t differenzieren kann. Integrale der obigen Art, welche von einem Parameter abhängen, treten nicht nur in der Kontinuumsmechanik auf, sondern beispielsweise auch in theoretischen Untersuchungen zum Straßenverkehr: $N(t) = \int_a^b \rho(x, t) \, dx$ kann hier die Anzahl der Fahrzeuge in einem Straßenabschnitt $[a, b]$ bei gegebener Fahrzeugdichte $\rho(x, t)$ bedeuten.

Satz 1.6.1. *Ist $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, dann ist die durch*

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) \, dx, \quad t \in I$$

definierte Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls stetig. Ist f zusätzlich partiell nach t differenzierbar mit stetiger Ableitung, dann ist F differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx, \quad t \in I.$$

Der Satz besagt, dass unter den genannten Voraussetzungen Ableitung und Integral vertauscht werden dürfen. Ein Beweis des Satzes folgt aus der Tatsache, dass ein Integral mit einem Grenzwert vertauscht werden kann, wenn sogenannte gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Beispiel 1.6.2. Für $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^2 \frac{1}{x} \sin(tx) \, dx, \\ F'(t) &= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{x} \sin(tx) \right) \, dx = \int_1^2 \cos(tx) \, dx \\ &= \frac{1}{t} \sin(tx) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{\sin(2t) - \sin t}{t}. \end{aligned}$$

Der obige Satz gilt entsprechend für mehrdimensionale Integrale, z.B. hat man unter geeigneten Voraussetzungen: 2.Nov.

$$\frac{d}{dt} \iiint_B f(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz.$$

Eine wichtige Voraussetzung ist hier, dass das Integrationsgebiet B nicht vom Parameter t abhängt.

Im Falle eindimensionaler Integrale hat man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) \, dx = f(t).$$

Aus dem Hauptsatz folgt die bekannte Regel zur Berechnung von Integralen mittels Stammfunktionen. Aus ihm folgt in Verbindung mit der Kettenregel auch

$$\frac{d}{dt} \int_a^{b(t)} f(x) dx = f(b(t))b'(t).$$

Allgemeiner gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x, t) dx.$$

Dies ist eine Formel für die Ableitung von Integralen nach Parametern, wobei auch das Integrationsintervall von den Parametern abhängen darf. Zum Beweis der Formel wendet man die Kettenregel an auf die Verkettung folgender Funktionen mehrerer Variablen:

$$t \mapsto (t, a(t), b(t)), \quad (t, a, b) \mapsto \int_a^b f(x, t) dx.$$

Beispiel 1.6.3.

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} (e^{-x^2} + t) dx = \frac{e^{-t} + t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} = \frac{e^{-t} + 3t}{2\sqrt{t}}.$$

Bei der Laplace- und der Fouriertransformation von Funktionen treten uneigentliche Integrale auf, die von Parametern abhängen. Im Fall der Laplacetransformation haben dies Integrale die Gestalt

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Auch hier kann man unter gewissen Voraussetzungen Ableitung und Integral vertauschen. Hierauf gehen wir später bei der Behandlung der Laplacetransformation ein.

Beispiele zeigen, dass das Vertauschen von Grenzwertoperationen nicht voraussetzungslos möglich ist.

2 Eigenwertprobleme

Eigenwertprobleme treten in vielen Anwendungen auf, beispielsweise in der Untersuchung von Schwingungen. Eigenwerte und Eigenvektoren spielen eine wichtige Rolle in der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A = (a_{ik})$ eine $n \times n$ -Matrix. Ein n -dimensionaler Vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ heißt ein Eigenvektor, wenn es eine Zahl λ gibt, sodass gilt

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}. \quad (7)$$

Man nennt λ den zum Eigenvektor \underline{x} gehörigen Eigenwert.

Vielfache von \underline{x} sind ebenfalls Eigenvektoren von A mit demselben Eigenwert λ .

Beispiel 2.1.1. Ein Eigenvektor einer 3×3 -Matrix zum Eigenwert $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2.1.2. (*Koppelschwingungen*) Zwei Massen m_1 und m_2 sind an Federn mit der Federkonstanten c aufgehängt. Zusätzlich sind die Massen durch eine Feder mit der Federkonstanten d gekoppelt. Die Schwerkraft wird ignoriert. Für die Auslenkungen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ zum Zeitpunkt t der Massen aus ihren Ruhelagen ($s_j = 0$) leitet man mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes folgende Bewegungsgleichungen her:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 + cs_1 + d(s_1 - s_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{s}_2 + cs_2 + d(s_2 - s_1) &= 0. \end{aligned}$$

Gesucht sind Schwingungslösungen $s_j(t) = v_j \cos(\omega t)$ mit gleicher Kreisfrequenz ω . Einsetzen in die Gleichungen führt auf das Eigenwertproblem

$$\begin{bmatrix} \frac{c+d}{m_1} & -\frac{d}{m_1} \\ -\frac{d}{m_2} & \frac{c+d}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Im Spezialfall gleicher Massen $m = m_1 = m_2$ findet man zwei Lösungen, die verschiedenen Schwingungszuständen entsprechen, einer gleichphasigen Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad v_1 = v_2 = 1,$$

und einer gegenphasigen Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{c+2d}{m}}, \quad v_1 = 1, v_2 = -1.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass reelle Matrizen nicht notwendig reelle Eigenwerte haben und dass es sinnvoll ist, komplexe Eigenwerte zuzulassen.

Beispiel 2.1.3. Ist $\underline{x} \neq \underline{0}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dann ist dies gleichwertig mit

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eine Lösung gibt es genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet:

$$\lambda^2 + 1 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Hierfür gibt es keine reelle Lösung λ . Aber es gibt die komplexen Eigenwerte $\lambda = i$ und $\lambda = -i$. Die Matrix A stellt eine Drehung um 90° dar.

Wir sind primär an Eigenwerten und Eigenvektoren reeller Matrizen $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ interessiert. Um alle Eigenwerte, auch die komplexen, erfassen zu können, betrachten wir allgemeiner auch komplexe $n \times n$ -Matrizen. Jede reelle Matrix ist via $\mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ auch eine komplexe Matrix. Für das Rechnen mit komplexen Matrizen gelten die gleichen Gesetze wie für reelle Matrizen.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix. $E = E_n$ bezeichne die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \det(\lambda E - A)$$

ist eine Polynom vom Grade n mit führenden Koeffizienten $(-1)^n$ definiert. Man nennt es das charakteristische Polynom von A .

Beispiel 2.1.4. Das charakteristische Polynom der Matrix aus dem Beispiel 2.1.1 lautet:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 3 & \lambda - 2 & -3 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Satz 2.1.5. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ sind genau die Eigenwerte von A .

Begründung: Ein Vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ ist genau dann ein Eigenvektor mit Eigenwert λ , wenn $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ gilt, d.h. wenn $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$. Diese Gleichung besitzt genau dann eine vom Nullvektor verschiedene Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist.

Im obigen Beispiel sind 1, -1 und 2 die einzigen Eigenwerte von A .

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Insbesondere besitzt jedes nichtkonstante Polynom mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} . Die Nullstellen λ_j sind i.A. nicht sämtlich verschieden.

Folgerung 2.1.6. Jede $n \times n$ -Matrix besitzt n Eigenwerte, wobei diese mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Die (algebraische) Vielfachheit eines Eigenwertes ist die Anzahl der zugehörigen Linearfaktoren in der Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms.

Das übliche Vorgehen zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist wie folgt:

1. Stelle das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ auf und berechne seine Nullstellen. Diese Nullstellen sind Eigenwerte von A .
2. Bestimme zu einem gegebenen Eigenwert λ von A einen Eigenvektor durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$ mit $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Beispiel 2.1.7. Die Eigenwerte der Matrix A aus Beispiel 2.1.1 wurden bereits bestimmt: 1, -1 und 2. Zugehörige Eigenvektoren sind die Spalten der Matrix

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

und die Vielfachen dieser Spalten. Man sieht, dass T invertierbar ist. Dass die Spalten von T Eigenvektoren sind, drückt sich in folgender Gleichung aus:

$$AT = TD, \quad D = \text{diag}(1, -1, 2).$$

Das obige Vorgehen ändert sich nicht, wenn komplexe Eigenwerte vorliegen:

9.Nov.

Beispiel 2.1.8. Die Matrix in Beispiel 2.1.3 hat die Eigenwerte i und $-i$. Aus der Gleichung

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

schließt man, dass die skalaren Vielfachen des Vektors $[1, i]^T$ die (einzigen) Eigenvektoren zum Eigenwert $-i$ sind. Analog sieht man, dass $[i, 1]^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert i ist. Wie im vorherigen Beispiel kann man das Ergebnis auch so notieren:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

In den obigen Beispielen sind die Eigenvektoren linear unabhängig. Dies gilt allgemein, wenn die Eigenwerte verschieden sind:

Satz 2.1.9. Sind $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ Eigenvektoren einer Matrix A zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, die paarweise verschieden sind, dann sind diese Eigenvektoren linear unabhängig.

Angenommen der Satz wäre falsch, d.h. die Eigenvektoren sind linear abhängig. Es gilt also $\sum_{j=1}^m c_j \underline{v}_j = \underline{0}$ wobei nicht alle Koeffizienten c_j Null sind. Dann ist auch

$$\underline{0} = (A - \lambda_k E) \sum_{j=1}^m c_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^m c_j (\lambda_j - \lambda_k) \underline{v}_j.$$

Hieraus folgt, dass auch eine $m - 1$ -elementige Teilmenge der Vektoren linear abhängig ist. So fortfahrend erhielte man, dass es einen einzelnen Vektor \underline{v}_j gibt, der linear abhängig und folglich der Nullvektor ist. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Eigenvektoren nicht Null sind.

Kennt man Eigenwerte und Eigenvektoren von A , dann kennt man auch solche von A^2, A^3 usw. In der Tat, aus (7) folgt $A^m \underline{x} = \lambda^m \underline{x}$.

Der Kern einer linearen Abbildung ist ein linearer Teilraum. Dass eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist, kann man auch so ausdrücken: Die Dimension des linearen Teilraums

$$V_\lambda := \text{Kern}(A - \lambda E) \subset \mathbb{C}^n$$

ist ≥ 1 . Die Vektoren $\underline{0} \neq \underline{v} \in V_\lambda$ sind genau die zu λ gehörigen Eigenvektoren. Man nennt V_λ den zum Eigenwert λ gehörigen Eigenraum. Ist A reell und sind die Eigenwerte von A reell, dann genügt es, den reellen Eigenraum $V_\lambda \cap \mathbb{R}^n$ zu betrachten.

2.2 Diagonalisierung, Normalformen

Zwei $n \times n$ -Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt mit

$$B = T^{-1}AT. \quad (8)$$

Satz 2.2.1. Die charakteristischen Polynome und die Eigenwerte ähnlicher Matrizen sind gleich.

Aus (8) folgt $(B - \lambda E) = T^{-1}(A - \lambda E)T$ und dann mit der Multiplikatitivität der Determinante

$$\det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(T) = \det(A - \lambda E).$$

Folglich $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda)$ wie im Satz behauptet.

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind genau ihre Diagonalelemente; die Vektoren $\underline{e}_j = [0, \dots, 1, 0, \dots]^T$ der Standardbasis sind dann Eigenvektoren. Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist:

$$T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Wir nennen diese Darstellung eine Diagonalisierung von A mit der Transformationsmatrix T . Die j -te Spalte von T ist der Vektor $\underline{v}_j = T\underline{e}_j$. Dies ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j , denn:

$$A\underline{v}_j = AT\underline{e}_j = TD\underline{e}_j = T(\lambda_j\underline{e}_j) = \lambda_j\underline{v}_j.$$

Satz 2.2.2. Eine $n \times n$ -Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es n Eigenvektoren gibt, die linear unabhängig sind.

Anders ausgedrückt: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis des \mathbb{R}^n oder des \mathbb{C}^n gibt, die aus Eigenvektoren besteht. Bildet man die Matrix T , die diese Vektoren als Spalten hat, dann ist T invertierbar und T transformiert A wie in (9) in eine Diagonalmatrix A .

Beispiele 2.2.3. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A in den ersten beiden Beispielen wurden bereits bestimmt. Die nachfolgenden Formeln fassen diese Ergebnisse zusammen.

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar, da es keine Basis aus Eigenvektoren gibt. Der einzige Eigenwert ist $\lambda = 0$ und alle Eigenvektoren sind Vielfache von $\underline{e}_1 = [1, 0]^T$. Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A(\lambda) = \lambda^2$. Der Eigenwert 0 besitzt die algebraische Vielfachheit 2 aber die geometrische Vielfachheit ist nur 1; d.h. $\lambda = 0$ ist eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms, aber die Dimension des zugehörigen Eigenraumes ist nur 1.

Eine reelle Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$ gilt, d.h. wenn $a_{ki} = a_{ik}$ für alle i, k . Gilt $A^T = A^{-1}$, dann heißt A orthogonal. Dreh- und Spiegelungsmatrizen sind fundamentale Beispiele orthogonaler Matrizen. Die Spalten einer orthogonalen Matrix sind Einheitsvektoren, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Die folgende Tatsache ist bemerkenswert und sehr wichtig.

Satz 2.2.4. *Eine symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und sie ist diagonalisierbar.*

Ist A symmetrisch und sind \underline{v} und \underline{w} Eigenvektoren

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \quad A\underline{w} = \mu\underline{w} \quad \text{zu Eigenwerten } \lambda \neq \mu,$$

dann stehen diese Vektoren senkrecht aufeinander, denn

$$\lambda\underline{v} \cdot \underline{w} = (A\underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot (A\underline{w}) = \underline{v} \cdot (\mu\underline{w}) = \mu\underline{v} \cdot \underline{w}$$

kann nur gelten, wenn $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ gilt. Diese Tatsache hängt zusammen mit folgender Präzisierung der Aussage des obigen Satzes.

Satz 2.2.5. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$S^T A S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Die Spalten von S bilden eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von A .

Beispiel 2.2.6. Die symmetrische 2×2 -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

hat die Eigenwerte 3 und -1 . Zugehörige Eigenvektoren sind $[1, 1]^T$ bzw. $[-1, 1]^T$; beide haben Länge $\sqrt{2}$. Mit

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

hat man die Diagonalisierungen $S^T A S = T^{-1} A T = D$. Die Matrix S ist orthogonal und stellt eine Drehung um 45° dar. T ist nicht orthogonal.

Zu einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gehört eine Funktion $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

16.Nov.

$$Q_A(x_1, \dots, x_n) = \underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

die zu A gehörige quadratische Form. Der Gradient von Q_A ist $\nabla Q_A(x) = 2A\underline{x}$, die Hessematrix der zweiten Ableitungen ist $= 2A$.

Beispiel 2.2.7. Zu A aus dem Beispiel (2.2.6) gehört die quadratische Form

$$Q_A(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Wechselt man mit $S^{-1} = S^T = S$ von den rechtwinkligen Koordinaten (x_1, x_2) zu den rechtwinkligen Koordinaten (y_1, y_2) , $\underline{y} = S^{-1}\underline{x}$, dann geht Q_A über in die quadratische Form

$$Q_D(y_1, y_2) = 3y_1^2 - y_2^2.$$

Diese Vereinfachung nennt man eine Hauptachsentransformation. Man kann sie geometrisch beispielsweise wie folgt interpretieren: Die Gleichung $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ beschreibt eine Hyperbel; in den y -Koordinaten ist sie durch die einfachere Gleichung $3y_1^2 - y_2^2 = 1$ gegeben.

Eine symmetrische Matrix A heißt positiv definit, wenn $Q_A(x) = \underline{x}^T A \underline{x} > 0$ für alle Vektoren $\underline{x} \neq \underline{0}$ gilt; sie heißt negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist. A heißt indefinit, wenn Q_A sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Die Matrix A in Beispiel (2.2.6) ist indefinit.

Satz 2.2.8. Für eine symmetrische Matrix A sind äquivalent:

- (i) A ist positiv definit.
- (ii) Die Eigenwerte von A sind alle > 0 .
- (iii) Die zu A gehörige quadratische Form Q_A besitzt ein striktes Minimum im Nullpunkt.

Ein Beweis folgt mit einer Anwendung von Satz 2.2.5.

Beispiel 2.2.9. Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ist positiv definit, denn ihre Eigenwerte sind $\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17}) > 0$. Folglich gilt

$$Q_A(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 > 0 \quad \text{wenn } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Die grundlegenden Beispiele nichtdiagonalisierbarer Matrizen sind $n \times n$ -Jordankästchen, $n > 1$:

$$J = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^n$. Somit ist $\lambda = a$ der einzige Eigenwert. Der zugehörige Eigenraum ist eindimensional, er wird von \underline{e}_1 aufgespannt. Man sagt, dass der Eigenwert die algebraische Vielfachheit n und die geometrische Vielfachheit 1 hat.

Satz 2.2.10 (Jordan'sche Normalform). *Jede quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer Matrix $B = T^{-1}AT$, welche eine Blockdiagonalgestalt hat; alle Diagonalblöcke sind Jordankästchen und die Nichtdiagonalblöcke sind Null.*

Die Jordan'sche Normalform wird berechnet, indem man Hauptvektorketten bestimmt. Hier auf soll hier nicht näher eingegangen werden.

2.3 Berechnung von Eigenvektoren

Nur für Matrizen niedriger Dimension oder einfacher Bauart ist eine Berechnung von Eigenwerten über das charakteristische Polynom sinnvoll. In praktischen Anwendungen benutzt man entsprechende Software wie Maple, Matlab, Octave o.Ä. In Matlab oder Octave berechnet der Befehl `eig(A)` die Eigenwerte der vorher definierten Matrix A . Der zugrundeliegende Algorithmus führt eine sogenannte Schur-Zerlegung durch, die eine (Fast-)Diagonalisierung $S^T A S = D$ liefert, wenn A symmetrisch ist. Hier ist ein Aufrufbeispiel in Matlab (oder Octave):

```
matlab> A=[4 2; 2 1];
matlab> [S, D] = schur(A)
S =
    0.89443   -0.44721
    0.44721    0.89443
D =
    5     0
    0     0
```

Die Dimension n eines Eigenwertproblems $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kann in der Praxis sehr groß sein. Beispiele für Eigenwertprobleme mit sehr großen Matrizen tauchen in folgenden Zusammenhängen auf:

- (i) Die Eigenschwingungen eines Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$, der an seinem Rand eingespannt ist, werden durch die Lösungen des folgenden Differentialgleichungsproblems gegeben:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda^2 u = 0 \quad \text{in } B,$$

$$u = 0 \quad \text{auf dem Rand von } B.$$

Eine numerische Berechnung auf Basis der Methode der Finiten Elemente führt auf ein Eigenwertproblem mit einer hochdimensionalen Koeffizientenmatrix.

- (ii) Die Suchmaschine Google löst zwecks Bewertung der Relevanz von Webseiten für Suchfragen ein Eigenwertproblem mit einer $n \times n$ Matrix, der sogenannten Google-Matrix, wobei n die Anzahl aller Webseiten im Internet ist. Der Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert enthält die für die Bewertung benötigten Informationen.

3 Lineare Differentialgleichungssysteme

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man in gleichwertige Differentialgleichungssysteme erster Ordnung überführen, z.B.:

$$u'' = g(t, u, u') \iff \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ g(t, y_1, y_2) \end{bmatrix},$$

wobei $y_1 = u, y_2 = u'$. In Vektornotation schreibt man ein Differentialgleichungssystem kurz so: $\underline{y}' = f(t, \underline{y})$. Ist f linear in der Vektorvariablen \underline{y} , dann spricht man von einem (homogenen) linearen System. Wir befassen uns nur mit linearen Systemen. Für diese gibt es eine umfangreiche Lösungstheorie. Zur (näherungsweise) Lösung allgemeiner, auch nichtlinearer, Systeme muss man meist auf numerische Verfahren (Runge-Kutta u.A.) zurückgreifen.

3.1 Fundamentalmatrizen

Ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung hat die Gestalt

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t). \tag{I}$$

Hier sind $A(t) = (a_{ik}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\underline{b}(t) = [b_1(t), \dots, b_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ definiert für alle t aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Funktionen $a_{ik}(t)$ und $b_j(t)$ sollen mindestens stetig sein. Eine Lösung für (I) ist eine differenzierbare Vektorfunktion $\underline{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$, welche für alle $t \in I$ das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Man nennt (I) ein inhomogenes System, wenn die Störfunktion $\underline{b}(t)$ nicht Null ist, d.h. wenn $\underline{b}(t) \neq \underline{0}$ für mindestens ein $t \in I$ gilt. Das zu (I) gehörige homogene System lautet

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y}. \tag{H}$$

Satz 3.1.1. *Zwischen den Lösungen eines inhomogenen Systems (I) und denen des zugehörigen homogenen Systems (H) besteht folgender Zusammenhang:*

- (i) Die Differenz zweier Lösungen von (I) ist eine Lösung von (H).
- (ii) Addiert man zu einer Lösung von (I) eine Lösung von (H), dann erhält man wieder eine Lösung von (I).
- (iii) Die Lösungsmenge von (H) bildet einen Vektorraum.

Wir überzeugen uns nur davon, dass (i) gilt: Seien $\underline{y}_1(t)$ und $\underline{y}_2(t)$ Lösungen von (I) und setze $\underline{z}(t) = \underline{y}_1(t) - \underline{y}_2(t)$. Dann gilt

$$\underline{z}'(t) = \underline{y}_1'(t) - \underline{y}_2'(t) = (A(t)\underline{y}_1(t) + \underline{b}(t)) - (A(t)\underline{y}_2(t) + \underline{b}(t)) = A(t)\underline{z}(t).$$

Also erfüllt $\underline{z}(t)$ das homogene System (H).

Im Falle $n = 1$ hat man die Differentialgleichung $y' = a(t)y + b(t)$. Diese kann bekanntlich mit zwei Integrationen gelöst werden:

$$y(t) = Ce^{\alpha(t)} + e^{\alpha(t)} \int e^{-\alpha(t)} b(t) dt, \quad \alpha(t) = \int a(t) dt.$$

Liegt ein $n \times n$ -System vor, dessen Koeffizientenmatrix $A(t)$ eine Dreiecksgestalt hat, dann kann dieses durch sukzessives Lösen von n skalaren linearen Differentialgleichungen gelöst werden.

Beispiel 3.1.2. Betrachte für $t > 0$ das 2×2 -System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2, \\ y_2' &= \frac{1}{t} y_2, \end{aligned} \quad \text{dies ist (H) mit } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}.$$

In der zweiten Gleichung tritt y_1 nicht auf, die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist $y_2(t) = c_2 t$. Einsetzen in die erste Gleichung reduziert diese auf $y_1' = y_1 + c_2 t$. Sie hat die spezielle Lösung $y_1(t) = -c_2(t+1)$ und die allgemeine Lösung $y_1(t) = -c_2(t+1) + c_1 e^t$. Damit haben wir alle Lösungen des obigen Systems gefunden:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -t-1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & -t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

für beliebige Zahlen c_1, c_2 . Die Lösungsgesamtheit können wir kürzer auch so angeben:

$$\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} e^t & -t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix}.$$

Es gilt $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in I$, denn die Spalten von $Y(t)$ sind Lösungen von (H).

Eine differenzierbare Funktion $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt Lösungsmatrix für das homogene $n \times n$ -System (H), wenn $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in I$ gilt, wenn also die m Spalten von $Y(t)$ Lösungen für (H) sind. Eine Lösungsmatrix $Y(t)$, die invertierbar für alle t ist, nennt man eine Fundamentalmatrix; insbesondere ist dann $m = n$. Im obigen Beispiel haben wir eine Fundamentalmatrix konstruiert.

Satz 3.1.3. Sei $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Fundamentalmatrix für ein vorgelegtes homogenes lineares Differentialgleichungssystem (H). Dann sind alle Lösungen dieses Systems von der Form

$$\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Dass durch (11) Lösungen für (H) gegeben sind ist klar, da $Y(t)$ eine Lösungsmatrix ist. Dass man so alle Lösungen erhält, ist nicht so einfach einzusehen. Für eine Begründung benötigt man folgenden Eindeutigkeitssatz: Sind $\underline{y}(t)$ und $\underline{z}(t)$ zwei Lösungen von (H) (mit gleichen Koeffizientenmatrizen A), die an mindestens einer Stelle $t_0 \in I$ gleich sind, dann sind sie für alle $t \in I$ gleich. Hat man nun irgendeine Lösung $\underline{z}(t)$ von (H), dann fixiert man ein $t_0 \in I$ und setzt

$$\underline{c} = Y(t_0)^{-1} \underline{y}(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

23.Nov.

Dann ist $\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}$ eine Lösung von (H) mit $\underline{z}(t_0) = \underline{y}(t_0)$. Also $\underline{z}(t) = \underline{y}(t)$ für alle $t \in I$ nach dem Eindeutigkeitsatz.

Oft interessiert man sich nicht für die allgemeine Lösung eines Differentialgleichungssystems, sondern für eine spezielle Lösung, die vorgegebene Anfangsbedingungen erfüllt, z.B.

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y}, \quad \underline{y}(t_0) = \underline{z}. \quad (12)$$

Liegt eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ vor, dann löst man dieses Anfangswertproblem durch $\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}$, wobei der Vektor \underline{c} aus der Gleichung $Y(t_0)\underline{c} = \underline{z}$ bestimmt wird. Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Koeffizientenmatrix. Die Lösung des obigen Anfangswertproblems (12) ist daher

$$\underline{y}(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}\underline{z}.$$

Es gibt keine weitere Lösung. Diese Eindeigkeitseigenschaft erwartet man aus Gründen der Kausalität, falls die Differentialgleichungen Bewegungsgleichungen der Mechanik sind.

Beispiel 3.1.4. Für das homogene 2×2 -System (H) auf dem Intervall $I =]0, \infty[$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -t^2 & \frac{2t^2+1}{t} \end{bmatrix}$$

ist, wie man durch Nachrechnen bestätigt, die Matrix

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix}$$

eine Lösungsmatrix. Ihre Determinante ist $\det Y(t) = t^2 + 1 \neq 0$. Folglich ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix für das gegebene homogene Differentialgleichungssystem. Wir suchen nun eine Lösung von $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, die die Anfangsbedingung $\underline{y}(1) = [1, 3]^T$ erfüllt. Wir rechnen:

$$Y(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des gestellten Anfangswertproblems ist somit:

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1}{t} \\ 2t + t^2 \end{bmatrix}.$$

Ist $Y(t)$ eine $n \times n$ Lösungsmatrix für (H), dann nennt man die Determinante $W(t) = \det Y(t)$ die Wronski-Determinante der Lösungsmatrix. Man leitet folgende skalare Differentialgleichung hierfür her:

$$W' = a(t)W, \quad \text{wobei } a(t) = \text{Spur } A(t).$$

Die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, welche Nullstellen besitzt, ist die Nullfunktion. Da wir $Y(t)$ genau dann eine Fundamentalmatrix nennen, wenn $W(t) \neq 0$ gilt für alle t , folgt aus diesen Überlegungen die erste Aussage des nachfolgenden Satzes.

Satz 3.1.5. Sei ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem (H) vorgelegt. Dann gelten für dieses:

- (i) Eine Lösungsmatrix $Y(t)$ ist eine Fundamentalmatrix, wenn sie für ein t — und daher für alle t — invertierbar ist.
- (ii) Es gibt eine Fundamentalmatrix.

Der der Existenzaussage zugrundeliegende Beweis ist i.A. nicht dazu geeignet, eine explizite Fundamentalmatrix zu finden. Das systematische Auffinden von Fundamentalmatrizen ist im Falle variabler Koeffizienten $a_{ik}(t)$ nur in Spezialfällen möglich. Sind die Koeffizienten dagegen konstant, kann man mit den Methoden der Linearen Algebra effektiv Fundamentalmatrizen bestimmen. Dies ist das Thema des nächsten Abschnittes.

3.2 Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun homogene lineare Differentialgleichungssysteme (H), deren Koeffizientenmatrix konstant ist, d.h. die Matrixelemente hängen nicht von t ab:

$$\underline{y}' = A\underline{y} \tag{13}$$

mit $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Im Fall $n = 1$ liegt eine skalare Gleichung $y' = ay$ vor. Jede Lösung ist eine Vielfaches von $y(t) = e^{at}$. Für (13) probieren wir den e -Ansatz $\underline{y}(t) = e^{\lambda t} \underline{v}$ mit einer Zahl λ und einem konstanten Vektor $\underline{v} \neq \underline{0}$. Wir differenzieren: $\underline{y}'(t) = \lambda \underline{y}(t)$. Die Rechnung

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) \iff \lambda \underline{y}(t) = A\underline{y}(t) \iff \lambda \underline{v} = A\underline{v}$$

zeigt, dass der Ansatz genau dann eine Lösung liefert, wenn \underline{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Liegen Eigenvektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^n$ vor, dann ist

$$Y(t) = [e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1, \dots, e^{\lambda_m t} \underline{v}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

eine Lösungsmatrix.

Satz 3.2.1. Die Matrix A besitze eine Basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren. Die zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$Y(t) = [e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \underline{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{14}$$

eine Fundamentalmatrix für (13).

Nach Satz 2.2.2 ist die Voraussetzung mit der Diagonalisierbarkeit der Matrix A (über den reellen Zahlen) gleichwertig.

Beispiel 3.2.2. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

besitzt die Fundamentalmatrix

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte 3 und -1 und die zugehörigen Eigenvektoren wurden im Beispiel 2.2.6 berechnet.

Beispiel 3.2.3. Das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

soll gelöst werden. Im Beispiel 2.2.3(i) wurden die Eigenwerte und -vektoren der Koeffizientenmatrix bestimmt. Wir leiten daraus die folgende Fundamentalmatrix her:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & -e^{-t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Lösung ist

$$\underline{y}(t) = Y(t)Y(0)^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = Y(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + 3e^{2t} \\ 2e^{-t} + 3e^{2t} \\ e^t - 2e^{-t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Der e -Ansatz zum Lösen von (13) funktioniert auch bei komplexen Eigenwerten:

30.Nov.

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \underline{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Zunächst erhält man komplexwertige Lösungen $e^{\lambda t}\underline{v} \in \mathbb{C}^n$. Da A reell ist, sind der Real- und der Imaginärteil hiervon reellwertige Lösungen für (13).

Beispiel 3.2.4. Die Eigenwerte und -vektoren der Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

wurden im Beispiel 2.2.3(ii) bestimmt. Wir erhalten die komplexwertigen Lösungen

$$\underline{z}_1(t) = e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{z}_2(t) = e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

und folglich die reellwertigen Lösungen

$$\operatorname{Im} \underline{z}_1(t) = \operatorname{Re} \underline{z}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Re} \underline{z}_1(t) = \operatorname{Im} \underline{z}_2(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Die Lösungsmatrix

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ist eine (reelle) Fundamentalmatrix, denn ihre Wronski-Determinante ist $W(t) = \det Y(t) = 1 \neq 0$.

Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Dann hat das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten. Hieraus folgt: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , dann auch die dazu konjugiertkomplexe Zahl $\bar{\lambda}$. Man kann dies auch so einsehen:

$$Av = \lambda v \iff A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Dies führt dazu, wie im obigen Beispiel erkennbar, dass man sich bei nichtreellen Eigenwerten λ auf den Fall $\text{Im } \lambda > 0$ beschränken kann, wenn man durch Real- und Imaginärteilbildung reelle Lösungen bildet.

Dies führt zu folgendem Vorgehen zur Konstruktion der Spalten einer Fundamentalmatrix $Y(t)$:

1. Bestimme die Eigenwerte λ mit $\text{Im } \lambda \geq 0$.
2. Bestimme zugehörige Eigenvektoren v .
3. Füge $\text{Re } e^{\lambda t}v$ und falls $\text{Im } \lambda > 0$ auch $\text{Im } e^{\lambda t}v$ als Spalten in $Y(t)$ ein.

Dieses Verfahren führt dann zum Ziel, wenn A diagonalisierbar ist.

Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnliche Matrizen, so haben die zugehörigen Differentialgleichungssysteme ähnliches Lösungsverhalten. Es gelte $T^{-1}AT = B$ und damit $AT = TB$ für eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: Ist $\underline{z}(t)$ eine Lösung für $\underline{z}' = B\underline{z}$, dann ist $\underline{y}(t) = T\underline{z}(t)$ eine Lösung für $\underline{y}' = A\underline{y}$ und umgekehrt. Dies liest man aus folgender Rechenzeile heraus:

$$\underline{y}'(t) = \frac{d}{dt}T\underline{z}(t) = T\underline{z}'(t) = TB\underline{z}(t) = AT\underline{z}(t) = A\underline{y}(t).$$

Wir notieren eine unmittelbare Folgerung:

Satz 3.2.5. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnliche Matrizen: $T^{-1}AT = B$. Sei $Z(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\underline{z}' = B\underline{z}$. Dann ist $Y(t) := TZ(t)T^{-1}$ eine Fundamentalmatrix für $\underline{y}' = A\underline{y}$.

Ist $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix, dann ist

$$Z(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

eine zu $\underline{z}' = B\underline{z}$ gehörige Fundamentalmatrix. Mit dieser Beobachtung und dem vorangehenden Satz kann man auch die Fundamentalmatrizen in den Beispielen 3.2.2 und 3.2.3 angeben, denn die Koeffizientenmatrizen A sind in diesen Beispielen (über den reellen Zahlen) diagonalisierbar. Unter Verwendung des Satzes 2.2.10 von der Jordan'schen Normalform und des Satzes 3.2.5 erhält man ein Verfahren zur Konstruktion von Fundamentalmatrizen für beliebige homogene lineare Differentialgleichungssysteme (13) mit konstanten Koeffizienten. Auf diesen Aspekt wird hier nicht näher eingegangen.

3.3 Methode der Variation der Konstanten

Kennt man eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems (H), dann kann man die allgemeine Lösung zugehöriger inhomogener Systeme (I) finden. Wir wissen, dass durch $\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}$, wobei \underline{c} alle (konstanten) Vektoren durchläuft, die allgemeine Lösung von (H) $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ gegeben wird. Eine Lösung für

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t) \tag{I}$$

wir gefunden durch folgenden Ansatz $\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}(t)$, wobei die Vektorfunktion $\underline{c}(t)$ (die “varierte Konstante”) geeignet zu bestimmen ist. Folgende Rechnung zeigt, wie $\underline{c}(t)$ zu wählen ist:

$$\begin{aligned}\underline{y}'(t) &= Y'(t)\underline{c}(t) + Y(t)\underline{c}'(t) \\ &= A(t)Y(t)\underline{c}(t) + Y(t)\underline{c}'(t) \\ &= A(t)\underline{y}(t) + Y(t)\underline{c}'(t).\end{aligned}$$

Das Differentialgleichungssystem (I) ist dann erfüllt, wenn

$$Y(t)\underline{c}'(t) = \underline{b}(t).$$

Stellt man dies nach $\underline{c}'(t)$ um und integriert, dann erhält man die Lösung

$$\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c}(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1}\underline{b}(t) dt. \quad (15)$$

Berücksichtigt man die Integrationskonstanten, dann erhält man hierdurch die allgemeine Lösung.

Satz 3.3.1. *Vorgelegt sei ein inhomogenes System (I). Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems (H), dann ist die allgemeine Lösung von (I) wie folgt gegeben:*

$$\underline{y}(t) = Y(t)\underline{c} + Y(t) \int Y(t)^{-1}\underline{b}(t) dt \quad (\forall \underline{c} \in \mathbb{R}^n). \quad (16)$$

Beispiel 3.3.2. Gesucht ist die Lösung des folgenden skalaren Anfangswertproblems:

$$y' = 2ty + t^3, \quad y(0) = 1.$$

Hier ist $Y(t) = e^{t^2}$ eine (1×1) -Fundamentalmatrix. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$y(t) = e^{t^2} \int e^{-t^2} t^3 dt = \dots = -\frac{1}{2}(t^2 + 1) + ce^{t^2}.$$

Die gesuchte Lösung lautet daher:

$$y(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 1) + \frac{3}{2}e^{t^2}.$$

Beispiel 3.3.3. Auf dem Intervall $I =]0, \infty[$ soll das folgende inhomogene Differentialgleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -t^2 & \frac{2t^2+1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In Beispiel 3.1.4 wurde folgende Fundamentalmatrix für das zugehörige homogene System gefunden:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix}, \quad Y(t)^{-1} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten gewinnen wir für $t > 0$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}\underline{c}(t) &= \int Y(t)^{-1} \underline{b}(t) dt = \int \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \int \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \ln t \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{y}(t) &= Y(t) \underline{c}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Nach Addition der allgemeinen Lösung des homogenen Systems ergibt sich die allgemeine Lösung des vorgelegten inhomogenen Differentialgleichungssystems:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Ist nicht die allgemeine Lösung, sondern eine spezielle Lösung gesucht, dann sind die Konstanten entsprechend zu bestimmen. Beispielsweise führen die Anfangsbedingungen $y_1(1) = 2$ und $y_2(1) = 0$ auf $c_1 = -c_2 = 1$.

Zusammenfassend kann man das Vorgehen der Methode der Variation der Konstanten zum Auffinden der allgemeinen Lösung von (I) so darstellen:

1. Bestimme eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ für das zugehörige homogene System (H).
2. Berechne $\underline{k}(t) = \int Y(t)^{-1} \underline{b}(t) dt$.
3. Dann ist $\underline{y}(t) = Y(t)(\underline{k}(t) + \underline{c})$ die allgemeine Lösung, wobei $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

Für eine elastisch aufgehängte Masse m gilt für die Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage die Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t). \quad (17)$$

Hier sind $r > 0$ der Reibungskoeffizient, $k > 0$ die Federkonstante und $f(t)$ die äußere Kraft. Diese skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist gleichwertig mit folgendem inhomogenen linearen 2×2 -Differentialgleichungssystem erster Ordnung für $y_1(t) = x(t)$ und $y_2'(t) = \dot{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} f(t) \end{bmatrix}.$$

Hier bezeichnen $\delta = r/2m$ die Dämpfung und $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ die Kreisfrequenz einer ungestörten, ungedämpften Schwingung. Die Eigenwerte (=Nullstellen des charakteristischen Polynoms) der Koeffizientenmatrix sind

$$\lambda_{\pm} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Man unterscheidet 3 Fälle:

1. Dämpfungsfall $\delta^2 > \omega_0^2$; hier liegen zwei verschiedene reelle Eigenwerte vor, genauer: $\lambda_- < -\delta < \lambda_+ < 0$.
2. Grenzfall $\delta^2 = \omega_0^2$; hier liegt ein doppelter reeller Eigenwert vor: $\lambda_{\pm} = -\delta < 0$.

3. Schwingfall $\delta^2 < \omega_0^2$; hier liegen komplexe Eigenwerte vor: $\lambda_{\pm} = -\delta \pm i\omega_1$ mit Kreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0$. Man findet die Eigenvektoren $\underline{v}_{\pm} = [1, -\delta \pm i\omega_1]^T$ und so eine Fundamentalmatrix

$$Y(t) = e^{-\delta t} \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) \\ -\delta \cos(\omega_1 t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t) & -\delta \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t) \end{bmatrix}.$$

Die erste Komponente von $Y(t)\underline{c}$ ist die allgemeine Lösung der skalaren homogenen Schwingungsgleichung:

$$x(t) = y_1(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)).$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten erhält man eine Integralformel für die Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die im nächsten Abschnitt zu behandelnde Laplace-Transformation ist eine meist einfacher zu handhabende Alternative zur Methode der Variation der Konstanten, wenn die Koeffizientenmatrix A konstant ist.

3.4 Laplace-Transformation

Mit der Laplace-Transformation kann man Anfangswertprobleme systematisch lösen. Solche Probleme sind 7.Dez.

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1,$$

oder auch $n \times n$ -Systeme

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t), \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0.$$

Man beachte, dass die Koeffizienten a_j bzw. $A = (a_{ik})$ konstant sind.

Die Laplace-Transformation ordnet einer Funktion $f(t)$ eine Funktion $F(s)$ zu:

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{18}$$

für $s > \gamma$. Nur für $t \geq 0$ gehen die Werte $f(t)$ in das Laplaceintegral ein. Wir setzen immer voraus, dass $f(t) = 0$ gilt, wenn $t < 0$ ist. Die Laplace-Transformation ist sicher dann definiert, wenn folgendes erfüllt ist: $f(t)$ ist stückweise stetig und

$$|f(t)| \leq \text{Konst.} \cdot e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann existiert das uneigentliche Integral (18) sogar für alle komplexen Zahlen $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } s > \gamma$. Man nennt γ eine Wachstumsordnung von $f(t)$. Es ist oft günstig, auch die Laplace-Transformierte komplexwertiger Funktionen zu betrachten.

Wir verwenden auch folgende Schreibweisen für die Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) \quad \text{und} \quad \widehat{f}(s) = F(s).$$

Man nennt $f(t)$ die Originalfunktion und $F(s)$ die Bildfunktion der Laplace-Transformation \mathcal{L} . Die Variable s ist von t nicht nur mathematisch völlig verschieden, sondern auch physikalisch, z.B. kann mit t die Zeit und s die Frequenz gemeint sein.

Beispiele 3.4.1. Wir berechnen einige Laplaceintegrale direkt.

- (i) Man nennt die Sprungfunktion, die gleich 1 für $t > 0$ und gleich 0 für $t \leq 0$ ist, die Heaviside-Funktion. Ihre Laplace-Transformierte ist $\mathcal{L}[1](s) = 1/s$, denn

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} -s^{-1} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=T} = \lim_{T \rightarrow \infty} (s^{-1} - s^{-1} e^{-sT}) = s^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) Für $a \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$

- (iii) Die Laplace-Transformierte von $\cos(\omega t)$ zu gegebener Kreisfrequenz $\omega \in \mathbb{R}$ berechnen wir wie folgt.

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \\ F(s) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](s)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right).\end{aligned}$$

Es folgt $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ und ähnlich $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

- (iv) Die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/2), & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{für } 1 \leq t, \end{cases}$$

ist stetig. Wir berechnen ihre Laplace-Transformierte. Dazu verwenden wir die Stammfunktionen $\int e^{-st} \, dt = -s^{-1} e^{-st}$ und

$$\int e^{-st} \sin(at) \, dt = -\frac{1}{s^2 + a^2} e^{-st} (s \sin(at) + a \cos(at)).$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_0^1 e^{-st} \sin(\pi t/2) \, dt + \int_1^{\infty} e^{-st} \, dt \\ &= -\frac{4}{\pi^2 + 4s^2} (s e^{-s} - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{s} e^{-s}.\end{aligned}$$

Ein Laplace-Transformationspaar $(f(t), F(s))$ nennt man eine Korrespondenz. In Formelsammlungen findet man Korrespondenztabellen:

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$n! s^{-n-1}$
e^{at}	$(s-a)^{-1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
...	...

Zwei Funktionen können nur dann dieselbe Laplace-Transformierte besitzen, wenn sie gleich sind:

Satz 3.4.2 (Eindeutigkeitsatz).

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s) \implies f(t) = g(t)$$

Anders ausgedrückt: Zu einer Bildfunktion gibt nur eine Originalfunktion, deren Laplace-Transformierte die gegebene Bildfunktion ist. Diese Tatsache ist grundlegend für die Möglichkeit, die Laplace-Transformation umzukehren.

Beispiel 3.4.3. Gesucht ist die Funktion $f(t)$ mit

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Mit einer Partialbruchzerlegung und mit bereits bekannten Korrespondenzen erhält man:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s) = \mathcal{L}[1 - e^{-t}](s).$$

Es folgt: $f(t) = 1 - e^{-t}$.

Im Beispiel wurde die Linearität der Laplace-Transformation benutzt:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s)$$

Für die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Lösung von Differentialgleichungen ist der folgende Satz grundlegend.

Satz 3.4.4 (Laplace-Transformation und Ableitung). *Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ gilt*

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s \cdot \mathcal{L}[f(t)](s) - f(0). \quad (19)$$

Mit einer partiellen Integration folgt für $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (-s) e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sT} f(T) - f(0) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Für $T \rightarrow \infty$ (und $\operatorname{Re} s$ hinreichend groß) folgt die Formel (19).

Beispiel 3.4.5. Das folgende Anfangswertproblem soll gelöst werden:

$$y' - 2y = \sin t, \quad y(0) = 3.$$

Wir wenden die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten

$$s\hat{y}(s) - 3 - 2\hat{y}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Nach Umstellung haben wir eine Formel für die Laplace-Transformierte der gesuchten Funktion $y(t)$:

$$\widehat{y}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s^2+1)}.$$

Um hieraus $y(t)$ zu gewinnen, vereinfachen wir den letzten Summanden mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \dots = \frac{1}{5(s-2)} - \frac{s+2}{5(s^2+1)}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \widehat{y}(s) &= \frac{16}{5} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{16}{5} \mathcal{L}[e^{2t}](s) - \frac{1}{5} \mathcal{L}[\cos t](s) - \frac{2}{5} \mathcal{L}[\sin t](s). \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems lautet daher:

$$y(t) = \frac{16}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t.$$

Für die Berechnung der Laplace-Transformation \mathcal{L} und ihrer Umkehrabbildung \mathcal{L}^{-1} sind folgende Rechenregeln oft nützlich:

(a) **Ähnlichkeitssatz:** $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)](s/a)$, wenn $a > 0$. Beispiel:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[e^t](s/a) = \frac{1}{a} \frac{1}{(s/a) - 1} = \frac{1}{s-a}$$

(b) **Dämpfungssatz:** $\mathcal{L}[e^{-\delta t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s + \delta)$. Beispiel:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \mathcal{L}[1](s-a) = \frac{1}{s-a}$$

(c) **Verschiebungssatz:** $\mathcal{L}[f(t-T)](s) = e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)](s)$, wenn $T \geq 0$. Beispiel:

$$\mathcal{L}[\max(0, t-1)](s) = e^{-s} \mathcal{L}[t](s) = e^{-s} s^{-2}$$

(d) $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s)$. Beispiel:

$$\mathcal{L}[t^{n+1}](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t^n](s) = -\frac{d}{ds} n! s^{-(n+1)} = (n+1)! s^{-(n+2)}$$

Aus dem Satz 19 über die Laplace-Transformierte einer ersten Ableitung folgen Formeln für die Laplace-Transformierte höherer Ableitungen: 14.Dez.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)](s) &= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf'(0) - f''(0), \\ \mathcal{L}[f'''(t)](s) &= s^3\mathcal{L}[f(t)](s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0), \\ &\vdots \\ \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Mit der Laplace-Transformation transformiert man eine Differentialgleichung für $y(t)$ in eine algebraische Gleichung für die Laplace-Transformierte $\hat{y}(s)$. Diese Gleichung löst man nach $\hat{y}(s)$ auf und wendet die Umkehrung der Laplace-Transformation an. Im letzten Schritt wird oft eine Partialbruchzerlegung durchgeführt. Wir illustrieren diese Methode anhand von Beispielen.

Beispiel 3.4.6. Wir lösen das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 6y' + 5y = -1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$$

Die Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt nach Einsetzen der Anfangswerte:

$$s^2\hat{y}(s) - 2s + 3 + 6(s\hat{y}(s) - 2) + 5\hat{y}(s) = \mathcal{L}[-1](s) = -\frac{1}{s}$$

Wir stellen nach $\hat{y}(s)$ um und beachten die Linearfaktorzerlegung $s^2 + 6s + 5 = (s + 1)(s + 5)$:

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \frac{1}{s^2 + 6s + 5} \left(2s + 9 - \frac{1}{s} \right) = \frac{2s^2 + 9s - 1}{s(s + 1)(s + 5)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 5}\end{aligned}$$

Die letzte Zeile in ein Ansatz zur Partialbruchzerlegung. Dieser führt auf folgende Formel für die Laplace-Transformierte der gesuchten Lösung:

$$\hat{y}(s) = -\frac{1}{5s} + 2\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{5(s + 5)}$$

Die Rücktransformation $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{y}(s)](t)$ führen wir mit Hilfe der bereits bekannten Korrespondenztabelle aus und erhalten die gesuchte Lösung des Differentialgleichungsproblems:

$$y(t) = -\frac{1}{5} + 2e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-5t}$$

Die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation ist nicht auf skalare Differentialgleichungen beschränkt. Mit ihr können auch Differentialgleichungssysteme $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$ gelöst werden, vorausgesetzt die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist konstant.

Beispiel 3.4.7. Das folgende homogene 2×2 -Anfangswertproblem soll gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Laplace-Transformierte dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{bmatrix} s\hat{y}_1(s) \\ s\hat{y}_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix}.$$

Dies ist ein System von 2 Gleichungen in 2 Unbekannten, welches für jedes s zu lösen ist:

$$\begin{bmatrix} s+1 & 6 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Auflösen dieser Gleichungen und anschließende Partialbruchzerlegung liefert:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(s) &= \frac{s+5}{(s-1)(s+7)} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+7} \right), \\ \hat{y}_2(s) &= \frac{-2}{(s-1)(s+7)} = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+7} \right). \end{aligned}$$

Daraus liest man die Lösung des Anfangswertproblems ab:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-7t}, \\ y_2(t) &= -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-7t}. \end{aligned}$$

Anfangswertprobleme für die Schwingungsgleichung (17) werden ebenfalls mit der Laplace-Transformation gelöst:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1.$$

wird transformiert in

$$(ms^2 + rs + k)\hat{x}(s) - m(x_0s + x_1) - rx_0 = \mathcal{L}[f(t)](s)$$

oder nach Umstellung

$$\hat{x}(s) = \frac{mx_0s + (mx_1 + rx_0) + \mathcal{L}[f(t)](s)}{ms^2 + rs + k}. \quad (20)$$

Beispiel 3.4.8. Ein ungedämpfter Schwingkreis mit periodischer äußerer Anregung:

$$\ddot{x} + x = \sin(2t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1.$$

Nach (20) gilt

$$\hat{x}(s) = \frac{x_0s + x_1 + \mathcal{L}[\sin(2t)](s)}{s^2 + 1} = \frac{x_0s + x_1}{s^2 + 1} + \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Mit einer Partialbruchzerlegung des letzten Summanden folgt

$$\hat{x}(s) = x_0 \frac{s}{s^2 + 1} + x_1 \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)}$$

und weiter:

$$x(t) = x_0 \cos t + \left(x_1 + \frac{2}{3}\right) \sin t - \frac{1}{3} \sin(2t).$$

In den obigen Beispielen wurde Partialbruchzerlegungen benutzt, um die Laplace-Transformierte $F(s)$ der gesuchten Funktion $f(t)$ zu vereinfachen, damit anschließend $f(t)$ mit Hilfe bekannter Korrespondenzen ermittelt werden kann. Diese Methode ist nicht universell anwendbar. Es gibt jedoch eine allgemeine Inversionsformel für die Laplace-Transformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } s=\gamma} e^{st} F(s) ds.$$

Hier muss $F(s)$ für geeignetes komplexes Argument $s \in \mathbb{C}$ bekannt sein. Für eine erfolgreiche Anwendung dieser Formel benötigt man den Residuenkalkül, welcher ein Teilgebiet der (komplexen) Funktionentheorie ist. Hierauf kann hier nicht näher eingegangen werden.

4 Vektoranalysis

Wir betrachten Integrale über Kurven und Flächen.

4.Jan.

4.1 Kurven

Wie stellt man Kurven dar?

Beispiel 4.1.1. Die Kreislinie mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ kann über die Kreisgleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = R^2$$

angegeben werden. Diese legt fest, welche Koordinaten ein Punkt $P = (x, y)$ der Kreislinie haben kann. Eine andere Möglichkeit ist, die Punkte der Kreislinie zu parametrisieren, z.B. durch

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m + R \cos t \\ y_m + R \sin t \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Die Wahl einer Parametrisierung ist nicht eindeutig bestimmt. Beispielsweise wird dieselbe Kreislinie mit der Parametrisierung

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m + R \cos(2t) \\ y_m + R \sin(2t) \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi$$

mit „doppelter Geschwindigkeit“ durchlaufen.

Wir werden Parameterdarstellungen für Kurven verwenden, da damit die Berechnung der Kurvenlänge und anderer geometrischer Größen leichter zugänglich ist, als wenn man von der Darstellung durch eine Gleichung ausgeht. Außerdem versteht eine Parameterdarstellung die Kurve mit einem Durchlaufssinn. Letzterer wird benötigt, wenn Vektorfelder längs einer gegebenen Kurve zu integrieren sind (Arbeitsintegrale).

Eine Kurve C in der xy -Ebene liegt in Parameterdarstellung vor, wenn sie als Bildmenge einer stetig differenzierbaren Abbildung $\underline{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist:

$$C : \quad \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

Man nennt $\underline{r}(t)$ den Kurvenpunkt beim Kurvenparameter t ; das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Parameterintervall. Völlig entsprechend definiert man Kurven im xyz -Raum und allgemein Kurven im \mathbb{R}^n in Parameterdarstellung:

$$C : \quad \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{für } a \leq t \leq b \quad (21)$$

Beispiele 4.1.2. Einige Kurven in der Ebene und im Raum:

(i) Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ auf $[a, b]$ wird wie folgt als Kurve betrachtet:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

(ii) Die Neill'sche Parabel

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

hat im Nullpunkt eine Spitze.

(iii) Die Schraubenlinie

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

ist eine Raumkurve. Sie liegt auf einem Zylindermantel.

Es liege eine Kurve C wie in (21) vor. Die Ableitung nach dem Parameter t ist der Vektor

$$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \underline{r}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)).$$

(Ein Punkt bezeichnet die Ableitung nach dem Kurvenparameter.) Die Ableitung hat eine wichtige geometrische Bedeutung: Ist $\dot{\underline{r}}(t)$ nicht Null, dann gibt dieser Vektor die Tangentenrichtung an; man nennt $\dot{\underline{r}}(t) \neq \underline{0}$ den Tangentenvektor an die Kurve C beim Kurvenpunkt $\underline{r}(t)$.

Im Falle einer ebenen Kurve ist $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ die Steigung im betreffenden Kurvenpunkt, wenn $\dot{x}(t) \neq 0$. Ist $\dot{x}(t) = 0$ (und $\dot{y}(t) \neq 0$), dann ist die Kurventangente senkrecht, d.h. parallel zur y -Achse.

Die Neill'sche Parabel hat in $[8, 4]^T = \underline{r}(2)$ den Tangentenvektor $[12, 4]^T = \dot{\underline{r}}(2)$. Die Tangentensteigung ist hier $= 4/12 = 1/3$. Im Kurvenpunkt $\underline{0} = \underline{r}(0)$ existiert keine Tangente, denn $\dot{\underline{r}}(0)$ ist der Nullvektor; dies korrespondiert mit der Tatsache, dass die Kurve in diesem Punkt nicht glatt ist.

Wir setzen in der Regel voraus, dass die Kurven regulär sind, d.h., es gilt $\dot{\underline{r}}(t) \neq \underline{0}$ für alle Parameter t . Dann treten keine Knickstellen in der Kurve auf.

Im Falle einer Bahnkurve in der Mechanik stellt $\underline{r}(t)$ die Position eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t dar. Der Tangentenvektor $\dot{\underline{r}}(t)$ ist dann der Geschwindigkeitsvektor und die zweite Ableitung $\ddot{\underline{r}}(t)$ ist der Beschleunigungsvektor zur Zeit t . Die Länge des Tangenten-/Geschwindigkeitsvektors ist die momentane Absolutgeschwindigkeit

$$v(t) = |\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\dot{x}_j(t))^2}.$$

Es ist daher aus physikalischer Sicht plausibel, dass das Integral

$$s = \int_a^b |\dot{\underline{r}}(t)| dt$$

die Länge der Kurve C angibt. Mathematisch-geometrisch begründet man dies, indem man die Kurve durch Polygonzüge annähert und zu einem Grenzwert übergeht.

Beispiele 4.1.3. Wir berechnen Tangentenvektoren und die Längen einiger Kurven.

- (i) Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ auf $[a, b]$ hat im Punkt $[t, f(t)]^T$ den Tangentenvektor $[1, f'(t)]^T$. Daher ist $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ die Länge des Graphen.
(ii) Die Kettenlinie $y = \cosh x$ für $-1 \leq x \leq 1$ hat die Länge

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_{-1}^1 \cosh t dt = 2 \sinh 1.$$

- (iii) Die Länge der Schraubenlinie $\underline{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$ aus Beispiel 4.1.2(iii) ist

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \dots = 2\pi\sqrt{2}.$$

Der Tangentenvektor im Punkt $[1, 0, 0]^T$ ist $[0, 1, 1]^T$.

- (iv) Die Schraubenlinie werde nun mit variabler Geschwindigkeit durchlaufen. Gegeben sei dazu eine C^1 -Funktion $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ mit $\tau' > 0$ und $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 2\pi$. Dann ist durch

$$\underline{r}_\tau(s) = \begin{bmatrix} \cos(\tau(s)) \\ \sin(\tau(s)) \\ \tau(s) \end{bmatrix} \quad 0 \leq s \leq 1$$

eine andere Parameterdarstellung der obigen Schraubenlinie gegeben. Für die Tangentenvektoren gilt

$$\underline{\dot{r}}_{\tau}(s) = \tau'(s) \begin{bmatrix} -\sin(\tau(s)) \\ \cos(\tau(s)) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Tangentenvektor im Punkt $[1, 0, 0]^T$ ist $\tau'(0)[0, 1, 1]^T$. Für die Länge der Kurve erhalten wir denselben Wert wie bei Verwendung der anderen Parametrisierung:

$$s = \int_0^1 |\underline{\dot{r}}_{\tau}(s)| ds = \int_0^1 \sqrt{2}\tau'(s) ds = \sqrt{2}(\tau(1) - \tau(0)) = 2\pi\sqrt{2}.$$

Die am Beispiel der Schraubenlinie beobachtete Unabhängigkeit der Länge von einer Parametrisierung gilt allgemein:

Satz 4.1.4. *Die Länge einer Kurve hängt nicht davon ab, welche Parameterdarstellung für sie benutzt wird.*

Ein Beweis benutzt die Tatsache, dass zwei Parameterdarstellungen durch einen Parameterwechsel $t = \tau(s)$ auseinander hervorgehen. Die Gleichheit der Längenintegrale folgt dann mit der Substitutionsregel für Integrale. Man beachte aber, dass die (Längen von) Tangentenvektoren i.A. von der benutzten Parameterdarstellung abhängen.

Weitere wichtige geometrische Größen einer Kurve wie ihre Krümmung oder ihre Torsion kann man mit Hilfe von Parameterdarstellungen berechnen. Diese Größen sind unabhängig von der speziell gewählten Parameterdarstellung. Beispielsweise ist für eine Raumkurve die Krümmung im Kurvenpunkt $\underline{r}(t)$ gegeben durch den Ausdruck:

$$\kappa(t) = \frac{|\underline{\dot{r}}(t) \times \underline{\ddot{r}}(t)|}{|\underline{\dot{r}}(t)|^3}.$$

4.2 Kurvenintegrale

Ein n -dimensionales Vektorfeld in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine C^1 -Abbildung

$$\underline{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ F_n(\underline{x}) \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Seien solch ein Vektorfeld \underline{F} und eine Kurve C wie in (21) gegeben; C liege dabei in D . Das Kurvenintegral von \underline{F} längs C ist die Zahl (kein Vektor!):

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{x} := \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt \quad (22)$$

Der Punkt bezeichnet das Skalarprodukt von Vektoren.

Das Geschwindigkeitsfeld einer stationär strömenden Flüssigkeit und die Feldstärke eines statischen elektrischen Feldes sind Beispiele für 3-dimensionale Vektorfelder.

Ist das Vektorfeld \underline{F} in (22) ein Kraftfeld, dann ist der Wert des Kurvenintegrals die längs des Weges C geleistete Arbeit.

Beispiel 4.2.1. Wir integrieren das Wirbelfeld

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

längs der Schraubenlinie

$$C: \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ ht/2\pi \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ h/2\pi \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ h/2\pi \end{bmatrix} dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Im Fall eines konstanten Vektorfeldes \underline{F} ist

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underline{F} \cdot (\underline{r}(b) - \underline{r}(a)).$$

Insbesondere hängt das Kurvenintegral nicht vom Kurvenverlauf, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Eine Kurve C , die in einer Parameterdarstellung (21) vorliegt, besitzt einen Durchlaufssinn (Orientierung). Sie läuft vom Anfangspunkt $A = \underline{r}(a)$ zum Endpunkt $B = \underline{r}(b)$. Wählt man eine Parametrisierung, die die Kurve in umgekehrter Richtung durchläuft, dann bleibt die Kurvenlänge unverändert aber Kurvenintegrale ändern ihr Vorzeichen. 11.Jan.

Beispiel 4.2.2. Die folgenden Kurven C_1 und C_2 stellen den oberen Einheitskreisbogen dar, wobei dieser in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird.

$$C_1: \underline{r}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

$$C_2: \underline{r}_2(s) = \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}, \quad 0 \leq s \leq \pi.$$

Sei $\underline{F}(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]^T$ ein Vektorfeld. Mit der Substitution $t = \cos s$, $dt =$

– $\sin s \, ds$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_{-1}^1 (f_1(t, \sqrt{1-t^2}) \cdot 1 + f_2(t, \sqrt{1-t^2}) \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}) dt \\ &= \int_{\pi}^0 (f_1(\cos s, \sin s) + f_2(\cos s, \sin s)(-\cot s))(-\sin s) ds \\ &= - \int_0^{\pi} (f_1(\cos s, \sin s)(\cos s)' + f_2(\cos s, \sin s)(\sin s)') ds \\ &= - \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \end{aligned}$$

In diesem Beispiel gilt $\underline{r}_1(\tau(s)) = \underline{r}_2(s)$ mit $\tau(s) = \cos s$. Die Funktion τ ist eine Bijektion zwischen den Parameterintervallen. Solch eine Funktion τ kann auch für allgemeinere Kurven C_1 und C_2 existieren. Man nennt sie eine Parameterwechselfunktion. Der durch sie gegebene Parameterwechsel $s \mapsto t = \tau(s)$ erhält den Durchlaufssinn, wenn $\tau'(s) > 0$ gilt, und er kehrt ihn um, wenn $\tau'(s) < 0$ gilt. Es ist zweckmäßig, mit $-C$ diejenige Kurve zu bezeichnen, die dadurch entsteht, dass eine gegebene Kurve C im gegenläufigen Sinn durchlaufen wird, z.B.

$$\begin{aligned} C &: \underline{r}(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ -C &: \underline{r}(1-t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Für Kurvenintegrale gilt dann

$$\int_{-C} \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

Viele der in den Anwendungen interessierenden Kurven C können nicht mit einer einzigen Parameterdarstellung erfasst werden. Solche zerlegt man in Teilkurven, welche Parameterdarstellungen besitzen:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \quad \text{mit } C_i : \underline{r}_i(t), \quad a_i \leq t \leq b_i.$$

Dabei setzt man in der Regel voraus, dass der Endpunkt einer Teilkurve mit dem Anfangspunkt der nächsten Teilkurve übereinstimmt: $\underline{r}_i(b_i) = \underline{r}_{i+1}(a_{i+1})$. Dann ist C zusammenhängend und besitzt den Anfangspunkt $\underline{A} = \underline{r}_1(a_1)$ und den Endpunkt $\underline{B} = \underline{r}_N(b_N)$. Gilt $\underline{A} = \underline{B}$, dann heißt C geschlossen. Das Integral eines Vektorfeldes \underline{F} längs $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \cdots + \int_{C_N} \underline{F} \cdot d\underline{r} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \underline{F}(\underline{r}_i(t)) \cdot \underline{\dot{r}}_i(t) dt. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2.3. Die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Randkurve des Einheitshalbkreises ist $C = C_1 + C_2$, wobei

$$C_1: \underline{r}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$C_2: \underline{r}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Diese Kurve ist geschlossen. Das Integral von $\underline{F}(x, y) = [1 - y, x]^T$ ist

$$\begin{aligned} \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_0^\pi \begin{bmatrix} 1 - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi (1 - \sin t) dt + \int_{-1}^1 1 dt = \pi. \end{aligned}$$

4.3 Potentiale und Wegunabhängigkeit

Ein Vektorfeld der Gestalt

$$\underline{F} = \text{grad } \varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

heißt ein Gradientenfeld mit zugehörigem Potential $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiele 4.3.1. Gradientenfelder $\underline{F} = \text{grad } \varphi$:

- (i) Konstantes Vektorfeld $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{a}$ mit $\varphi(\underline{r}) = \underline{a} \cdot \underline{r}$.
- (ii) Das Coulombfeld

$$\underline{F}(x, y, z) = \underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\underline{r}}{r^3} \quad \text{in } D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$$

hat das Potential $\varphi(\underline{r}) = 1/r$, wobei $r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Potentiale spielen für Kurvenintegrale eine ähnliche Rolle, wie Stammfunktionen für Integrale von Funktionen über Intervalle.

Satz 4.3.2. Für ein Gradientenfeld $\underline{F} = \text{grad } \varphi$ ist das Kurvenintegral längs einer Kurve C gleich einer Potentialdifferenz; genauer:

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \varphi(\underline{B}) - \varphi(\underline{A}), \quad (23)$$

wenn \underline{A} der Anfangs- und \underline{B} der Endpunkt von C sind.

Liegt für die Kurve eine Parameterdarstellung

$$C: \underline{r}(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \underline{A} = \underline{r}(a), \underline{B} = \underline{r}(b)$$

vor, dann begründet man den Satz wie folgt. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt}\varphi(\underline{r}(t)) = (\text{grad } \varphi)(\underline{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\underline{r}(t) = \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t).$$

Hieraus folgt die erste Gleichung in

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\underline{r}(t)) dt = \varphi(\underline{B}) - \varphi(\underline{A}).$$

Die zweite Gleichung folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für zusammenhängende Kurven $C = C_1 + \dots + C_N$ folgt (23) aus der Gültigkeit dieser Gleichung für jede Teilkurve C_i .

Beispiel 4.3.3. Vorgelegt seien $\underline{F} = [2y - z, 2x, -x]^T$ und

$$C: \quad \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} e^{\cos t} \\ 5t^2 \\ \cos t + 4 \sin t \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi.$$

Das Kurvenintegral wird mit Hilfe des Potentials $\varphi(x, y, z) = x(2y - z)$ wie folgt bestimmt:

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \varphi(e^{-1}, 5\pi^2, -1) - \varphi(e, 0, 1) = e^{-1}(10\pi^2 + 1) + e.$$

Aus dem Satz 4.3.2 erhalten wir wichtige Folgerungen.

18.Jan.

Folgerung 4.3.4. Das Integral eines Gradientenfeldes längs einer geschlossenen Kurve C verschwindet: $\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$.

Die hier verwendete Notation für das Integral dient lediglich dazu hervorzuheben, dass das Integral über eine geschlossene Kurve erstreckt wird.

Folgerung 4.3.5 (Wegunabhängigkeit). Vorgelegt seien Kurven C_1 und C_2 mit gleichen Anfangs- und Endpunkten. Dann gilt für jedes Gradientenfeld \underline{F} :

$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

Der Grund hierfür ist: $C_1 - C_2$ ist eine geschlossene Kurve.

Das Vektorfeld $\underline{F}(x, y) = [1 - y, x]^T$ ist kein Gradientenfeld, denn im Beispiel 4.2.3 wurde gezeigt, dass es eine geschlossene Kurve gibt, längs der das Integral von \underline{F} ungleich Null ist.

Unter welchen Voraussetzungen besitzt ein gegebenes Vektorfeld ein Potential? Wie kann man ein Potential bestimmen, falls ein solches existiert?

Zunächst zur zweiten Frage: Sei $\underline{F}(x, y) = [F_1(x, y), F_2(x, y)]^T$ ein 2-dimensionales Vektorfeld. Wenn \underline{F} ein Potential φ besitzt, dann schließt man mittels unbestimmter Integration:

$$F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \implies \varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx + C_1(y),$$

$$F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \implies \varphi(x, y) = \int F_2(x, y) dy + C_2(x).$$

Es ist dabei zu beachten, dass die Integrationskonstanten i.A. keine Konstanten sind, sondern von den Variablen abhängen, nach denen nicht integriert wird. Wir nennen dieses Verfahren die Bestimmung eines Potentials mittels unbestimmter Integration.

Beispiele 4.3.6. Wir wenden das Verfahren an, ohne uns vorher zu vergewissern, dass es ein Potential gibt.

(i) Für $\underline{F}(x, y) = [2xy, x^2 + 3]^T$ haben wir nach obigem Verfahren:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \int 2xy \, dx = x^2y + C_1(y), \\ \varphi(x, y) &= \int (x^2 + 3) \, dy = (x^2 + 3)y + C_2(x).\end{aligned}$$

Diese Bedingungen werden befriedigt durch $\varphi(x, y) = x^2y + 3y$. Dies ist, wie man durch Nachrechnen bestätigt, ein Potential.

(ii) Für $\underline{F}(x, y) = [-y, x]^T$ erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \int -y \, dx = -xy + C_1(y), \\ \varphi(x, y) &= \int x \, dy = xy + C_2(x).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nicht erfüllt werden, da sonst $-xy + C_1(y) = xy + C_2(x)$ gälte. Ableitung dieser Gleichung nach x und y führt auf den Widerspruch $-1 = 1$. Dieses Vektorfeld besitzt folglich kein Potential.

Wir wenden uns nun der ersten oben gestellten Frage zu. Im Falle dreidimensionaler Vektorfelder \underline{F} formuliert man notwendige Bedingungen für die Existenz eines Potentials anhand seiner Rotation $\text{rot } \underline{F}$:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad \text{rot } \underline{F} = \begin{bmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{bmatrix}.$$

Beispiel 4.3.7. Ein Vektorfeld mit nichtverschwindender Rotation.

$$\text{rot} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Das Vektorfeld ist kein Gradientenfeld. Die ersieht man aus dem nachfolgenden Satz.

Satz 4.3.8. Die Rotation eines dreidimensionalen Gradientenfeldes ist $= \underline{0}$.

Allgemeiner gilt: Ist ein n -dimensionales Vektorfeld $\underline{F} = [F_1, \dots, F_n]^T$ eine Gradientenfeld, dann sind die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j.$$

überall erfüllt. In der Tat folgt aus $\underline{F} = \text{grad } \varphi$ mit dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Stellt das Verschwinden der Rotation sicher, dass ein Gradientenfeld vorliegt? Nicht unbedingt! Wenn aber das Gebiet, in dem das Vektorfeld betrachtet wird, keine „Löcher“ aufweist, dann genügt es, $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$ nachzuprüfen. Beispielsweise gilt:

Satz 4.3.9. *Sei \underline{F} ein in einem Quader $D \subset \mathbb{R}^3$ definiertes Vektorfeld, welches in D die Gleichung $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$ erfüllt. Dann besitzt \underline{F} ein Potential φ in D .*

Dieser Satz gilt allgemeiner für sogenannte einfach zusammenhängende Gebiete. Ein Beweis des Satzes folgt aus dem Integralsatz von Stokes, den wir jedoch nicht behandeln werden.

4.4 Flächen und Flächenintegrale

Flächen sind zweidimensionale Teilmengen des dreidimensionalen Raumes \mathbb{R}^3 , die glatt sind, insbesondere in jedem Punkt eine Tangentenebene besitzen. Oft sind Flächen durch eine Gleichung gegeben, beispielsweise die Kugel mit Radius $R > 0$:

$$S_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Wie im Falle von Kurven, benötigt man Parameterdarstellungen für Teile einer Fläche. Die obere Halbkugel kann man z.B. durch x, y parametrisieren:

$$(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$

Eine Alternative ist die Verwendung von Kugelkoordinaten:

$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{bmatrix} R \cos \varphi \cos \vartheta \\ R \sin \varphi \cos \vartheta \\ R \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

Allgemein ist eine Fläche S in einer Parameterdarstellung gegeben, wenn eine C^1 -Abbildung

$$S : \underline{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} \quad \text{für } (u, v) \in D \quad (24)$$

vorliegt derart, dass das Vektorprodukt

$$\underline{n}(u, v) := \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \neq \underline{0} \quad \text{für alle Parameter } u \text{ und } v. \quad (25)$$

Den (offenen) Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Parameterabbildung nennt man Parameterbereich. Die Vektoren $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ sind Tangentenvektoren an die Fläche. Der Vektor $\underline{n}(u, v)$ steht senkrecht auf der Fläche im betreffenden Flächenpunkt $\underline{r}(u, v)$, seine Länge ist i.A. nicht Eins. Die Bedingung (25) fordert, dass diese Tangentenvektoren überall linear unabhängig sind. Hierdurch wird die Zweidimensionalität der Fläche sichergestellt.

Beispiel 4.4.1. Der Graph G_f einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Fläche:

$$\underline{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$$

Die Tangenten- und Normalen vektoren sind:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{bmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es liege eine Fläche wie in (24) gegeben vor. Ein kleines Rechteck in D mit Kantenlängen Δu und Δv wird auf ein Flächenstück in S abgebildet, welches näherungsweise mit einem Parallelogramm übereinstimmt, dessen Kanten von den Vektoren $\Delta u \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ aufgespannt wird $\Delta v \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \cdot \underline{n}$. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist $\Delta u \cdot \Delta v \cdot |\underline{n}|$. Diese Beobachtung führt auf folgende Definition des Flächeninhaltes von S :

$$F(S) := \int_S 1 \, dS = \iint_D |\underline{n}(u, v)| \, du \, dv. \quad (26)$$

Beispiele 4.4.2. Wir berechnen Flächeninhalte gemäß obiger Definition.

- (i) Wegen $|\underline{n}(u, v)|^2 = 1 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2$ ist der Flächeninhalt des Graphen G_f von $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$$F(G_f) = \iint_D \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} \, dx \, dy.$$

- (ii) Unter Verwendung von Kugelkoordinaten lautet der Normalenvektor an eine Kugel S_R mit Radius R :

$$\underline{n}(u, v) = \dots = R \cos \vartheta \underline{r}(u, v), \quad |\underline{n}(u, v)| = R^2 \cos \vartheta.$$

Folglich

$$F(S_R) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^2 \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \dots = 4\pi R^2.$$

Es liege eine Fläche S in Parameterdarstellung (24) vor. Die Parametrisierungsabbildung $D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \underline{r}(u, v)$ ist stetig differenzierbar (= von der Klasse C^1), injektiv, und das Normalenvektorfeld ist nirgends Null (siehe (25)). Integration des infinitesimalen Flächenelements $dS = |\underline{n}(u, v)| \, du \, dv$ ergibt den Flächeninhalt (26) von S . Sei $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige 25.Jan.

Funktion; d.h. g ist die Einschränkung auf S einer in einer Umgebung von S stetigen Funktion. Wenn das Integral

$$\int_S g \, dS = \iint_D g(\underline{r}(u, v)) |\underline{n}(u, v)| \, du \, dv$$

existiert, dann heißt es das Integral von g über S . Man spricht hier von einem Flächenintegral erster Art. Offenbar ist $\int_S 1 \, dS$ der Flächeninhalt von S . Weitere Anwendungen solcher Integrale findet man beispielsweise bei der Bestimmung der elektrostatischen Gesamtladung in einer dünnen Schale bei gegebener Ladungsdichte.

Bemerkung 4.4.3. Ist S ein Gebiet D in der xy -Ebene, d.h. $S = \{(x, y, 0); (x, y) \in D\}$, dann ist ein Flächenintegral über S nichts anderes als das zweidimensionale Integral über D : $\int_S g \, dS = \iint_D g(x, y) \, dx \, dy$. In diesem Fall ist das Normalenfeld \underline{n} nämlich das Einheitsfeld $[0, 0, 1]^T$.

Bei der Aufstellung von Massen- und Energiebilanzen treten Integrale von Vektorfeldern \underline{F} auf, die Massen- oder Energieflüsse darstellen. Diese Integrale heißen Flächenintegrale zweiter Art. Sie haben die Gestalt

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = \int_S \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, dS = \iint_D \underline{F}(\underline{r}(u, v)) \cdot \underline{n}(u, v) \, du \, dv. \quad (27)$$

Man nennt $\underline{\nu} = |\underline{n}|^{-1} \underline{n}$ das Einheitsnormalenfeld an S .

Ein Flächenintegral ist ein bestimmtes Integral, sein Wert ist eine reelle Zahl. Eine mögliche Anwendung von (27) ist die Berechnung der Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch S strömt, wenn \underline{F} das Geschwindigkeitsfeld der Strömung ist.

Beispiele 4.4.4. Sei $S = S_1 \cap \{z > 0\}$ die obere Halbsphäre mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius = 1. Ihre Parametrisierung in Kugelkoordinaten lautet:

$$S: \quad \underline{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad 0 < \vartheta < \pi/2.$$

Das Normalenfeld wurde bereits berechnet: $\underline{n} = \cos \vartheta \underline{r}$. Es zeigt ins Äußere der Einheitskugel. Offenbar ist $\underline{\nu} = \underline{r}$. Wir berechnen $I = \int_S \underline{F} \cdot d\underline{S}$ für verschiedene Vektorfelder \underline{F} .

(i) Sei $\underline{F}(\underline{r}) = [F_x, F_y, F_z]^T$ ein konstantes Vektorfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{bmatrix} \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 2\pi F_z \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \pi F_z. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist plausibel: Der Gesamtfluss durch der Halbsphäre ist genau dann Null, wenn das Vektorfeld parallel zur Äquatorebene zeigt.

(ii) Für das radiale Vektorfeld $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r}$ ergibt sich

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} |\underline{r}|^2 \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi.$$

Oft liegt eine Fläche anfänglich nicht in parametrisierter Form vor. Um ein Flächenintegral über sie zu bilden, ist dann zunächst eine Parameterdarstellung zu finden.

Beispiel 4.4.5. Es soll der Fluss $\Phi = \int_S \underline{v} \cdot d\underline{S}$ berechnet werden für das Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}(x, y, z) = [2z, x + y, 0]^T$ durch das Flächenstück S der Ebene $x + 2y + 3z = 4$, welches im ersten Oktanten liegt. Die vom Nullpunkt abgewandte Seite ist die positive Seite (Oberseite) von S . Wir lösen die Gleichung für S nach x auf und verwenden $u = y$ und $v = z$ als Parameter:

$$S: \quad \underline{r}(u, v) = \begin{bmatrix} 4 - 2u - 3v \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{für } 0 \leq u, v \text{ und } 2u + 3v \leq 4.$$

Man berechnet $\underline{n} = [1, 2, 3]^T$ und

$$\Phi = \dots = \int_0^2 \int_0^{(4-2u)/3} (8 - 2u - 4v) \, dv \, du = \dots = \frac{176}{27}.$$

Man hätte S auch anders parametrisieren können; das Ergebnis bliebe jedoch gleich. Der nachfolgende Satz ist eine Konsequenz der Transformationsformel für zweidimensionale Integrale.

Satz 4.4.6. *Ein Flächenintegral hängt nicht ab von der Wahl einer Parametrisierung, sofern diese die Orientierung der Fläche nicht ändert. Flächenintegrale erster Art sind sogar unabhängig von der Orientierung.*

Eine Orientierung einer Fläche S ist die Festlegung einer Oberseite (positive Seite) von S . Meist wird diese Festlegung durch Wahl einer Normalenrichtung \underline{n} getroffen, welche zur Oberseite von S zeigt. Eine Parametrisierung definiert automatisch eine Orientierung der Fläche. Möchte man von S zur entgegengesetzt orientierten Fläche $-S$ übergehen, dann genügt es die Parameter u und v zu vertauschen, denn

$$\underline{n}_S = \partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r} = -\partial_v \underline{r} \times \partial_u \underline{r} = -\underline{n}_{-S}.$$

Flächenintegrale zweiter Art (27) hängen von der Orientierung ab:

$$\int_{-S} \underline{F} \cdot d\underline{S} = - \int_S \underline{F} \cdot d\underline{S}.$$

Wie im Falle von Kurven können Flächen meist nicht in einem Stück parametrisiert werden. Sie werden dann als Vereinigung (Summe) von parametrisierten (Teil-)Flächen dargestellt: $S = S_1 + \dots + S_N$. Das Integral über S ist dann wie folgt gegeben: 1.Feb.

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = \int_{S_1} \underline{F} \cdot d\underline{S} + \dots + \int_{S_N} \underline{F} \cdot d\underline{S}.$$

Beispiel 4.4.7. Die Oberfläche S des Vollzylinders

$$Z = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

lässt sich in Deckel, Boden und Mantel zerlegen:

$$\begin{aligned}
 S &= D + B + M, \\
 D &: \underline{r}(x, y) = [x, y, h]^T, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \\
 -B &: \underline{r}(x, y) = [x, y, 0]^T, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \\
 M &: \underline{r}(\varphi, z) = [R \cos \varphi, R \sin \varphi, z]^T, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq h.
 \end{aligned}$$

Die Normalenfelder sind $\underline{n}_D = -\underline{n}_B = [0, 0, 1]^T$ und $\underline{n}_M = [R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0]^T$. Wir berechnen $I = \int_S \underline{F} \cdot d\underline{S}$ für das Vektorfeld $\underline{F}(x, y, z) = [x + y, 0, z]^T$:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D \underline{F} \cdot d\underline{S} + \int_B \underline{F} \cdot d\underline{S} + \int_M \underline{F} \cdot d\underline{S} \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 1 \cdot h \, dx \, dy - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (-1) \cdot 0 \, dx \, dy \\
 &\quad + \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} (R \cos \varphi + R \sin \varphi) \cdot R \cos \varphi \, d\varphi \, dz \\
 &= h\pi R^2 + hR^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 2h\pi R^2
 \end{aligned}$$

4.5 Der Gauß'sche Integralsatz

Die Divergenz eines 3-dimensionalen Vektorfeldes \underline{F} ist eine skalare Funktion:

$$\operatorname{div} \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Beispiel 4.5.1.

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} \sin(x^2 y) \\ xyz \\ x + y^2 + z^3 \end{bmatrix} = 2xy \cos(x^2 y) + xz + 3z^2$$

Die Divergenz ist, anders als die Rotation, für Vektorfelder beliebiger Dimension definierbar.

Wir betrachten beschränkte Bereiche $B \subset \mathbb{R}^3$, deren Rand $S = \partial B$ (=Oberfläche) eine stückweise C^1 -glatte Fläche ist. Man nennt solche Bereiche auch Gauß-Green-Bereiche. Mit Ausnahme von Kanten ist dann überall auf S das äußere Normalenfeld ν definiert, welches in das Äußere von B weist. Dieses Normalenfeld legt die Orientierung von S fest.

Satz 4.5.2 (Gauß'scher Integralsatz). Sei B ein Gauß-Green-Bereich mit Rand S , welcher durch das äußere Normalenfeld orientiert ist. Sei \underline{F} ein C^1 -Vektorfeld auf G . Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} \underline{F} \, dV = \int_S \underline{F} \cdot d\underline{S}. \quad (28)$$

Dieser Satz wird auch als Divergenzsatz bezeichnet. Er behauptet die Gleichheit eines 3-dimensionalen Integrals mit einem 2-dimensionalen Integral.

Beispiel 4.5.3. Wir bestätigen die Formel (28) für

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

B ist der im Beispiel 4.4.7 betrachtete Vollzylinder Z . Dort wurde bereits das Oberflächenintegral I bestimmt. Dies stimmt in der Tat mit dem Volumenintegral der Divergenz überein:

$$\int_B \operatorname{div} \underline{F} \, dV = \int_B 2 \, dV = 2h\pi R^2.$$

Der Gauß'sche Integralsatz ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, welcher den Zusammenhang zwischen einem bestimmten Integral und einer Stammfunktion des Integranden aufzeigt:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

In diesem Spezialfall ist $B = [a, b]$. Der Rand ist 0-dimensional und besteht aus den Punkten a und b versehen mit Orientierungen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist andererseits auch ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis des Gauß'schen Integralsatzes.

Der Gauß'sche Integralsatz hat viele Anwendungen in der Kontinuumsmechanik. Wir skizzieren zwei Beispiele, das allgemeine archimedische Prinzip des Auftriebs und die Kontinuitätsgleichung.

Beispiel 4.5.4 (Auftriebskraft). Ein Körper K mit Oberfläche S sei ganz in Wasser eingetaucht. Die Wasseroberfläche ist durch die Gleichung $z = 0$ gegeben, und dementsprechend gilt $z < 0$ unter Wasser. Der Wasserdruck P steigt linear mit der Tiefe an: $P = -\gamma z$ mit einer Konstanten $\gamma > 0$. In jedem Punkt von S bezeichne φ den Winkel, der zwischen der äußeren Einheitsnormale $\underline{\nu}$ und der negativen z -Richtung $-\underline{e}_z$ eingeschlossen wird. Die Vertikalkomponente F_z der gesamten auf K wirkenden Auftriebskraft ist das Integral über S der Vertikalkomponenten der Druckkräfte:

$$\begin{aligned} F_z &= \int_S P \cos \varphi \, dS = \int_S (-\gamma z)(-\underline{e}_z \cdot \underline{\nu}) \, dS = \int_S \gamma z \underline{e}_z \cdot d\underline{S} \\ &= \int_K \operatorname{div}(\gamma z \underline{e}_z) \, dV = \int_K \gamma \, dV = \gamma V(K). \end{aligned}$$

Die vierte Gleichung folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz. Der Auftrieb F_z ist also, unabhängig von der Gestalt von K , proportional zum (Verdrängungs-)Volumen des Körpers K .

Beispiel 4.5.5 (Kontinuitätsgleichung). Um die Strömung einer Flüssigkeit (oder eines Gases) zu beschreiben, stellt man Massebilanzen auf. Bezeichnet $\rho = \rho(x, y, z, t) > 0$ die Massendichte am Ort (x, y, z) zu Zeit t , dann wird die Änderung der Gesamtmasse (pro Zeiteinheit) in einem Teilvolumen K der Flüssigkeit gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \int_K \rho \, dV = \int_K \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV. \quad (29)$$

Die Gleichheit folgt wegen der Differenzierbarkeit des Integrals nach dem Parameter t . Bezeichnet $\underline{v} = \underline{v}(x, y, z, t)$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, dann ist der Massenfluss (pro Zeiteinheit) durch die Oberfläche S von K gegeben durch

$$\int_S \rho \underline{v} \cdot d\underline{S}. \quad (30)$$

Wir nehmen an, dass S durch die aus K hinauszeigende Normale orientiert ist. Dann ist (30) positiv, wenn Masse aus K herausfließt. Das physikalische Gesetz von Erhaltung der Masse wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt} \int_K \rho \, dV = - \int_S \rho \underline{v} \cdot d\underline{S} + \int_K Q \, dV.$$

Hier ist $Q = Q(x, y, z, t)$ eine Funktion, die Zu- und Abflüsse in K darstellt. Mit dem Gauß'schen Integralsatz und (29) erhält man die Massenbilanz in integraler Form:

$$\int_K (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) - Q) \, dV = 0.$$

Die Gleichung muss für alle denkbaren Teilvolumina K gelten. Daher ist der Integrand Null:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = Q. \quad (31)$$

Diese Gleichung heißt Kontinuitätsgleichung. Sie ist eine (partielle) Differentialgleichung. In kontinuumsmechanischen Anwendungen wird sie ergänzt durch Gleichungen, welche typischerweise materialspezifische Beziehungen ausdrücken. Wichtig ist der Spezialfall stationärer Strömungen, der dadurch charakterisiert ist, dass ρ , \underline{v} und Q nicht explizit von der Zeit t abhängen. In diesem Fall vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = Q$. Für eine quellenfreie, stationäre Strömung gilt insbesondere $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$.

Man nennt Vektorfelder \underline{F} mit $\operatorname{div} \underline{F} = 0$ quellenfrei.

Literatur

- [Bar99] H.-J. Bartsch, *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1999.
- [Bär05] G. Bärwolff, *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Spektrum Akademischer Verlag, München, 2005.
- [BHW08] Burg, Haf, und Wille, *Höhere Mathematik für Ingenieure. Band I*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [MV01] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1*, Springer, Berlin, 2001.