Hansen 12.10.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 1

1. Berechne die Doppelintegrale

a) $\displaystyle\int_2^5 \int_0^{\sqrt{x}} (y + 2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-y} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

2. Skizziere die Integrationsbereiche und vertausche die Integrationsreihenfolgen in

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

3. Skizziere die Menge $B = B_1 \setminus B_2 \subset \mathbb{R}^2$,

$$B_1 = \{(x,y)\,;\ |x-1| + |y| \le 3\}, \quad B_2 = \{(x,y)\,;\ 4x^2 + y^2 < 1\}$$

und zerlege B in Normalgebiete.

4. Berechne $\displaystyle\int_B (x + y^2)\,\mathrm{d}A$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ ist.

5. Skizziere B und berechne den Flächeninhalt von B als iteriertes Integral auf zwei Weisen, einmal indem zuerst nach y und ein andermal indem zuerst nach x zu integriert wird.

$$B = \{(x,y)\,;\ -2 \le y \le 0,\ y^2 - 4 \le x \le 0\}$$

6. Hausaufgabe (3 Punkte) Berechne $\displaystyle\int_B \sqrt{x}\,y\,\mathrm{d}A$, wobei B der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y^2 = x$ und $y = x^2$ ist. Skizziere außerdem B.

Abgabe: Dienstag, 20.10.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Eine Abgabe ist nur vorgesehen für Lösungen von Hausaufgaben; Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Durch erfolgreiches Lösen von Hausaufgaben oder durch erfolgreiches Vorrechnen von Tafelaufgaben in der Übung kann man einen Bonus für die Klausur(en) erwerben. (Das vorliegende Aufgabenblatt enthält noch keine Tafelaufgaben.) Genauere Infomationen findet man auf der Webseite der Veranstaltung:
http://www.math.upb.de/~soenke/2009w/Math_Mb_3/index.html

Hansen 19.10.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 2

7. Tafelaufgabe Skizziere den Integrationsbereich und vertausche die Integrationsreihenfolge in dem Integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

8. Bestimme das Volumen des Körpers

$$B = \{(x,y,z)\,;\ |x|,|y| \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}.$$

9. Hausaufgabe (4 Punkte) Bestimme das Volumen des „Hauses“

$$H = \{(x,y,z)\,;\ -2 \le x \le 1,\ |y| \le 3,\ 0 \le z \le 3 - |x|\}.$$

Dabei ist $V(H) = \int_H 1\,\mathrm{d}V$ als Dreifachintegral zu berechnen.

10. Berechne den Flächeninhalt der Ellipse, deren Rand durch die Gleichung $x^2+4xy+6y^2 = 1$ beschrieben wird.

11. Durch die in Polarkoordinaten zu interpretierende Gleichung $r = 1 + \cos\varphi$ wird die Randkurve einer Kardioide $K \subset \mathbb{R}^2$ definiert. Berechne den Flächeninhalt von K.

12. Tafelaufgabe Berechne das Integral

$$\iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

13. Bestimme die z-Koordinate des Schwerpunktes des Kugelabschnittes

$$B = \{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge a\}.$$

Hier ist $-1 < a < 1$ beliebig.

Abgabe: Dienstag, 27.10.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 26.10.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 3

14. Tafelaufgabe Berechne $\int_B \frac{1}{x}\,\mathrm{d}A$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der durch die Geraden

$$y = 2x - 1, \quad y = x - 1, \quad 2y = 2 - x$$

begrenzte Bereich ist.

15. Bestimme das dreidimensionale Volumen
a) von $S = \{(x, y, z)\,;\ x + y + z \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z\}$,
b) von einem Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$ mit gegebenen Eckpunkten $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^3$.

16. Tafelaufgabe In einem würfelförmigen Tank der Kantenlänge L, dessen Boden in der xy-Ebene liegt, befindet sich ein Gas, welches unter dem Einfluss der Schwerkraft die Dichte $\rho(x, y, z) = ae^{-cz}$ hat. (a und c sind dimensionsbehaftete Konstanten.) Wo liegt der Schwerpunkt des Gases im Tank?

17. Tafelaufgabe Durch Ausbohren eines Zylinders aus einer Halbkugel ist ein homogener Körper $B \subset \mathbb{R}^3$ enstanden, der durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad z \geq 0$$

beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten seines Schwerpunkts.

18. Gegeben sei eine Hohlkugel K mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2, $0 < R_1 < R_2$. Bestimme das Trägheitsmoment von K bezüglich einer durch seinen Mittelpunkt verlaufenden Achse. Die Dichte ρ ist als konstant anzunehmen.

19. Hausaufgabe (4 Punkte) Der Rotationskörper $B = B_1 \setminus B_2$ ensteht dadurch, dass aus einer Kugel B_1 ein Kegelstumpf B_2 herausgebohrt wird, wobei

$$B_1 = \{(x, y, z)\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\},$$
$$B_2 = \{(x, y, z)\,;\ 0 \leq z \leq 3,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + z\}.$$

Bestimme das Trägheitsmoment I_z von B bezüglich der z-Achse. Die Dichte ist dabei als konstant $\rho = 1$ anzunehmen. Die obere Integrationsgrenze für die z-Koordinate ist $= 1$. Warum ist dies so?

20. Berechne die Ableitung $F'(e)$ von $F(x) = \int_e^x \ln(x \ln y)\,\mathrm{d}y$.

Abgabe: Dienstag, 03.11.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 02.11.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 4

21. Tafelaufgabe Bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Scheibe, deren Grundfläche der Sektor eines Kreises mit Radius $R > 0$ und Öffnungswinkel $120°$ ist.

22. Berechne die Ableitung von $F(x) = \int_1^2 s^{-1} e^{-xs^2} \, \mathrm{d}s$.

23. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

24. Hausaufgabe (4 Punkte) Bestimme alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix}.$$

25. Tafelaufgabe Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist auch die zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ konjugiertkomplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert. Warum? – Für eine Matrix mit komplexen Einträgen muss dies nicht richtig sein. Beispiel?

26. Sei A eine quadratische Matrix mit $A^3 = 0$. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist.

27. Tafelaufgabe Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: A besitzt einen dreifachen Eigenwert.

Abgabe: Dienstag, 10.11.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 09.11.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 5

28. Wie bestimmt man die Eigenwerte einer Dreicksmatrix?

29. Untersuche folgende Matrizen auf Diagonalisierbarkeit.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

30. Hausaufgabe (4 Punkte) Gib zwei Begründungen dafür, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalisierbar ist, einmal durch explizite Berechnung einer Diagonalisierung $T^{-1}AT = D$ und einmal ohne eine Berechnung durchzuführen.

31. Tafelaufgabe Gegeben sei die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass gilt $Q(x_1, x_2, x_3) = \underline{x}^T A \underline{x}$ mit $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$. Berechne außerdem eine Diagonalisierung für A.

32. Tafelaufgabe Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und sei $p(x) = \sum_{k=1}^m b_k x^k$ ein Polynom. Betrachte die $n \times n$-Matrix

$$B = p(A) := \sum_{k=1}^m b_k A^k.$$

a) Für A sei ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ bekannt. Bestimme einen Eigenwert von B.
b) A sei diagonalisierbar: $T^{-1}AT = D$. Dann ist auch B diagonalisierbar. Warum?

Abgabe: Dienstag, 17.11.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 16.11.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 6

33. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann sind alle Eigenwerte von $A = B^T B$ positiv. Warum?

34. Für die Auslenkung $x(t)$ einer elastisch aufgehängten Masse m aus seiner Ruhelage $x = 0$ leitet man die folgende Schwingungsgleichung her:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t).$$

Dabei sind $k, r > 0$ die Federkonstante bzw. die Reibung; $f(t)$ ist eine äußere Kraft. Wandle die Schwingungsgleichung um in ein gleichwertiges lineares 2×2-System erster Ordnung.

35. Tafelaufgabe Bestimme alle Lösungen und eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems.

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = 0$$

36. Bestimme alle Lösungen und eine Fundamentalmatrix für:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 5y_1 & + & 8y_2 \\ y_2' & = & & & 3y_2 \end{array}$$

37. Hausaufgabe (4 Punkte) Bestimme alle Lösungen des Differentialgleichungssystems.

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & y_1 & & \\ y_2' & = & 3y_1 & - & 2y_2 \end{array}$$

Finde außerdem eine Lösung mit $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.

38. Tafelaufgabe Zeige, dass die Matrix

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t \ln t \end{bmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des folgenden Differentialgleichungssystems bildet:

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y} \quad \text{mit} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix} \quad \text{für } t > 0.$$

Abgabe: Dienstag, 24.11.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 23.11.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 7

39. Tafelaufgabe Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: In der Aufgabe 38 wurde eine Fundamentalmatrix angegeben.

40. Tafelaufgabe Bestimme die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 8y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 2$.

41. Hausaufgabe (4 Punkte) Bestimme eine Fundamentalmatrix für folgendes Differentialgleichungssystem und die Lösung des Anfangswertproblems.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1/\pi & \qquad y_1(\pi) &= e \\ y_2' &= -2y_3, & \qquad y_2(\pi) &= -1, \\ y_3' &= 2y_2 & \qquad y_3(\pi) &= -2 \end{aligned}$$

42. Ein $n \times n$-System der Gestalt $t\underline{y}' = A\underline{y}$ in $t > 0$ heißt Eulersches Differentialgleichungssystem. Zeige, dass solche Systeme mit der Substitution $t = e^s$ auf Systeme mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden können. Berechne eine Fundamentalmatrix für das Eulersche Differentialgleichungssystem

$$\underline{y}' = \frac{1}{t} A \underline{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

43. Zwei Tanks mit je 1000 Liter Wasser enthalten anfänglich 50 kg (erster Tank T_1) und 20 kg (zweiter Tank T_2) Düngemittel. Die Tanks sind durch zwei Rohre verbunden. Durch ein Rohr fließen 16 Liter pro Minute aus dem ersten in den zweiten Tank, durch das andere 4 Liter pro Minute aus dem zweiten in den ersten Tank. Durch einen Zufluss strömt 12 Liter reines Wassser pro Minute in den Tank T_1. Dieselbe Flüssigkeitsmenge fließt aus dem zweiten Tank über einen Abfluss heraus. Die Mischungen in den Tanks sind durch Rühren gleichmäßig. Bestimme die Düngemittelinhalte $y_1(t)$ und $y_2(t)$ in den Tanks T_1 und T_2.

Abgabe: Dienstag, 01.12.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 30.11.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 8

44. Wie lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems?

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1/t & + & y_2/t & + & t^2 \\ y_2' & = & & & y_2/t & + & t \end{array}$$

Hinweis: Eine Fundamentalmatrix wurde in der Aufgabe 42 bestimmt.

45. Tafelaufgabe Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 4y_2 + e^t, \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2. \end{aligned}$$

Bestimme außerdem die spezielle Lösung mit den Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

46. Hausaufgabe (4 Punkte) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 6y_2 + te^t, \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 + e^{2t}. \end{aligned}$$

47. Eine $n \times n$-Matrix A heißt schiefsymmetrisch, wenn $A^T = -A$ gilt. Seien zwei Lösungen $\underline{y_1}$ und $\underline{y_2}$ eines Differentialgleichungssystems $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ gegeben, wobei $A(t)$ für alle t schiefsymmetrisch ist. Zeige, dass die Vektoren $\underline{y_1}(t)$ und $\underline{y_2}(t)$ für alle t aufeinander senkrecht stehen, wenn sie dies für ein t tun.

Abgabe: Dienstag, 08.12.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 07.12.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 9

48. Bestimme die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

a) $4t^3 + t^2$

b) $\sinh at$

c) $\sin t \cdot \cos t$

d) $\sin 2t + 2t\cos 2t$

e) $e^{3t}\sin 4t$

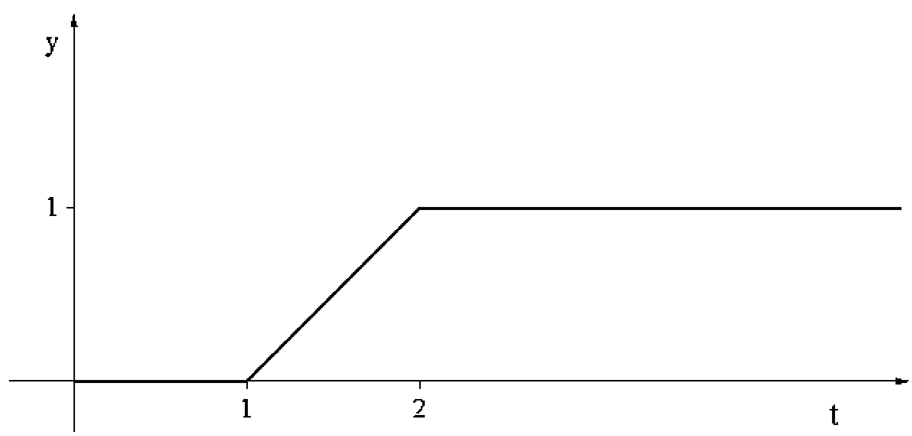
f) $t^2 e^{-2t}$

49. Tafelaufgabe Skizziere die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{für } 0 \le t < 1, \\ e^{-t}, & \text{für } 1 \le t, \end{cases}$$

und berechne ihre Laplace-Transformierte.

50. Hausaufgabe (3 Punkte) Bestimme die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion.



51. Tafelaufgabe Leite den folgenden Ähnlichkeitssatz her:

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](s/a) \quad \text{für } a > 0.$$

52. Löse folgendes Anfangswertproblem mit der Laplace-Transformation:

$$y' + y = 1 + e^t, \qquad y(0) = 1.$$

Abgabe: Dienstag, 15.12.09 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 14.12.2009

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 10

53. Bestimme die inverse Laplace-Transformierte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

a) $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$ **b)** $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2^2}$ **c)** $F(s) = \dfrac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}$

54. Tafelaufgabe Bestimme die inverse Laplace-Transformierte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2-s-6}$$

55. Tafelaufgabe Löse das Anfangswertproblem mit der Laplace-Transformation.

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

56. Löse die Anfangswertprobleme mit der Laplace-Transformation.

a) $y' + 3y = \sin 10t;\ y(0) = 0$

b) $y'' + 2y' + 2y = 0;\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x - 6y \\ \dot{y} & = & -5x - 2y \end{array}\right.$ mit $x(0) = 1, y(0) = 0$

d) $y'' + 3y' + 2y = g(t), y(0) = y'(0) = 0$, wobei $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < t \end{cases}$

57. Hausaufgabe (4 Punkte) Löse das Anfangswertproblem mit der Laplace-Transformation.

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$$

Abgabe: Dienstag, 5.01.10 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2010!

Hansen 04.01.2010

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 11

58. Die folgenden ebenen Kurven A, B und C geben verschiedene Parameterdarstellungen für den Teil des Einheitskreisbogens, der oberhalb der x-Achse liegt.

$$\begin{array}{ll} A: & x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ 0\le t\le \pi \\ B: & x=\sin(-2t),\ y=\cos(-2t),\ \ -\frac{\pi}{4}\le t\le \frac{\pi}{4} \\ C: & x=t,\ y=\sqrt{1-t^2},\ \ -1\le t\le 1 \end{array}$$

(a) Bestimme die jeweiligen Tangentenvektoren.
(b) Berechne für jede der Darstellungen die Länge der Kurve.

59. Hausaufgabe (4 Punkte) Berechne die Länge der Kurve

$$C:\ \underline{r}(t)=\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ \sqrt{3}t \end{bmatrix},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Gib außerdem den Tangentenvektor im Kurvenpunkt $\underline{P}=[-\pi,0,\sqrt{3}\pi]^T$ an.

60. Tafelaufgabe Berechne die Länge der Kurve $C:\ \underline{r}(t)=[t,e^t,2]^T$, $0\le t\le 4$.

61. Berechne das Kurvenintegral $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ des Vektorfeldes $\underline{F}=[x^2y, x-yx]^T$ längs der ebenen Kurve $C:\ \underline{r}(t)=[4t,2t]^T$, $0\le t\le 1$.

62. Tafelaufgabe Berechne das Kurvenintegral $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ des Vektorfeldes $\underline{F}$ längs C.

$$\underline{F}(\underline{r})=|\underline{r}|^2\underline{r},\qquad C:\ \underline{r}(t)=\begin{bmatrix} \cos\ln t \\ \sin\ln t \\ t \end{bmatrix}\quad \text{für } t\in[1,3].$$

63. Tafelaufgabe Berechne das Kurvenintegral $\int_C \underline{F}\cdot\, d\underline{r}$.

$$\underline{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix} y \\ x+z \\ y \end{bmatrix},\qquad C:\underline{r}(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ \cos\pi t \\ t^3 \end{bmatrix}\quad \text{für } t\in[0,1].$$

Abgabe: Dienstag,12.01.10 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 11.01.2010

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 12

64. Das in der (Tafel-)Aufgabe 63 angegebene Vektorfeld $\underline{F}$ besitzt das Potential $\varphi(x, y, z) = y(x + z)$. Bestätige dies und berechne damit das Kurvenintegral.

65. Hausaufgabe (4 Punkte) Berechne das Integral $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ des Vektorfeldes $\underline{F}$ längs der Kurve C, wobei

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}, \qquad C: \ \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} t + \sin(\pi t/4) \\ t \\ 3\cos(\pi t/4) \end{bmatrix}, \quad -2 \le t \le 1.$$

einmal mit Hilfe des Potentials $\varphi(x, y, z) = xyz$ und ein andermal direkt, d.h., ohne das Potential zu verwenden.

66. Tafelaufgabe Das von einem sich entlang der z-Achse erstreckenden stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld hat die Feldstärke

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -y/(x^2 + y^2) \\ x/(x^2 + y^2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{wenn } x^2 + y^2 > 0.$$

Berechne $\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ für die geschlossene Kurve

$$C: \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Besitzt $\underline{F}$ in seinem Definitionsbereich ein Potenzial?

67. Tafelaufgabe Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{F}(x, y) = [xy, ye^x]^T$. Sei C die stückweise glatte Kurve in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die vier Seiten des Rechtecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ und $(0, 1)$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Berechne das Kurvenintegral $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$. Besitzt $\underline{F}$ ein Potenzial?

68. Tafelaufgabe Sei $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor. Bestimme die Rotation des Vektorfeldes

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{2}\underline{w} \times \underline{r}.$$

Abgabe: Dienstag,19.01.10 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 18.01.2010

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 13

69. Zeige, dass die Rotation des Vektorfeldes $\underline{F}$ in der Aufgabe 66 verschwindet. Warum ist dies kein Widerspruch zu der bereits festgestellten Tatsache, dass $\underline{F}$ kein Gradientenfeld ist?

70. Tafelaufgabe Berechne für das Vektorfeld $\underline{u}(x, y, z) = [3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz]^T$ den Vektor $\operatorname{grad}(\underline{u} \cdot \operatorname{rot} \underline{u})$ im Punkt $(1, -1, 1)$.

71. Welche der folgenden Vektorfelder $\underline{F}(x, y, z)$ auf $\mathbb{R}^3$ haben ein Potential? Bestimme das Potential gegebenenfalls.

a) $\underline{F} = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$ **b)** $\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$

72. Tafelaufgabe Weise nach, dass die Rotation von $\underline{F} = e^{xyz}[yz, zx, xy]^T$ verschwindet und berechne ein Potential.

73. Hausaufgabe (4 Punkte) Zeige, dass die Rotation des Vektorfeldes $\underline{F}$ verschwindet, bestimme mittels unbestimmter Integration ein Potential für $\underline{F}$, und berechne das Kurvenintegral $\int_C \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$, wobei

$$\underline{F} = xe^{y-z} \begin{bmatrix} 2z \\ xz \\ x(1-z) \end{bmatrix}, \qquad C : \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

74. Tafelaufgabe Der Mantel S eines Rotationskörpers mit der z-Achse als Drehachse ist mit einer C^1-Funktion $R : [a, b] \to]0, \infty[$ wie folgt gegeben:

$$S : \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R(z) \quad \text{für } a \leq z \leq b.$$

Gib eine Parameterdarstellung für S an. Leite eine Formel für den Flächeninhalt $F(S)$ her.

Abgabe: Dienstag,26.01.10 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Hansen 25.01.2010

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 14

75. Tafelaufgabe Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius $R > 0$ wird durch die Angabe dreier Eckpunkte ein Dreieck D festgelegt. Ein Eckpunkt ist der Nordpol. Die beiden anderen liegen auf einem Breitenkreis mit $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ und befinden sich an den Orten mit den Längengraden $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$. Welchen Flächeninhalt hat D?

76. Tafelaufgabe Berechne $I = \int_S \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{S}$ für

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} zx \\ zy \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Dabei ist S durch die in Richtung der positiven z-Achse weisende Normale zu orientieren.

77. Tafelaufgabe Finde eine Parameterdarstellung für die Fläche

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \; -1 \leq z \leq 2.$$

Dabei ist die Orientierung von S durch das aus der Kugel mit Radius 3 weisende Normalenfeld gegeben. Berechne für das konstante Vektorfeld $\underline{F} = [1,2,3]^t$ das Flächenintegral $\int_S \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{S}$.

78. Hausaufgabe (4 Punkte) Berechne das Integral $\int_S \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{S}$ von $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r}$ über die Fläche

$$S: \quad \underline{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2 + 2v^2 \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } u^2 + 2v^2 \leq 1.$$

79. Sei $S = G_f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), \, (x,y) \in D\}$ der Graph einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gib eine Formel an für einen Normalenvektor an S bei einem gegebenen Punkt von S. Speziell für $f(x,y) = x^2 + x^3$ ist ein Normalenvektor an S bei $[1,1,2]^T \in S$ zu bestimmen.

Abgabe: Dienstag, 02.02.10 um 12.45 Uhr im grünen Kasten auf Ebene D1

Die Serie der Hausaufgaben ist mit diesem Blatt beendet. Die Summe der Punktzahlen der Hausaufgaben beträgt 54. Wer mindestens 27 Punkte erzielt hat, erzielt einen Bonus für die von mir gestellten Klausuren zur Veranstaltung Mathematik 3 für Maschinenbauer dieses Semesters.

Hansen 01.02.2010

Mathematik 3 für Maschinenbauer

Aufgabenblatt 15

80. Berechne das Integral

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0} 2z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Der Wert des Integrals stimmt mit I aus der Aufgabe 76 überein. Warum?

81. Verifiziere den Gaußschen Integralsatz $\int_B \operatorname{div} \underline{F}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial B} \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{S}$ für die Einheitskugel

$$B: \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

und das Vektorfeld $\underline{F}(\underline{r}) = |\underline{r}|^2 \underline{r}, \quad \underline{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

82. Zeige, dass für jeden Vektor $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ durch das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial B} (\underline{r} - \underline{a}) \cdot \mathrm{d}\underline{S}$$

das Dreifache des Volumens des Körpers $B \subset \mathbb{R}^3$ gegeben wird.

83. Zeige, dass $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F} = 0$ gilt für jedes zweimal stetig differenzierbare dreidimensionale Vektorfeld $\underline{F}$.