Kapitel 2

Systeme Lineare Gleichungen

2.1 Vorbetrachtungen

Wir werden lineare Gleichungssysteme systematisch an späterer Stelle studieren. Hier wollen wir einsehen, dass schon mit geringem begrifflichen Aufwand die praktische (d.h. algorithmische) Lösung solcher Gleichungssysteme gelingt.

1.1 Ist ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

aus m Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, so nennen wir das $m \times n$-Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

die **Koeffizientenmatrix** und die Spalte

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{die } \textbf{rechte Seite}$$

des Gleichungssystems. Durch Zusammenfassen der $m \times n$-Matrix A mit der m-Spalte $\mathfrak{b}$ erhalten wir die sog. **erweiterte Matrix**

$$[A, \mathfrak{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{1n} & b_m \end{array}\right],$$

welche das lineare Gleichungssystem (2.1) vollständig beschreibt. Lösungen des Gleichungssystems schreiben wir als Spaltenvektoren mit n Einträgen (n-*Vektoren*)

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.2 Im Fall $m = n$ nennen wir A eine **quadratische Matrix**. Die $n \times n$-Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ist ein Beispiel einer quadratischen Matrix und heißt **Einheitsmatrix**. Zur Hervorhebung des Formats $n \times n$ werden wir sie manchmal auch mit E_n bezeichnen. Für $A = E_n$ hat das zugehörige Gleichungssystem die Form

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n & = & b_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_n & = & b_m. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich *eindeutig lösbar* mit der Lösung

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Montag, 10. November 2003

Satz 1.3 *Die* **Lösungsmenge** *eines linearen Gleichungssystems* **ändert sich nicht** *bei einer der folgenden Operationen*

(1) *Vertauschen zweier Gleichungen.*

(2) *Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Faktor* $\neq 0$.

(3) *Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.*

Ein gegebenes System werden wir später mit solchen Umformungen solange vereinfachen, bis wir die Lösungsmenge des vereinfachten — und damit auch des ursprünglichen — Systems ablesen können.

Beweis. (1), (2) sind klar, nur (3) bedarf der Begründung. Seien also $i \neq k$ aus dem Bereich $1, \dots, m$. Wir betrachten die i-te und die k-te Gleichung

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jede Lösung der beiden Gleichungen ist auch eine Lösung von

$$(a_{i1} + aa_{k1})x_1 + (a_{i2} + aa_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + aa_{kn})x_n = a_i + aa_k \tag{2.3}$$

und damit der Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{i1} + aa_{k1})x_1 + (a_{i2} + aa_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + aa_{kn})x_n &= a_i + aa_k \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Halten wir fest: Jede Lösung von (2.2) ist auch eine von (2.4). Aus (2.4) erhalten wir aber (2.2) zurück, indem wir das $(-a)$-fache der zweiten Gleichung von (2.4) zur ersten Gleichung von (2.4) addieren. Mit obigem Schluss ist jede Lösung von (2.4) dann auch eine von (2.2).

Somit haben (2.2) und (2.4) dieselbe Lösungsmenge. □

1.4 Für die zugehörige erweiterte Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ eines linearen Gleichungssystems liest sich das so:

Jede Operation einer der folgenden drei Typen

- Vertauschen zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\neq 0$,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile

macht aus $[A, \mathfrak{b}]$ eine neue “erweiterte” Matrix $[A'|\mathfrak{b}']$, für welche das zugeordnete Gleichungssystem dieselbe Lösungsmenge hat wie das Ausgangssystem.

1.5 Die Schritte 1.2 und 1.4, die beide für sich genommen ganz naheliegend[1] sind, führen zu folgendem **Lösungsversuch** für ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Matrix A:

Idee 1.5 *Forme* $[A|\mathfrak{b}]$ *solange durch* **elementare Zeilenumformungen** *um bis die Form*

$$[E|\mathfrak{c}]$$

erreicht ist, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. In diesem Fall ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$$

die eindeutig bestimmte Lösung von $(*)$.

[1] Mathematiker haben es sich angewöhnt stattdessen “trivial” zu sagen.

Häufig klappt's:

Beispiel 1.6 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 3 \end{aligned}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

und den markierten elementaren Zeilenumformungen. Folglich ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar mit Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mitunter klappt's nicht:

Beispiel 1.7 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 &= 13 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 18 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & 6 & 18 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

und den markierten elementaren Zeilenumformungen. Das zur letzten erweiterten Matrix gehörige Gleichungssystem ist ersichtlich **nicht lösbar**, da seine letzte Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$ keine Lösung besitzt.

Donnerstag, 20. November 2003

Bisher haben wir Beispiele für eindeutig lösbare und für unlösbare lineare Gleichungssysteme gesehen. Es kommt auch vor, dass ein Gleichungssystem mehrfach lösbar ist:

Beispiel 1.8 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 &= 13 \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 18 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & 6 & 18 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \\ &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Die Lösungen des Ausgangssystems stimmen daher mit den Lösungen des umgeformten Gleichungssystems $x_1 + 2x_3 = 5$, $x_2 = 3$ überein. Setzen wir abkürzend $x := -x_3$, so sind die Lösungen durch die Menge aller

$$\begin{pmatrix} 5-2x \\ 3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei x ein beliebiger Skalar ist. Wir haben hier somit unendlich viele Lösungen.

2.2 Die Struktur der Lösungsmenge

2.1 Motiviert durch die obigen Beispiele führen wir einige Überlegungen zur Lösbarkeit und zur Lösungsstruktur eines linearen Gleichungssystems durch. Sei — wie im letzten Abschnitt — ein lineares Gleichungssystem (*)

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

und der rechten Seite

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir nennen

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathfrak{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

die **Spalten** der Matrix A. (*) lässt sich dann umschreiben zur Linearkombinationsaufgabe

$$(*') \qquad x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}.$$

Wir nennen das zur erweiterten Matrix $[A|\mathfrak{o}]$ gehörige Gleichungssystem (**), äquivalent die Linearkombinationsaufgabe

$$(**') \qquad x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

das zugehörige **homogene Gleichungssystem** und nennen (*) oder auch das gleichbedeutende (*') ein inhomogenes Gleichungssystem[2].

[2]Strikt gesprochen ist für die Inhomogenität $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ vorauszusetzen. Für uns ist es nachfolgend jedoch bequemer, *inhomogenes Gleichungssystem* als Oberbegriff zu interpretieren, der den Begriff *hogenes Gleichungssystem* mitumfasst.

Die Menge $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ aller n-Spalten mit reellen Einträgen bildet einen Vektorraum, den wir mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Für $n = 3$ haben wir uns davon im Detail überzeugt, für allgemeines n gelten die für $n = 3$ durchgeführten Beweisführungen ganz analog. Die Lösungen von (*) oder (***) sind daher gewisse Elemente des $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.1 *(a) Das System* $(*)$ *ist genau dann lösbar, wenn sich* $\mathfrak{b}$ *als Linearkombination der Spalten* $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *von* A *schreiben lässt.*

(b) Sind $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *Lösungen des homogenen Gleichungssystems, so auch jede Linearkombination* $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}$*.*

(c) Ist $\mathfrak{y}$ *eine Lösung von* $(*)$*, so gilt:*

$\mathfrak{z}$ *ist genau dann ebenfalls eine Lösung von (*), wenn*

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x}$$

für eine Lösung $\mathfrak{x}$ *des homogenen Gleichungssystem* $(**)$*.*

Beweis. (a) folgt sofort aus (*').

(b) rechnet man leicht nach; verwende hierzu Form (*').

(c) Nach Voraussetzung ist

$$y_1\mathfrak{a}_1 + y_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + y_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}.$$

Es gilt somit

$$z_1\mathfrak{a}_1 + z_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + z_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$$

genau dann, wenn

$$(z_1 - y_1)\mathfrak{a}_1 + (z_2 - y_2)\mathfrak{a}_2 + \cdots + (z_n - y_n)\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o},$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =_{\text{def}} \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

eine Lösung des homogenen Systems (**) ist. □

Den vorstehenden Satz können wir wie folgt formulieren:

(1) Die Lösungen des **homogenen Gleichungssystems** (*) bilden einen Unterraum H des $\mathbb{R}^n$.

(2) Falls das **inhomogene Gleichungssystem** (**) eine Lösung, sagen wir $\mathfrak{x}_0$, hat[3], so ist die Lösungsmenge L des homogenen Gleichungssystems gerade

$$L = \mathfrak{x}_0 + H := \{\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{h} \mid \mathfrak{h} \in H\}.$$

[3] Wir sprechen dann auch von einer speziellen Lösung.

In Worten: *Sei* $\mathfrak{x}_0$ *eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems. Jede Lösung* $\mathfrak{x}$ *des inhomogenen Gleichungssystems hat dann die Form* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{h}$*, wobei* $\mathfrak{h}$ *eine Lösung des homogenen Gleichungssystems ist. Umgekehrt ist jeder Vektor der Form* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{h}$*, für den* $\mathfrak{h}$ *eine Lösung des homogenen Gleichungssystems ist, eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.*