(*Sp* 4) $$(a\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = a(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}).$$

Insbesondere ist das Spatprodukt in jedem Faktor linear.

Montag,3. November 2003

Satz 9.2 *Drei Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ *sind genau dann linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 0$ *ist.*

Beweis. 1. Falls $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 0$, ist das Volumen des von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ aufgespannten Spats gleich 0 und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ liegen in einer Ebene durch 0.

2. Falls $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ linear abhängig sind, ist ohne Einschränkung

$$\mathfrak{a}_1 = a\mathfrak{a}_2 + b\mathfrak{a}_3$$

mit geeigneten Zahlen a, b. Es folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) &= (a\mathfrak{a}_2 + b\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \\ &= a(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) + b(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$ □

9.3 Sei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ ein System von 3 linear unabhängigen Vektoren, also eine Basis. Wir haben gesehen (6.7), dass man jeden Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig als Linearkombination

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + a_3\mathfrak{a}_3$$

darstellen kann. Die Eindeutigkeit der “Koordinaten” (a_1, a_2, a_3) legt den Versuch nahe, sie formelmäßig aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ zu ermitteln:

Satz 9.4 (Cramer-Regel) *Falls* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \neq 0$ *und*

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + a_3\mathfrak{a}_3 \tag{1.1}$$

gilt, berechnen sich die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 *mittels der Formeln*

$$a_1 = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)}{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)}, \quad a_2 = \frac{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_3)}{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)}, \quad a_3 = \frac{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)}. \tag{1.2}$$

Beweis. Wir multiplizieren Formel (1.1) von rechts im Sinne des skalaren Produkts mit $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) &= a_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) + a_2(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) + a_3(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \\ &= a_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3). \end{aligned}$$

Es folgt der behauptete Ausdruck für a_1. Entsprechend ermitteln wir a_2 und a_3. □

1.10 Mehrfache Produkte

10.1 Was lässt sich über $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ sagen? Ohne Einschränkung können wir $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$ annehmen. Da $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ auf $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ senkrecht steht, muss $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ in der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene durch den Nullpunkt liegen, daher die Form

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = b\,\mathfrak{b} + c\,\mathfrak{c}$$

haben.

Zur Bestimmung der Koeffizienten b und c sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, die wir hier nicht im Einzelnen schildern. Wir beschränken uns aus Zeitgründen vielmehr auf die nachträgliche Verifizierung des Ergebnisses.

Satz 10.2 (Graßmannscher Entwicklungssatz) *Für je drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gilt:*

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle \mathfrak{b} - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \mathfrak{c}. \tag{1.3}$$

Beweis. Wir beachten zunächst, dass beide Seiten der Gleichung (1.3) in jedem der drei Argumente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear sind. Es reicht daher die Formel für den Fall nachzuweisen, dass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ unabhängig voneinander die Vektoren einer Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ durchlaufen. Von dieser Basis können wir zusätzlich annehmen, dass sie orthonormal ist. Die verbleibende Überprüfung von Formeln wie

$$\mathfrak{e}_1 \times (\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1) = \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1 \rangle \mathfrak{e}_3 - \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_3 \rangle \mathfrak{e}_1$$

ist dann offensichtlich. □

1.11 Koordinatendarstellungen

Donnerstag,6. November 2003

11.1 Wir fixieren für die folgenden Betrachtungen eine Orthonormalbasis

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 \tag{1.4}$$

des Anschauungsraumes. Damit verlangen wir

$$\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{falls } i \neq k. \end{cases}$$

[Das hier eingeführte *Kronecker-Symbol* δ_{ik} wird Ihnen noch häufig begegnen.] Ferner setzen wir voraus, dass $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ *in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem* bilden, also

$$\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2$$

gilt.

> *Eine solche Orthonormalbasis* $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$*, welche zugleich ein Rechtssystem ist, können wir leicht herstellen:* Wir starten mit zwei linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die wir ohne Einschränkung **normiert** annehmen und bilden
>
> $$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \mathfrak{a}.$$
>
> Es ist $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{o}$ (warum?) und ferner $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}' \rangle = 0$. Wir setzen nun
>
> $$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{b}'}{|\mathfrak{b}'|}, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2$$
>
> und haben damit eine Orthonormalbasis gefunden.

11.2 Wir halten weiterhin die Orthonormalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ fest. Nach Satz 6.7 — oder auch unter Verwendung der Cramerschen Regel Satz 9.4 — können wir jeden Vektor $\mathfrak{a}$ **eindeutig** als Linearkombination

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3 \tag{1.5}$$

schreiben. Nebenbei ist leicht zu sehen, dass im behandelten Kontext $a_i = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e}_i \rangle$ gilt. Wir nennen das Tripel a_1, a_2, a_3 die **Koordinaten** von $\mathfrak{a}$ und schreiben anstelle von (1.5) auch

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Übereinkunft gilt insbesondere

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.3 Rechenregeln.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ aa_2 \\ aa_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1.10) \\ &:= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzten beiden Eigenschaften von der Determinantenschreibweise Gebrauch machen. Die 2×2-**Determinante** wird durch die Festsetzung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

erklärt und die 3×3-**Determinante** wie in Formel (1.10) durch — wie man sagt — *Entwicklung nach der letzten Spalte* auf die Berechnung von 2×2-Determinanten zurückgeführt. Die auch im folgenden verwendete Bezeichnung := weist darauf hin, dass das neu eingeführte Symbol auf der linken Seite durch den Ausdruck auf der rechten Seite erklärt wird.

Beweis. Zu (1.6): Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + a_3\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{b} &= b_1\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{e}_2 + b_3\mathfrak{e}_3, \end{aligned}$$

woraus

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1)\mathfrak{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathfrak{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathfrak{e}_3$$

folgt.
Zu (1.7): Es ist

$$a(a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + a_3\mathfrak{e}_3) = (aa_1)\mathfrak{e}_1 + (aa_2)\mathfrak{e}_2 + (aa_3)\mathfrak{e}_3.$$

Zu (1.8):

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + a_3\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{b} &= b_1\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{e}_2 + b_3\mathfrak{e}_3 \end{aligned}$$

impliziert wegen $\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle = \delta_{ik}$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{3} a_i\mathfrak{e}_i, \sum_{k=1}^{3} b_k\mathfrak{e}_k \rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} a_i b_k \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle \\ &= \sum_{i}^{3} a_i b_i. \end{aligned}$$

Zu (1.9): Mit obigen Bezeichnungen ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\mathfrak{e}_i \right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} b_k\mathfrak{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} a_i b_k \, \mathfrak{e}_i \times \mathfrak{e}_k \\ &= a_1 b_2 \, \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 + a_1 b_3 \, \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_3 + a_2 b_1 \, \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_1 \\ &+ a_2 b_3 \, \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 + a_3 b_1 \, \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 + a_3 b_2 \, \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_2 \\ &= a_1 b_2 \mathfrak{e}_3 - a_1 b_3 \, \mathfrak{e}_2 - a_2 b_1 \mathfrak{e}_3 \\ &+ a_2 b_3 \, \mathfrak{e}_1 + a_3 b_1 \, \mathfrak{e}_2 + a_3 b_2 \, \mathfrak{e}_1 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \, \mathfrak{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \, \mathfrak{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \, \mathfrak{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathfrak{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathfrak{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathfrak{e}_3. \end{aligned}$$

Zu (1.10): Es ist

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) &= \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3.$$

□

Bemerkung 11.4 Dass $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ ein Orthonormalsystem ist, fand bereits in (1.8) Verwendung. Dass es sich zudem um ein Rechtssystem handelt

$$\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3 \quad \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_1 = -\mathfrak{e}_3$$

$$\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1 \quad \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_1$$

$$\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 \quad \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_3 = -\mathfrak{e}_2$$

ist wichtig für (1.9) und folglich auch für (1.10).

Rückblick und Ausblick 11.5 Wir haben mit dem Nachweis der Rechenregeln (1.6) – (1.10) einen wichtigen Punkt erreicht:

1. Wir können von nun an mit Vektoren *ohne Rückgriff auf die räumliche Anschauung umgehen*, und sowohl Vektorrechnung wie geometrische Eigenschaften direkt auf das Rechnen mit reellen Zahlen zurückführen.

2. Durch die Darstellung als Zahlentripel liegt eine für Rechnungen geeignete zugleich kompakte wie elegante Bezeichnung von Vektoren vor.

3. Das Rechnen mit Spalten ist offensichtlich nicht auf 3 Koordinaten beschränkt[9]. Durch Bildung von n-Tupeln reeller Zahlen werden wir automatisch auf das Konzept eines n-dimensionalen Vektorraums aufmerksam gemacht.

4. Aus diesem erweiterten Blickwinkel erscheint die der anschaulichen Vektorrechnung zugrunde liegende Dreidimensionalität eher zufällig.

Wir beachten jedoch, dass die Auswahl von Koordinaten ein Element der Willkür enthält: die Koordinatendarstellung von Vektoren erfordert die künstliche Auswahl einer Basis (hier sogar Orthonormalbasis). Die früheren Überlegungen zeigen überdies, dass das Wechselspiel zwischen Geometrie einerseits und Algebra andererseits auch basisfrei und damit koordinatenunabhängig funktioniert.

[9]Vektor- und Spatprodukt nehmen wir von dieser Feststellung vorläufig aus, erst Determinantentheorie und äußere Produktbildung erlauben die korrekte Generalisierung von Vektor- und Spatprodukt auf höherdimensionale Fälle.

1.12 Vorläufiges über Lineare Gleichungssysteme

Wir werden lineare Gleichungssysteme systematisch an späterer Stelle studieren. Hier wollen wir einsehen, dass schon mit geringem begrifflichen Aufwand die praktische (d.h. algorithmische) Lösung solcher Gleichungssysteme gelingt.

12.1 Ist ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.11}$$

aus m Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, so nennen wir das $m \times n$-Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

die **Koeffizientenmatrix** und die Spalte

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{die } \textbf{rechte Seite}$$

des Gleichungssystems. Durch Zusammenfassen der $m \times n$-Matrix A mit der m-Spalte $\mathfrak{b}$ erhalten wir die sog. **erweiterte Matrix**

$$[A, \mathfrak{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{1n} & b_m \end{array}\right],$$

welche das lineare Gleichungssystem (1.11) vollständig beschreibt. Lösungen des Gleichungssystems schreiben wir als Spaltenvektoren mit n Einträgen (n-*Vektoren*)

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 12.2 Im Fall $m = n$ nennen wir A eine **quadratische Matrix**. Die $n \times n$-Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ist ein Beispiel einer quadratischen Matrix und heißt **Einheitsmatrix**. Zur Hervorhebung des Formats $n \times n$ werden wir sie manchmal auch mit E_n bezeichnen. Für $A = E_n$ hat das zugehörige Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n &= b_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich *eindeutig lösbar* mit der Lösung

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Montag, 10. November 2003

Satz 12.3 *Die* **Lösungsmenge** *eines linearen Gleichungssystems* **ändert sich nicht** *bei einer der folgenden Operationen*

(1) *Vertauschen zweier Gleichungen.*

(2) *Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Faktor* $\neq 0$.

(3) *Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.*

Beweis. (1), (2) sind klar, nur (3) bedarf der Begründung. Seien also $i \neq k$ aus dem Bereich $1, \ldots, m$. Wir betrachten die i-te und die k-te Gleichung

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Jede Lösung der beiden Gleichungen ist auch eine Lösung von

$$(a_{i1} + aa_{k1})x_1 + (a_{i2} + aa_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + aa_{kn})x_n = a_i + aa_k \tag{1.13}$$