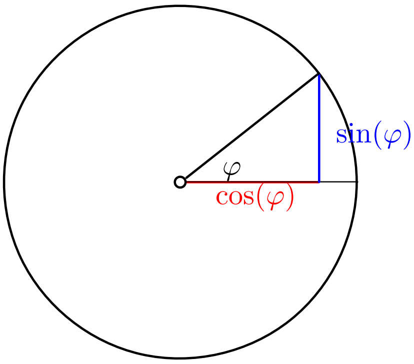
1.7 Inneres Produkt (Skalarprodukt)

Montag, 27. Okt. 2003

7.1 Wir erinnern zunächst an die **Winkelfunktionen** sin und cos, deren Wirkung wir am Einheitskreis veranschaulichen:



Sinus und Cosinus

Winkel messen wir hier im Bogenmaß, in mathematisch positiver Richtung mit positivem, in entgegengesetzter Richtung mit negativem Vorzeichen.

7.2 *Das* **innere Produkt** $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ *(oder auch* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$*) der Vektoren* $\mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{b}$ *ist die durch*

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$$

erklärte reelle Zahl.

> Dabei wählen wir hier den Winkel $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets im Intervallbereich $0 \le \varphi \le \pi$. Falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht Null sind, ist φ in diesem Intervallbereich eindeutig bestimmt. Falls $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ der Nullvektor ist, lassen wir für φ jeden der Werte $0 \le \varphi \le \pi$ zu.

Für das innere Produkt gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

(S 1) $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle$.

(S 2) $\langle a\,\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = a\,\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$.

(S 3) $\langle \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle + \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle$.

(S 4) $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = |\mathfrak{a}|^2$.

Beweis. Zu (S 1):

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= |\mathfrak{b}| \cdot |\mathfrak{a}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}))\\ &= \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\rangle.\end{aligned}$$

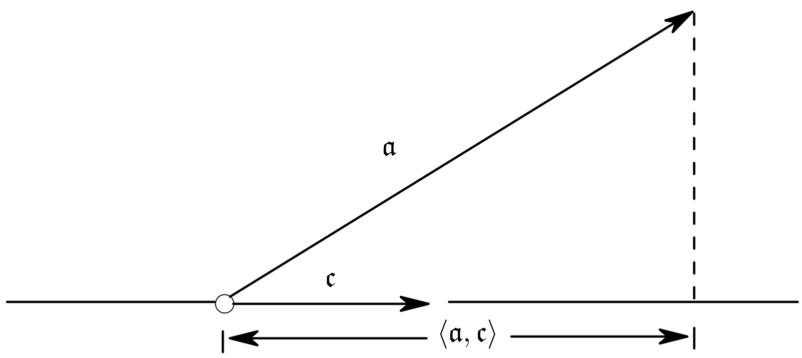
Zu (S 2): Für $a = 0$ ist alles klar. Sei nunmehr $a > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}\langle a\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle &= |a\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(a\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= a|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= a\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle.\end{aligned}$$

Es folgt ferner (immer noch $a > 0$ voraussetzend)

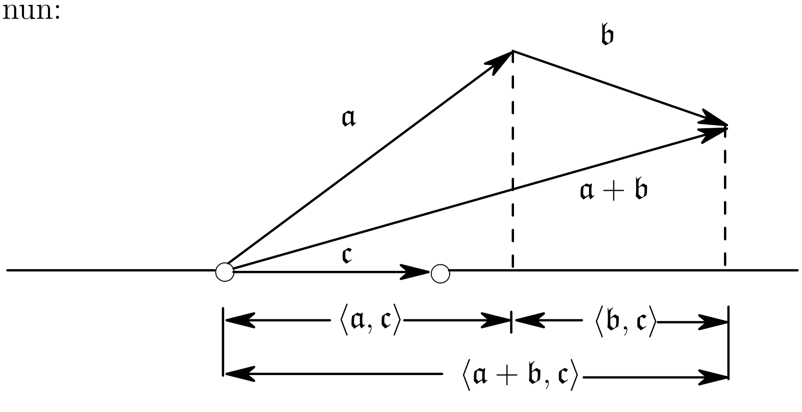
$$\begin{aligned}\langle -a\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle &= |-a\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= a|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\pi - \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= (-a)|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))\\ &= (-a)\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle.\end{aligned}$$

Zu (S 3): Mit Hilfe von (S 2) können wir uns auf den Fall $|\mathfrak{c}| = 1$ beschränken. In diesem Fall ist $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle$ die Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf die Gerade mit Richtung $\mathfrak{c}$:



Berechnung von $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}\rangle$ für $|\mathfrak{c}| = 1$.

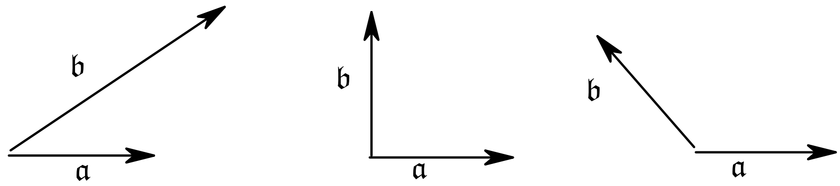
Betrachte nun:



Die Formel $\langle \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{c}\rangle + \langle \mathfrak{b},\mathfrak{c}\rangle$.

Zu (S 4): Wir beachten $\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0$ und $\cos 0 = 1$. $\square$

7.3 Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir erkennen, ob zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen oder einen spitzen bzw. stumpfen Winkel bilden:



$\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle > 0$ $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0$ $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle < 0$

Spitze, rechte bzw. stumpfe Winkel.

Falls $\langle \mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle = 0$ *sagen wir, dass* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zueinander* **orthogonal** *sind.* Der Nullvektor ist nach dieser Erklärung zu jedem Vektor orthogonal.

7.4 *Ein System* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *von paarweise orthogonalen (d.h.* $\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j\rangle = 0$ *für* $i \neq j$*) Vektoren ungleich* $\mathfrak{o}$ *nennen wir ein* **Orthogonalsystem**. *Falls die* $\mathfrak{a}_i$ *zusätzlich Einheitsvektoren sind, sprechen wir von einem* **Orthonormalsystem**.

Satz 7.4 *Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ein Orthogonalsystem und $a_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + a_i\mathfrak{a}_i + \cdots + a_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$. Durch 'Multiplikation' mit $\mathfrak{a}_i$ folgt

$$a_1\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_i\rangle + \cdots + a_i\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i\rangle + \cdots + a_n\langle \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_i\rangle = 0,$$

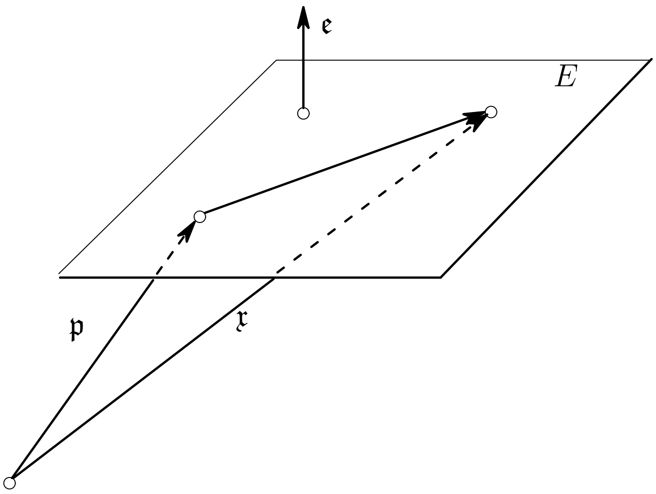
somit unter Beachtung der Orthogonalität

$$a_i|\mathfrak{a}_i|^2 = a_i\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i\rangle = 0.$$

Da $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{o}$, folgt hieraus $a_i = 0$. $\square$

Donnerstag 30. Okt. 2003

7.5 Hessesche Normalform einer Ebene Gegeben seien ein Punkt $\mathfrak{p}$ der Ebene E und ein auf E senkrecht stehender **Einheitsvektor** $\mathfrak{e}$. (Es gibt deren zwei, nämlich $\mathfrak{e}$ und $-\mathfrak{e}$. Die Auszeichnung einer der beiden Möglichkeiten ermöglicht die Ebene zu orientieren. Wir wollen diesen Gedankengang hier jedoch nicht weiterverfolgen.)



Ebene, gegeben durch Punkt und Stellungsvektor.

Die "in der Ebene liegenden" Vektoren wie $\mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ sind dadurch gekennzeichnet, dass sie zum Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ orthogonal sind. Also ist $|\mathfrak{e}| = 1$ und

(1) $$\langle \mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle = 0$$

eine Gleichung, der genau die Punkte $\mathfrak{x}$ von E genügen. D.h.

$$E = \{\mathfrak{x} \mid \langle \mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle = 0\}\,.$$

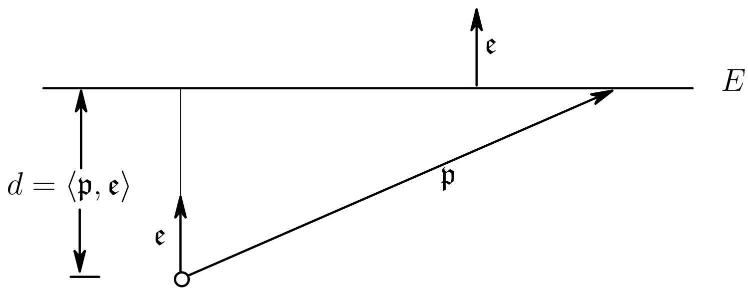
Wir können Gleichung (1) umformen zu

(2) $$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e} \rangle = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle$$

oder indem wir die Größe $d = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle$ einführen zu

(3) $$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e} \rangle = d.$$

Für $|\mathfrak{e}| = 1$ sind (1) bzw. (3) Darstellungen der Ebene E in **Hessescher Normalform**. Wir bemerken, dass in (3) der Punkt $\mathfrak{p}$ nicht mehr erscheint. Die Bedeutung der Zahl d ergibt sich aus der folgenden Skizze:

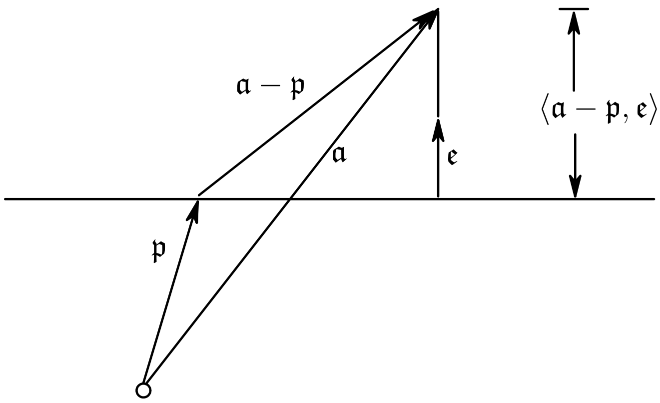


Der Abstand des Nullpunkts von der Ebene.

Die Größe $d = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle$ ist somit der **orientierte Abstand** des Nullpunkts N von der Ebene E. (Im skizzierten Fall ist $d = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle > 0$. Wir beachten hier, dass Ersetzen von $\mathfrak{e}$ durch $-\mathfrak{e}$ die Ebene E nicht, wohl aber das Vorzeichen des Abstands ändert.

Achtung: Für diese Interpretation ist wichtig, dass $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor ist.

7.6 Abstand Punkt-Ebene.
Die Ebene E sei in Hessescher Normalform $\langle \mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle = 0$ mit $|\mathfrak{e}| = 1$ gegeben.



Abstand eines Punktes von einer Ebene.

Somit ist $|\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle|$ der Abstand und entsprechend $\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle$ der **orientierte Abstand** des Punktes $\mathfrak{a}$ von der Ebene E. Die Punkte des durch E bestimmten Halbraumes, in welchen der Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ weist, haben positiven Abstand, die des anderen Halbraumes haben negativen Abstand von E.

Halten wir fest: Den orientierten Abstand eines Punktes $\mathfrak{a}$ zu einer in Hessescher Normalform $\langle \mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{e} \rangle = 0$, beziehungsweise $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e} \rangle - d = 0$, gegebenen Ebene E erhalten wir durch Einsetzen von $\mathfrak{a}$ in die linke Seite der Ebenengleichung. Warum ist hier auf die Normierung des Stellungsvektors $\mathfrak{e}$ zu achten?

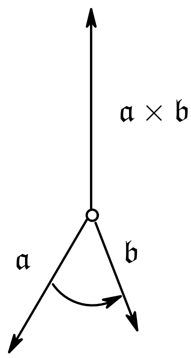
1.8 Äußeres Produkt (Vektorprodukt)

8.1 *Das* **äußere Produkt** $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ *(oder auch* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$*) von zwei Vektoren* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *ist wieder ein Vektor und wird bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:*

(1) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ *steht senkrecht auf* $\mathfrak{a}$ *und auf* $\mathfrak{b}$.

(1) $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$[6].

(1) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ *bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.*



3-Fingerregel oder Schraubenregel

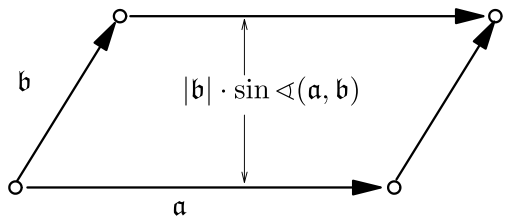
Man prüft nach, dass die Regeln

(V1) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$,

(V2) $(a\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = a(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$,

(V3) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$

gelten.



Hinweis: $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ ist die Fläche des von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Insbesondere ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ parallel sind. Somit: *Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *sind linear abhängig.*

(2) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *sind parallel.*

(3) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

[6] Wir erinnern an die Vereinbarung, den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im Intervall von 0 bis π zu wählen. Daher ist $\sin(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \geq 0$.

Wie das Skalarprodukt ist daher auch das Vektorprodukt in jedem Argument linear[7].

8.2 Von Parameter- zur Hesseschen Normalform.
Die Ebene E sei in Parameterform

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + s\mathfrak{b}_1 + t\mathfrak{b}_2 \quad \text{mit } \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{o}$$

gegeben. Offensichtlich steht der Vektor

$$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2}{|\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2|}$$

sowohl auf $\mathfrak{b}_1$ wie auf $\mathfrak{b}_2$ senkrecht und hat die Länge 1. Damit ist

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e} \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e} \rangle$$

die zugehörige Ebenengleichung in Hessescher Normalform.

8.3 Schnitt zweier Ebenen.
Seien

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_1 \rangle &= d_1, \quad |\mathfrak{e}_1| = 1 \\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{e}_2 \rangle &= d_2, \quad |\mathfrak{e}_2| = 1 \end{aligned}$$

die Gleichungen für zwei Ebenen E_1, E_2. Wir nehmen an, dass E_1 und E_2 **nicht parallel** sind und somit $\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 \neq \mathfrak{o}$ gilt. Ferner nehmen wir an, dass wir **einen** Punkt $\mathfrak{a}$ kennen, der beiden Ebenen gemeinsam ist, für den also

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e}_1 \rangle &= d_1 \\ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{e}_2 \rangle &= d_2 \end{aligned}$$

gilt[8]. Der Vektor $\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2$ steht senkrecht auf $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$. Alle Punkte der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\,\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2$ liegen daher sowohl in E_1 als auch in E_2. Die resultierende **Schnittgerade**

$$G = E_1 \cap E_2 = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in E_1 \text{ und } \mathfrak{x} \in E_2\}$$

erhalten wir somit als die Menge aller

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\,\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

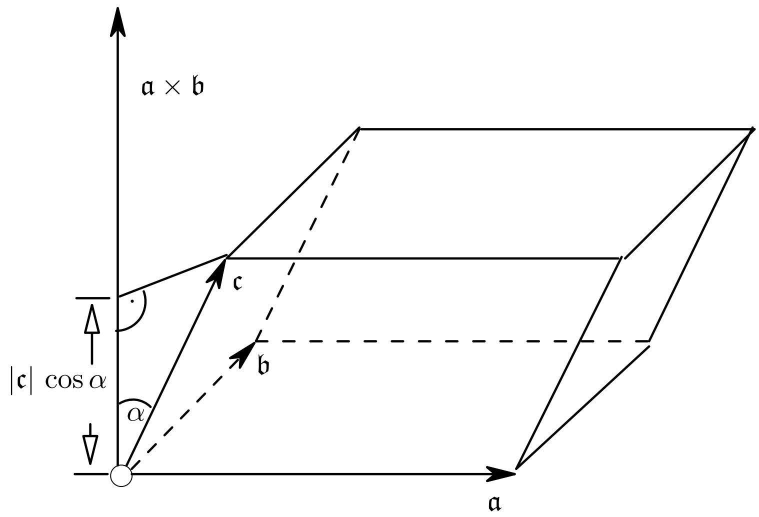
[7] Summen und Skalare lassen sich somit aus jedem Faktor herausziehen.
[8] Wie man einen solchen Schnittpunkt bestimmt, werden wir später sehen.

1.9 Das Spatprodukt

9.1 *Unter dem* **Spatprodukt** *der Vektoren* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *verstehen wir die Zahl*

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \rangle.$$

Somit ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| \cdot |\mathfrak{c}| \cdot \cos\alpha$, wobei $\alpha = \sphericalangle(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ ist.



Volumen eines Spats

Im skizzierten Fall ist $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ die Grundfläche F des von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aufgespannten Spats. Weiter ist $h = |\mathfrak{c}| \cdot \cos\alpha$ (für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$) die Höhe des Spats, somit $V = F \cdot h = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}||\mathfrak{c}| \cdot \cos(\alpha)$ sein **Volumen**. Sollte $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ sein, so ist $V = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$.

Das Spatprodukt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ interpretieren wir geometrisch als das **orientierte Volumen des von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aufgespannten Spats**. Dabei ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \geq 0$, falls $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein Rechtssystem bilden. Das Spatprodukt ändert sich folglich nicht bei zyklischer Vertauschung der Faktoren

(*Sp* 1) $$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Aber

(*Sp* 2) $$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}).$$

Ferner folgt aus den Rechenregeln für inneres und äußeres Produkt:

(*Sp* 3) $$(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) + (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{c}).$$

(*Sp* 4) $$(a\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = a(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}).$$

Insbesondere ist das Spatprodukt in jedem Faktor linear.