haben. In Mengenschreibweise ist

$$G = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Wir werden für diese einführenden Betrachtungen — im Interesse einer knappen Redeweise — jedoch häufig von der 'Geraden' $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$ reden oder $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$, $t \in \mathbb{R}$, als Parameterdarstellung der Geraden bezeichnen.

Fassen wir zusammen: *Ein Punkt $\mathfrak{x}$ liegt genau dann auf der Geraden G durch $\mathfrak{a}$ mit Richtung $\mathfrak{b}$ (also $\mathfrak{x} \in G$) wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$.*
Der Richtungsvektor $\mathfrak{b}$ muss natürlich verschieden von 0 sein, damit wirklich eine Gerade vorliegt.

Montag, 20. Oktober 03

Es ist leicht zu sehen, dass verschiedene Daten $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dieselbe Gerade bestimmen können. Es ist sehr lehrreich, sich in diesem Zusammenhang folgendes klar zu machen.
Gleichheit von Geraden: *Die durch*

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{a} + t\mathfrak{b} \\ \mathfrak{x}_0 &= \mathfrak{a}_0 + t_0\mathfrak{b}_0 \end{aligned}$$

gegebenen Geraden G und G_0 stimmen genau dann überein, wenn

(1) $$\mathfrak{b} = a\mathfrak{b}_0 \quad \text{mit } 0 \neq a \in \mathbb{R}$$

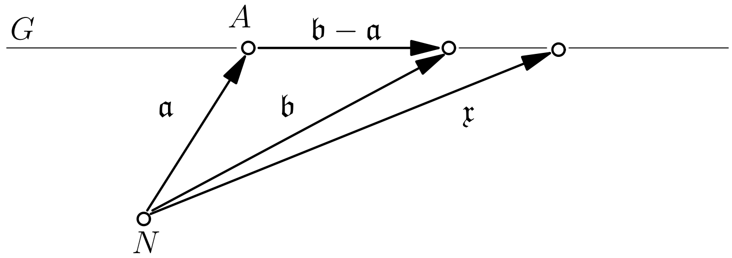
und

(2) $$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0 = b\mathfrak{b}_0 \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}$$

gilt.

Übung 5.1 *Wann sind die beiden Geraden (im Raum) parallel?*

1.5.3 Gerade, gegeben durch zwei Punkte



Gerade, gegeben durch zwei Punkte $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$

Die gesuchte Parameterdarstellung ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$.

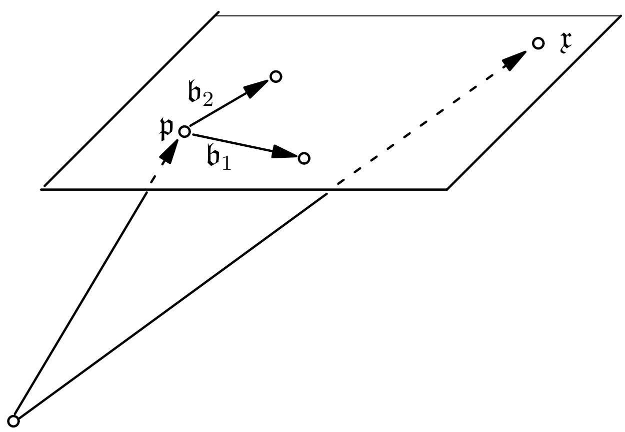
1.5.4 Ebene, gegeben durch einen Punkt und zwei Richtungen

Wir nennen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ **parallel** (vgl. auch Übung 5.1), wenn $\mathfrak{a}$ ein skalares Vielfaches von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}$ ein skalares Vielfaches von $\mathfrak{a}$ ist[5]. Falls $\mathfrak{a} \neq 0$ ist, folgt aus $\mathfrak{a} = a\mathfrak{b}$, dass notwendig $a \neq 0$. In diesem Fall ist dann $\mathfrak{b} = 1/a\mathfrak{a}$) seinerseits ein skalares Vielfaches von $\mathfrak{a}$.

Seien jetzt ein Vektor $\mathfrak{a}$ und zwei nicht parallele Vektoren $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{o}$ gegeben. Die Menge aller ‘Punkte

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + s_1\mathfrak{b}_1 + s_2\mathfrak{b}_2 \tag{1}$$

mit Skalaren s_1, s_2 ist die **Ebene durch $\mathfrak{a}$ mit den "Richtungen" $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$**.



Ebene, gegeben durch Punkt und zwei Richtungen

Die Formel (1) nennen wir auch eine **Parameterdarstellung der Ebene**.

1.5.5 Ebene durch 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte

Seien $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ derartige Punkte. Dann sind $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0$ nicht parallel und

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_0 + s_1(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0) + s_2(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0)$$

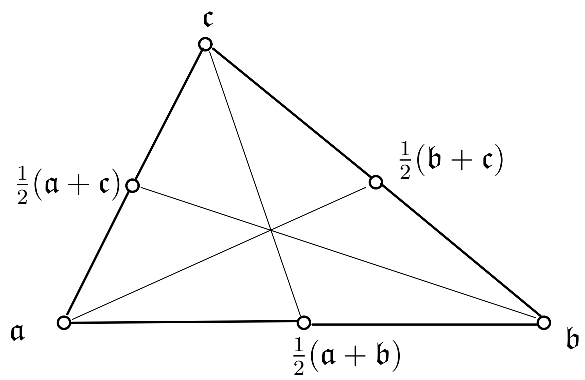
ist eine Parameterdarstellung der gesuchten Ebene.

Eine Ebene E hat ersichtlich verschiedene Parameterdarstellungen. Bei zwei in Parameterform gegebenen Ebenen ist es zudem schwieriger als im Geradenfall zu entscheiden, ob sie zusammenfallen oder zueinander parallel sind.

[5] Nach dieser Erklärung ist der Nullvektor zu jedem Vektor parallel.

1.5.6 Schnitt der Schwerlinien eines Dreiecks im Schwerpunkt

Die Schwerlinien eines Dreiecks verbinden definitionsgemäß die Ecken mit der Mitte der jeweils gegenüber liegenden Seite. Wir wollen zeigen, dass sich die Schwerlinien in einem Punkt, dem **Schwerpunkt des Dreiecks**, schneiden und dieser — von den Ecken ausgesehen — die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1 teilt.



Schwerlinien und Schwerpunkt eines Dreiecks

Es ist nämlich

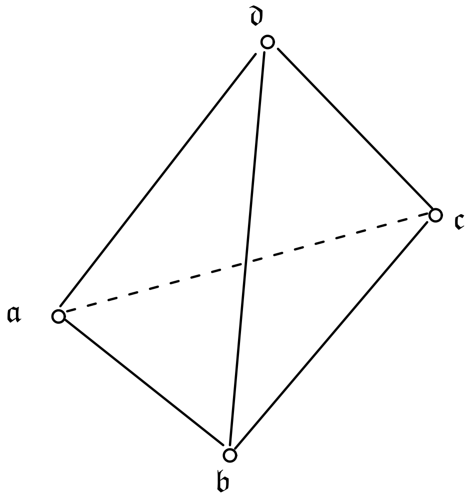
$$\begin{aligned} & \mathfrak{a}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})-\mathfrak{a}\right] \\ = \;& \mathfrak{b}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})-\mathfrak{b}\right] \\ = \;& \mathfrak{c}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-\mathfrak{c}\right] \\ = \;& \frac{1}{3}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})) \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ des Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ist somit durch die Formel

$$\mathfrak{s}=\frac{1}{3}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))$$

gegeben, die in offensichtlicher Weise die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke verallgemeinert.

Es ist jetzt leicht, die Formel für den **Schwerpunkt einer Pyramide** (Tetraeder) mit den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$



Schwerpunkt eines Tetraeders

zu erraten und zu beweisen:

Übung 5.2 *Die Schwerlinien eines Tetraeders, die jeweils eine Ecke mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite verbinden, schneiden sich in einem Punkt* $\mathfrak{s}$*, dem* Schwerpunkt des Tetraeders*. Ferner schneidet* $\mathfrak{s}$ *die Schwerlinien — jeweils vom Eckpunkt aus gesehen — im Verhältnis* $3:1$.

Donnerstag, 23. Oktober 2003

1.6 Lineare Unabhängigkeit, Dimensionsaxiom

6.1 *Ein System von Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *heißt* **linear abhängig***, wenn es Skalare* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *gibt, die nicht sämtlich* 0 *sind, so dass die* **Linearkombination**

$$a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + a_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o} \tag{1}$$

ist. Gibt es solche Skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nicht, so heißen die Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ **linear unabhängig**.

Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren können wir — im Einklang mit obiger Erklärung — wie folgt kennzeichnen:

6.2 Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bilden genau dann ein **linear unabhängig**es System, wenn Gleichung (1) nur für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ möglich ist. Anders formuliert, wenn aus dem Bestehen der Gleichung (1) folgt, dass $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ gelten muss.

Wir erläutern diese Begriffe an einer Reihe von Beispielen.

6.3 $\boxed{n = 1}$. *Ein Vektor* $\mathfrak{a}$ *ist genau dann linear abhängig, wenn* $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. *Somit ist* $\mathfrak{a}$ *genau dann linear unabhängig, wenn* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ *ist.*

Beweis. 1. Falls $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist, so folgt $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, also ist $\mathfrak{a}$ linear abhängig.
2. Falls $\mathfrak{a}$ linear abhängig ist, gibt es nach (6.1) eine Zahl $a \neq 0$ mit

$$a\mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

Weil $a \neq 0$ können wir $1/a$ bilden und erhalten

$$\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} = (\frac{1}{a}a)\mathfrak{a} = \frac{1}{a}\,(a\mathfrak{a}) = \frac{1}{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}.$$

□

6.4 $\boxed{n = 2}$. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ sind nach Definition genau dann linear abhängig, wenn es Skalare a_1, a_2 gibt, die nicht beide 0 sind und für die

$$a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_1 \neq 0$. Durch Auflösen obiger Beziehung nach $\mathfrak{a}_1$ folgt dann

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathfrak{a}_2.$$

Zwei linear abhängige Ortsvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ liegen daher auf einer Geraden durch den Nullpunkt N.

Mit etwas mehr Sorgfalt zeigt man, dass folgende Aussagen gleichbedeutend (äquivalent) sind:

(1) $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ *sind linear abhängig.*

(2) *Es gibt ein* $a \in \mathbb{R}$, *so dass* $\mathfrak{a}_1 = a\mathfrak{a}_2$ **oder** $\mathfrak{a}_2 = a\mathfrak{a}_1$, *d.h.* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *sind parallel.*

(3) *Die Ortsvektoren* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *liegen in einer Geraden durch den Nullpunkt* N.

6.5 $\boxed{n = 3}$. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind genau dann linear abhängig, wenn es Skalare a_1, a_2, a_3 gibt, von denen mindestens einer nicht 0 ist und für die

$$a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + a_3\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir durch Umnummerieren erreichen, dass $a_3 \neq 0$ gilt. Wir können die obige Gleichung nach $\mathfrak{a}_3$ auflösen und erhalten

$$\mathfrak{a}_3 = -\frac{a_1}{a_3}\mathfrak{a}_1 - \frac{a_2}{a_3}\mathfrak{a}_2.$$

Somit lässt sich $\mathfrak{a}_3$ aus $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ linear kombinieren, liegt somit in der durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ aufgespannten Ebene durch $\mathfrak{o}$. Dieser Schluss lässt sich umkehren und führt zur Äquivalenz der folgenden Aussagen

(1) $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *sind linear abhängig.*

(2) *Es gibt Zahlen* c_1, c_2, *so dass*

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{a}_1 & = & c_1\mathfrak{a}_2 + c_2\mathfrak{a}_3 & \textbf{oder} \\ \mathfrak{a}_2 & = & c_1\mathfrak{a}_1 + c_2\mathfrak{a}_3 & \textbf{oder} \\ \mathfrak{a}_3 & = & c_1\mathfrak{a}_1 + c_2\mathfrak{a}_2 & \text{gilt.} \end{array}$$

(3) *Die Ortsvektoren* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *liegen sämtlich in einer Ebene durch den Nullpunkt* N.

6.6 Wir können nun das sog. Dimensionsaxiom der anschaulichen Vektorrechnung formulieren:

Dimensionsaxiom. *Es gibt 3 linear unabhängige Vektoren* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. *Aber je 4 Vektoren sind linear abhängig.*

Wir wählen jetzt 3 linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ aus, eine sogenannte **Basis**. Dann gilt:

6.7 *Jeder Vektor* $\mathfrak{a}$ *lässt sich auf genau eine Weise als Linearkombination*

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{b}_1 + a_2\mathfrak{b}_2 + a_3\mathfrak{b}_3$$

der Basisvektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ *darstellen.*

Beweis. Existenz. Wegen des Dimensionsaxioms sind die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}$ linear abhängig. Es gibt daher eine Linearkombination

$$(*) \qquad b_1\mathfrak{b}_1 + b_2\mathfrak{b}_2 + b_3\mathfrak{b}_3 + a\mathfrak{a} = \mathfrak{o},$$

wobei mindestens einer der Skalare b_1, b_2, b_3, a von 0 verschieden ist. Nehmen wir an, dass $a = 0$ ist, so folgt aus (*), dass die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ ein linear abhängiges System bilden, was der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit widerspricht. Folglich muss $a \neq 0$ sein, und es folgt, dass

$$\mathfrak{a} = (-\frac{b_1}{a})\mathfrak{b}_1 + (-\frac{b_2}{a})\mathfrak{b}_2 + (-\frac{b_3}{a})\mathfrak{b}_3$$

eine Linearkombination der drei Basisvektoren ist.

Eindeutigkeit. Wir nehmen nun an, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1\mathfrak{b}_1 + a_2\mathfrak{b}_2 + a_3\mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a} &= b_1\mathfrak{b}_1 + b_2\mathfrak{b}_2 + b_3\mathfrak{b}_3 \end{aligned}$$

zwei Darstellungen von $\mathfrak{a}$ als Linearkombination von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ sind. Bilden der Differenz führt zur Gleichung

$$\mathfrak{o} = (a_1 - b_1)\mathfrak{b}_1 + (a_2 - b_2)\mathfrak{b}_2 + (a_3 - b_3)\mathfrak{b}_3,$$

woraus — die lineare Unabhängigkeit von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ berücksichtigend — das Verschwinden der Koeffizienten, also $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, $a_3 - b_3 = 0$ folgt. Wir haben damit $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ und folglich die Eindeutigkeit der Darstellung gezeigt. □

6.8 Im Umgang mit linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit erweisen sich die nachfolgend aufgelisteten — und leicht zu beweisenden — Eigenschaften als sehr nützlich:

(1) Ist das System $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k$ linear abhängig, so auch jedes größere System $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n$.

(2) Jedes System $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, welches den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(3) Ist das System $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear unabhängig, so ist auch jedes Teilsystem $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k$ linear unabhängig.