# Kapitel 1

# Anschauliche Vektorrechnung

**Montag, 13. Oktober 03**

# Einordnung

Dieses erste Kapitel hat motivierenden Charakter. Es führt — an die geometrische Anschauung anknüpfend — die zentralen Begriffe der Linearen Algebra unmittelbar und ohne pedantische Vorreden ein, was uns erlaubt, ohne Umwege mit diesen Konzepten zu arbeiten. Ein gewisser Nachteil dieses Vorgehens ist die — nach heutigem Standard — mangelnde begriffliche Präzision. Es sei daher — dieses erste Kapitel betreffend — an Sie appelliert, sich durch diese Unschärfe nicht irritieren zu lassen und den vorgestellten Betrachtungen mit Begeisterung zu folgen.

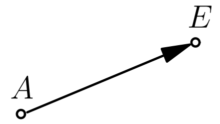
Eine saubere begriffliche Fundierung, die heute in den meisten Darstellungen der Linearen Algebra am Anfang steht, fußt auf einer axiomatischen Einführung des Vektorraumbegriffs. Trotz der begrifflichen Schärfe, die mit diesem Vorgehen verbunden ist, haben Anfänger/innen — bedingt durch den hohen Abstraktionsgrad — erfahrungsgemäß Schwierigkeiten, sich bei einer solchen Art des Vorgehens ein inhaltliches Verständnis zu erwerben. Ein weiteres Problem liegt darin, dass bei einem axiomatischen Vorgehen der Zusammenhang zur übrigen mathematischen Erfahrung nur schwer herzustellen ist und daher die Vorgabe eines solchen Axiomensystems (zunächst jedenfalls) recht künstlich erscheint.

Es ist daher eine Aufgabe dieses Vorspanns, für genügend Anschauungsmaterial zu sorgen und die für die Lineare Algebra grundlegenden Begriffsbildungen des **Vektorraum**s und der **linearen Abbildung** herzuleiten. Die zunächst vorhandene begriffliche Unschärfe nehmen wir dabei in Kauf; sie wird durch die am Wege mitgenommenen Einsichten mehr als kompensiert.

## 1.1 Vektoren und ihre Länge

Wir arbeiten im **3-dimensionalen Anschauungsraum**, den wir nicht weiter erklären wollen (und können). Die erwähnte begriffliche Unschärfe hat ihre Wurzel im hier notwendigen Rückgriff auf die Anschauung.

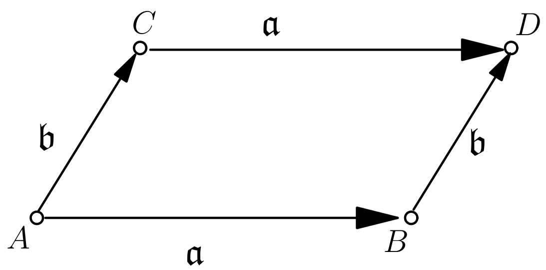
Ein **geordnetes Punktepaar** $(A, E)$ definiert einen **Vektor** $\overrightarrow{AE}$




**Vektor, dargestellt als gerichtete Strecke**

$A$ nennen wir den **Anfangspunkt**, $B$ den **Endpunkt** der gerichteten Strecke von $A$ nach $B$.

Hinsichtlich der **Gleichheit von Vektoren** treffen wir die Vereinbarung, dass zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ übereinstimmen, wenn sie durch eine Parallelverschiebung auseinander hervorgehen[1]. Ist somit




**Gleichheit von Vektoren**

ein Parallelogramm, so ist $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ und natürlich auch $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Es ist üblich, Vektoren mit kleinen deutschen Buchstaben zu bezeichnen

$$\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

$$\mathfrak{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Wir können — wie in der Physik üblich — auch die Schreibweise

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

usf. verwenden.

**Fassen wir zusammen:** *Ein Vektor ist die Gesamtheit (Menge) aller Strecken von gleicher Richtung und gleicher Länge.*

[1] Diese Vereinbarung zieht nach sich, dass wir — streng genommen — nicht mehr vom Anfangspunkt bzw. Endpunkt eines Vektors sprechen können. Gleichwohl werden wir diese Redeweise im folgenden verwenden. Die Rede ist dann vom Anfangs- und Endpunkt einer gerichteten Strecke, die wir zur Repräsentation des Vektors gewählt haben.

Die **Länge eines Vektors** $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$, d.h. den Abstand der beiden Punkte $A$, $B$ bezeichnen wir mit

$$|\mathfrak{a}|$$

und nennen diese Zahl $\geq 0$ den **Betrag von $\mathfrak{a}$.**

Falls $A = B$ nennen wir $\overrightarrow{AB}$ den **Nullvektor**. Schreibweise

$$\mathfrak{o} = \overrightarrow{AA}.$$

Natürlich ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ genau dann, wenn $|\mathfrak{a}| = 0$.

Wir kürzen diesen Sachverhalt wie folgt ab:

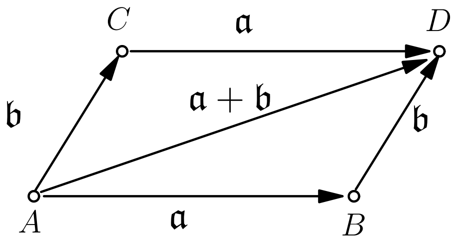
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \quad \Longleftrightarrow \quad |\mathfrak{a}| = 0.$$

Wir beachten, dass hier zwischen der Zahl 0 und dem Vektor $\mathfrak{o}$ deutlich zu unterscheiden[2] ist.

[2] Mit fortgeschreitendem Stadium des Verständnisses werden wir diese bezeichnungsmäßige Unterscheidung zwischen Nullvektor $\mathfrak{o}$ und Zahl 0 als zu pedantisch aufgeben, aber natürlich an der begrifflichen Verschiedenheit festhalten.

## 1.2 Die Addition von Vektoren

*Der Vektor* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *wird gebildet, indem der Anfangspunkt von* $\mathfrak{b}$ *an den Endpunkt von* $\mathfrak{a}$ *gefügt wird.*




**Addition von zwei Vektoren**

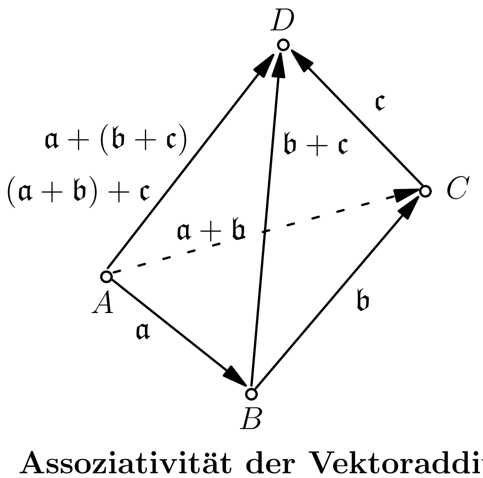
Ist also $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BC}$, dann ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overrightarrow{AC}$.
Es ist aber auch $\mathfrak{b} = \overrightarrow{AD}$, $\mathfrak{a} = \overrightarrow{DC}$ und folglich $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Damit haben wir die **Kommutativität**

$$(A\ 1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \quad \text{für alle } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$$

der Vektoraddition nachgewiesen.

Um die Summe von drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu bilden, betrachten wir die folgende Figur:




**Assoziativität der Vektoraddition**

Hieraus erhalten wir sofort die **Assoziativität** der Vektoraddition

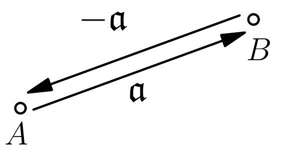
$$(A\ 2) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \quad \text{für alle } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Ist $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$, so ist $\mathfrak{o} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$. Es folgt $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$, entsprechend (A 1) auch $\mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Folglich gilt

$$(A\ 3) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \quad \text{für alle } \mathfrak{a}.$$

**Donnerstag, 16. Oktober 03**

Erklären wir für $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ den Vektor $-\mathfrak{a}$ als $\overrightarrow{BA}$




**Negativer Vektor**

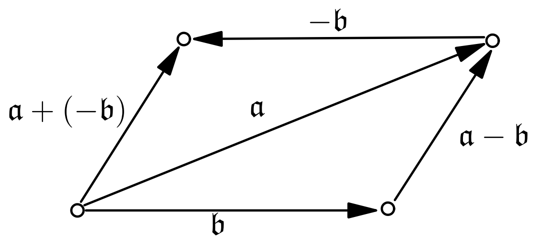
so erhalten wir $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathfrak{o}$. Somit unter erneuter Beachtung von (A 1) als charakterisierende **Eigenschaft des additiven Inversen**

$$(A\ 4) \qquad \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o} = (-\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \quad \text{für alle } \mathfrak{a}.$$

Schließlich erklären wir die **Differenz** $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ von Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ durch

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b}).$$

Im Bild:




**Differenz zweier Vektoren**

**Merkregel.** $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ *ist der Vektor, der vom Endpunkt von* $\mathfrak{b}$ *zum Endpunkt von* $\mathfrak{a}$ *weist, falls* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *so gelegt sind, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen.*

Es gilt natürlich

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}.$$

Sie können dies direkt am obigen Bild ablesen, aber auch aus den bisher schon gewonnenen Rechenregeln herleiten:

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b} \overset{\text{nach Definition}}{=} (\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})) + \mathfrak{b} \overset{(A\ 2)}{=} \mathfrak{a} + ((-\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}) \overset{\text{nach Definition}}{=} \mathfrak{a} + \mathfrak{o} \overset{(A\ 3)}{=} \mathfrak{a}.$$

Es handelt sich bei der Subtraktion von Vektoren somit tatsächlich um die Umkehrung der Addition.

## 1.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ist $a$ eine reelle Zahl (**Skalar**) und ist $a > 0$, so verstehen wir unter $a\mathfrak{a}$ denjenigen Vektor, der die gleiche Richtung hat wie $\mathfrak{a}$, aber $a$-mal so lang ist: $|a\mathfrak{a}| = a|\mathfrak{a}|$.

Wir setzen $0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ und erklären für $a > 0$ $(-a)\mathfrak{a}$ als denjenigen Vektor, der die entgegengesetzte Richtung von $\mathfrak{a}$, aber seine $a$-fache Länge hat: $|(-a)\mathfrak{a}| = a|\mathfrak{a}|$.

Allgemein haben wir daher

$$|a\mathfrak{a}| = |a||\mathfrak{a}| \tag{3.1}$$

falls $a$ ein Skalar und $\mathfrak{a}$ ein Vektor ist.

Hierbei ist

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

der Abstand der reellen Zahl $a$ vom Nullpunkt auf der reellen Zahlengeraden, der sog. **Absolutbetrag von** $a$.

Man verifiziert leicht die folgenden Rechenregeln für die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren:

$$\begin{array}{lrcl} (M\ 1) & a(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) & = & a\mathfrak{a}+a\mathfrak{b} \\ (M\ 2) & (a+b)\mathfrak{a} & = & a\mathfrak{a}+b\mathfrak{a} \\ (M\ 3) & a(b\mathfrak{a}) & = & (ab)\mathfrak{a} \\ (M\ 4) & 1\mathfrak{a} & = & \mathfrak{a}. \end{array}$$

**Verabredung:** Anstelle von $\frac{1}{a}\mathfrak{a}$ (für einen Skalar $a \neq 0$) schreiben wir häufig $\frac{\mathfrak{a}}{a}$. Insbesondere erhalten wir mit $a = |\mathfrak{a}|$, falls $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, mittels (3.1), dass $\frac{a}{\mathfrak{a}}$ die Länge Eins hat. Für jeden Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ist daher

$$\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$$

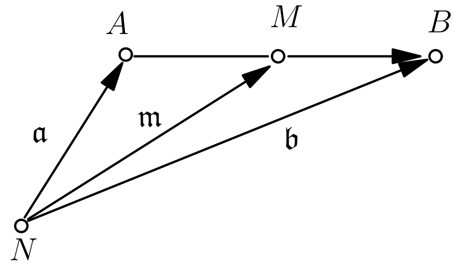
stets ein **Einheitsvektor**, ein Vektor der Länge Eins, der zudem die selbe Richtung hat wie $\mathfrak{a}$. Den Übergang von $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ zum Einheitsvektor $\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$ nennt man **normieren**.

## 1.4 Beispiele

Für die Betrachtungen dieses Abschnitts erweist es sich als bequem, einen Punkt $N$ des Raumes auszuzeichnen (als "Bezugspunkt", "Nullpunkt" oder "Ursprung des Koordinatensystems"). Jeder Punkt $P$ des Raumes ist dann relativ zu $N$ durch seinen **Ortsvektor** $\mathfrak{a} = \overrightarrow{NP}$ eindeutig bestimmt. In den folgenden Untersuchungen werden wir ohne weiteren Kommentar die Punkte des Raumes durch ihre Ortsvektoren beschreiben.

### 1.4.1 Der Mittelpunkt $M$ der Strecke $\overline{AB}$

.




**Mittelpunkt einer Strecke**

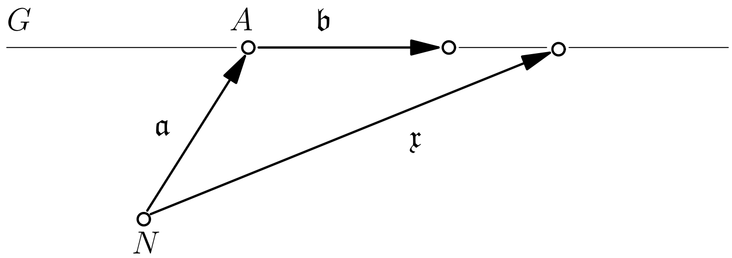
Es ist $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, folglich $\overrightarrow{AM} = 1/2(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$, somit

$$\overrightarrow{NM} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Damit

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

### 1.4.2 Gerade, gegeben durch Punkt und Richtung




**Gerade, gegeben durch Punkt und Richtung**

Die Gerade $G$ durch den Punkt $\mathfrak{a}$ mit Richtungsvektor $\mathfrak{b}$ besteht aus allen 'Punkten $\mathfrak{x}$, welche die Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b} \quad \text{mit einem Skalar } t$$

haben. In Mengenschreibweise ist

$$G = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Wir werden für diese einführenden Betrachtungen — im Interesse einer knappen Redeweise — jedoch häufig von der ‘Geraden’ $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$ reden oder $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$, $t \in \mathbb{R}$, als Parameterdarstellung der Geraden bezeichnen.

Fassen wir zusammen: *Ein Punkt $\mathfrak{x}$ liegt genau dann auf der Geraden $G$ durch $\mathfrak{a}$ mit Richtung $\mathfrak{b}$ (also $\mathfrak{x} \in G$) wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$.*
Der Richtungsvektor $\mathfrak{b}$ muss natürlich verschieden von 0 sein, damit wirklich eine Gerade vorliegt.