3.2 Unterräume und Lineare Hülle

Definition 2.1 *Eine Teilmenge U eines R-Vektorraums V heißt* ***Unterraum*** *von V, wenn gilt:*

(U 1) $0 \in U$.

(U 2) $U + U \subseteq U$, *d.h.* $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$.

(U 2) $\mathbb{R}.U \subseteq U$, *d.h.* $x \in U$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *impliziert* $a.x \in U$.

Dabei verwenden wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} U + U &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}, \\ \mathbb{R}.U &= \{r.u \mid r \in \mathbb{R} \text{ und } u \in U\}, \\ -U &= \{-u \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

Donnerstag, 11. Dezember 03

Satz 2.2 *Der Name Unter***raum** *ist gerechtfertigt, denn jeder Unterraum U von V ist bzgl. der Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} + &: U \times U \longrightarrow U, \quad (u, v) \mapsto u + v \\ . &: \mathbb{R} \times U \longrightarrow U, \quad (a, u) \mapsto a.u \end{aligned}$$

wieder ein Vektorraum.

Beweis. Wegen **(U 1)** und **(U 2)** machen beide Verknüpfungen Sinn, sie sind also — wie man sagt — **wohldefiniert**. Die Bedingungen **(A 1)**, **(A 2)** eines Vektorraums sind offensichtlich und **(A 3)** ist wegen **(U 1)** erfüllt. Wegen **(U 3)** ist insbesondere $-U \subseteq U$, d.h. $x \in U$ impliziert $-x \in U$. Somit gilt auch **(A 4)**. Schließlich gelten **(M 1)** – **(M 4)** in U, da sie im umfassenden Vektorraum V gelten. □

Beispiele 2.3 (a) Für jeden Vektorraum V sind stets V selbst und $\{0\}$ Unterräume von V.

(b) Ist ferner v ein beliebiger Vektor aus V, so ist $\mathbb{R}.v := \{a.v \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum von V. Wir nennen ihn den von v **erzeugten Unterraum**.

(b) V sei der Anschauungsraum. Die nur aus 0 bestehende Teilmenge $\{0\}$, eine Gerade G durch 0 oder eine Ebene E durch 0 sind Beispiele für Unterräume von V. Im Zusammenhang mit der Diskussion des Dimensionsbegriffs werden wir später sehen, dass mit dieser Aufzählung alle Unterräume U des Anschauungsraumes (gleichbedeutend des $\mathbb{R}^3$) erfasst sind.

Weitere Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V können wir uns nach folgendem Muster verschaffen:

Satz 2.4 *Sind $v_1, v_2, \ldots, v_t \in V$, so ist*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_t\rangle := \{a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum von V, welchen wir den von $v_1, v_2, \ldots, v_t$ ***aufgespannten***[6] ***Unterraum*** *oder auch die* ***lineare Hülle*** *von $v_1, v_2, \ldots, v_t$ oder $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ nennen.*

Beweis. Es ist klar, dass $0 = 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_t$ in $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_t\rangle$ liegt und dass H ferner wegen

$$\begin{aligned}(a_1.v_1 + \cdots + a_t.v_t) + (b_1.v_1 + \cdots + b_t.v_t) &= (a_1 + b_1).v_1 + \cdots + (a_t + b_t).v_t \\ a.(a_1.v_1 + \cdots + a_t.v_t) &= (aa_1).v_1 + \cdots + aa_t).v_t\end{aligned}$$

gegen Bildung von Summen und von Produkten mit Skalaren abgeschlossen ist. H ist somit ein Unterraum von V. □

Satz 2.5 *Es ist $\langle v_1, v_2, \ldots, v_t\rangle$ der bezüglich Inklusion "$\subseteq$" kleinste Unterraum von V, welcher $v_1, v_2, \ldots, v_t$ enthält.*

Beweis. Wir wissen schon, dass $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_t\rangle$ ein Unterraum ist. Da $v_i = 0.v_1 + \cdots + 1.v_i + \cdots + 0.v_t$ gilt, liegen die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sämtlich in H. Ist nun U irgendein Unterraum von V, welcher $v_1, v_2, \ldots, v_t$ enthält, so liegen alle Linearkombinationen $a_1.v_1 + \cdots + a_t.v_t$ ebenfalls in U, woraus $H \subseteq U$ folgt. □

Für spätere Verwendung notieren wir noch:

Satz 2.6 *Sind U_1 und U_2 Unterräume von V, so auch ihr Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = \{u \mid u \in U_1$ und $u \in U_2\}$ und ihre Summe $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $U = U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V ist. Da 0_V sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt, so folgt $0_V \in U$ und (U 1) ist erfüllt. Seien nun x und y Elemente aus U. Insbesondere sind dann x und y Elemente von U_1 und folglich liegt auch ihre Summe $x + y$ in U_1. Entsprechend liegt $x + y$ in U_2. Es folgt, dass $x + y$ in U liegt und somit (U 2) erfüllt ist. Seien schließlich r ein Skalar und u ein Mitglied von U. Dann liegt mit u auch $r.u$ in U_1. Entsprechend folgt $r.u \in U_2$, folglich liegt $r.u$ in U, womit auch (U 3) gezeigt ist.

Mit analogen Argumenten behandelt man den Fall $U_1 + U_2$. □

Bemerkung 2.7 *Es seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Im allgemeinen ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ nicht wieder ein Unterraum*[7] *von V. Beispielsweise sind im $\mathbb{R}^2$ die Koordinatenachsen $U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ Unterräume, aber ihre Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$.*

---

[6] Auch die Bezeichnung 'von $v_1, v_2, \ldots, v_t$ erzeugter Unterraum' ist gebräuchlich.

[7] Genauer gilt hier: Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Einschub: Vollständige Induktion

Wir werden im folgenden häufig Beweise durch vollständige Induktion führen und schieben daher einen Exkurs über das Prinzip der vollständigen Induktion ein. Wir werden dabei sehen, dass es sich bei demselben um eine besondere Eigenschaft der natürlichen Zahlen handelt, die wir nachfolgend herausarbeiten.

Die natürlichen Zahlen

Für uns reicht die Vorstellung, dass die **natürlichen Zahlen** diejenigen sind, die man zum Zählen und daher zur Anzahlbestimmung endlicher Mengen verwendet. Es sind dies also die Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Wie schon gelegentlich zuvor, bezeichnet $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen. Wir setzen als bekannt voraus, wie man hinsichtlich Addition und Multiplikation mit natürlichen Zahlen umgeht und wie man dieselben der Größe nach vergleicht ($m \leq n$, $m < n$).

Das Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl

Die bei weitem wichtigste Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist das sehr anschauliche, und daher hier nicht weiter begründete

Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl: Gegeben sei irgendeine *nichtleere* Menge M von natürlichen Zahlen (M darf dabei endlich oder unendlich sein, muss aber, wie verlangt, mindestens ein Mitglied enthalten). Dann gibt es unter allen Zahlen von M eine **kleinste.**

Formelmäßig ausgedrückt: Falls $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$, so existiert eine Element $m_0 \in M$ mit $m_0 \leq m$ für jedes $m \in M$.

Die Problemstellung

Wir wollen auf einen Streich unendlich viele Behauptungen (Aussagen) zu beweisen. Wir stellen uns dazu vor, dass wir **jeder** natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine Aussage $A(n)$ zugeordnet haben, etwa die Behauptung

$$A(n): \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Den Beweis von $A(1), A(2), \ldots$ wollen wir **mit einem einzigen Beweis** erledigen! Dies gelingt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, das wir gleich aus dem Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl gewinnen werden.

Prinzip der vollständigen Induktion

Satz (Vollständige Induktion) *Für jede*[8] *natürliche Zahl n sei eine Behauptung $A(n)$ vorgelegt. Es gelte*

(I 1) *$A(0)$ ist wahr.*

(I 2) *Immer, wenn $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann ist $A(n)$ wahr für ***jede*** *natürliche Zahl n.*

Beweis. Wir führen einen sogenannten **Widerspruchsbeweis**. Dazu **nehmen wir an**, dass es eine natürliche Zahl m gibt, für die $A(m)$ **falsch** ist und zeigen anschließend, dass diese Annahme zu einem **Widerspruch** führt!

Nach Annahme ist die Menge V aller "Verbrecher" v, für die $A(v)$ falsch ist, nicht leer. Sie enthält nämlich mindestens das Element m. Nach dem Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl hat V folglich ein kleinstes Mitglied v_0; es gibt somit einen *kleinsten Verbrecher*.

Wegen (I 1) ist $v_0 \neq 0$, somit $v_0 > 0$. Somit ist $n = v_0 - 1 \geq 0$, also eine natürliche Zahl, die **nicht** in V liegt. Folglich ist $A(n)$ wahr. Wegen (I 2) ist wegen der Richtigkeit von $A(n)$ dann auch die Aussage $A(n+1)$, wegen $n+1 = v_0$ dann auch die Aussage $A(v_0)$ wahr, **Widerspruch!**

Unsere **ursprüngliche Annahme ist daher falsch**, das Induktionsprinzip damit bewiesen. □

Anwendungsbeispiel

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \geq 1$ die Behauptung

$$A(n): \quad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

richtig ist.

Induktionsverankerung: Es gilt $A(0)$[9].

Induktionsschritt von n auf $n+1$: Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist, d.h. wir nehmen an, dass (für dieses n) die Formel

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{gilt.}$$

[8] Es ist auch möglich, die Behauptungen $A(n)$ nur für alle natürlichen $n \geq n_0$ zu betrachten. In diesem Fall ist (I 1) zu "$A(n_0)$ ist wahr" zu modifizieren.

[9] Hier verwenden wir die Vereinbarung, dass eine Summe von null Summanden gleich 0 ist.

Wir zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ gilt:

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+n)+(n+1) &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Dies ist gerade die Aussage $A(n+1)$. □

Variante des Induktionsprinzips

Für praktische Zwecke ist häufig die folgende Fassung des Induktionsprinzips nützlich:

Satz 3.1 (Induktion, Variante) *Für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(I 1)* *$A(n_0)$ ist wahr.*

(I 2)* *Es sei $m > n_0$. Falls $A(k)$ für alle $n_0 \leq k < m$ wahr ist, so ist auch $A(m)$ wahr.*

Dann ist $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$ wahr.

Beweis. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei falsch. Die Menge V aller natürlichen Zahlen (Verbrecher) $n \geq n_0$, für die $A(n)$ falsch ist, *ist dann nicht leer*. Nach dem Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl hat V ein kleinstes Mitglied v (einen *kleinsten Verbrecher*). Wegen (I 1)* ist $v > n_0$. Für alle k mit $n_0 \leq k < v$ ist daher $A(k)$ wahr, wegen (I 2)* ist dann auch $A(v)$ wahr, **Widerspruch!**

Damit ist unsere ursprüngliche Annahme falsch und die obige Behauptung bewiesen. □

Rückblick: Widerspruchsbeweis

Sie haben bemerkt, dass das generelle Beweisschema beider Induktionsprinzipien ziemlich ähnlich ist: in beiden Fällen haben wir einen **Beweis durch Widerspruch** geführt.

Dasselbe beruht darauf, dass *jede Aussage* entweder *wahr* oder *falsch* ist und ferner sich aus einer wahren Aussage durch zulässige logische Schlüsse stets wieder eine wahre Aussage ergibt.

Nehmen wir hypothetisch an, eine zu beweisende Aussage A *sei falsch* und ferner, dass sich aus dieser Annahme durch zulässige Schlüsse eine Aussage B ergibt, die falsch ist. Dann kann unsere Annahme (A *sei falsch*) nicht wahr sein; *A ist somit wahr.*