Satz 1.4 (Unser Standardbeispiel) *Für jedes $n \geq 0$ bildet die Menge*

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis. Koordinatenweises Rechnen in $\mathbb{R}$ zeigt die Gültigkeit von **(A1)** – **(A4)** sowie **(M1)** – **(M4)**. □

Das folgende Beispiel zeigt die vereinheitlichende Kraft und Denkökonomie des abstrakten Vektorraumbegriffs, der — wie sich an dem Beispiel ablesen lässt — auch für die Analysis sehr nützlich ist.

Beispiel 1.5 (Vektorräume von Funktionen) *Sei*

$$V = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen, welche auf dem reellen Einheitsintervall $[0,1] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\, 0 \leq x \leq 1\}$ definiert sind. Wir erklären $f+g$ und $a.f$ ($a \in \mathbb{R}$, $f,\, g \in V$) durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (a.f)(x) = a \cdot f(x).$$

Es ist leicht zu sehen, dass V bzgl. dieser Operationen ein reeller Vektorraum ist.

Das Beispiel gestattet offensichtliche Variationen: "Polynomfunktionen auf $[0,1]$", "differenzierbare Funktionen auf $[0,1]$".

Montag, 1. Dezember 2003

Der Körperbegriff

Bemerkung 1.6 In die Definition eines Vektorraums — und die nachfolgende Behandlung — gehen nur die grundlegenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen ein, die man zu den gleich zu besprechenden **Körperbegriff** zusammenfasst. Wir werden daher später allgemeiner Vektorräume über einem beliebigen Körper K betrachten.

Definition 1.7 (Körper) *Eine Menge K versehen mit zwei Operationen*

$$\begin{array}{rcl} + & : & K \times K \longrightarrow K, \quad (x,y) \mapsto x+y \\ \cdot & : & K \times K \longrightarrow K, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$

heißt ***Körper****, wenn gilt:*
Axiome der Addition

(A1) *Kommutativität:* $x + y = y + x$

(A2) *Assoziativität:* $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A3) *Existenz der Null: Es gibt* $0 \in K$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in K$

(A4) *Existenz eines additiv Inversen: Zu jedem* $x \in K$ *gibt es* $y \in K$ *mit* $x + y = 0$.

Axiome der Multiplikation

(M1) *Kommutativität:* $x \cdot y = y \cdot x$

(M2) *Assoziativität:* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(M3) *Existenz einer Eins: Es gibt* $1 \in K$ *mit* $x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in K$.

(M4) *Existenz eines multiplikativ Inversen: Zu jedem* $x \in K$, $x \neq 0$, *gibt es ein* $y \in K$ *mit* $x \cdot y = 1$.

Distributivgesetz
Addition und Multiplikation sind verkoppelt durch die Distributivität
(D) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in K$.

Beispiele 1.8 1. Bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen bilden die Mengen $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen einen Körper, ebenfalls die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ mit ganzzahligen m, n und $n \neq 0$.

2. Die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ bildet — bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen — e ebenfalls einen Körper[1]

3. Die Menge $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ aller komplexen Zahlen bildet bzgl. $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$ und $(a+bi)\cdot(a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$ — wie wir später zeigen werden — gleichfalls einen Körper.

4. Es gibt auch endliche Körper. So gibt es für jede Primzahl p einen endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ mit genau p Elementen.

5. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation keine Körper. Grund?

---

[1]Der Nachweis von **(M 4)** ist in diesem Beispiel nicht offensichtlich. Er erfordert Rückgriff auf die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Bemerkung 1.9 Wie vorher angemerkt, gehen nur die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ in die Definition eines Vektorraums über $\mathbb{R}$ ein. Es macht daher Sinn, allgemeiner einen Körper K zugrundezulegen und für Operationen

$$\begin{array}{rcll} + & : & V \times V \longrightarrow V, & (v,w) \mapsto v + w \\ \cdot & : & K \times V \longrightarrow V, & (a,v) \mapsto a\,v, \end{array}$$

genannt Addition und Multiplikation (mit Skalaren), die Eigenschaften **(A 1)** – **(A 4)** und **(M 1)** – **(M 4)** zu verlangen. Wir sprechen dann von einem Vektorraum über dem Körper K, kurz von einem K-Vektorraum.

Wir können daher insbesondere von Vektorräumen über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sprechen. Beispielsweise ist $\mathbb{Q}^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

Wir werden diese Erweiterung des Vektorraumbegriffs jetzt noch nicht benötigen und bleiben momentan bei Vektorräumen über $\mathbb{R}$. Es ist jedoch nützlich zu verfolgen, dass die folgenden Argumente nicht von speziellen Eigenschaften der reellen Zahlen Gebrauch machen[2].

Das Rechnen in Vektorräumen

(1) *Das Nullelement $0 \in V$ ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien 0 und $0'$ Nullelmente von V, dann gilt

$$0 = 0 + 0' = 0'. \qquad \square$$

(2) *Das additive Inverse zu x ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $x + y = 0$ und $x + y' = 0$. Dann folgt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y' \qquad \square$$

Verabredung: Für das additive Inverse y zu x schreiben wir $\boxed{y := -x}$.

(3) $a.x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a = 0 \text{ oder } x = 0)$.

Beweis. "$\Leftarrow$": Es ist $a.0 = a.(0 + 0) = a.0 + a.0$ und Addition mit $-(a.0)$ liefert $0 = a.0$. Entsprechend ist $0.x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x$, hier liefert Addition mit $-(0.x)$ das gewünschte Resultat $0 = 0.x$.

"$\Rightarrow$" $a.x = 0$ und $a \neq 0$ impliziert $x = 1.x = (\frac{1}{a} \cdot a).x = \frac{1}{a}.(a.x) = \frac{1}{a}.0 = 0$. $\square$

[2] Davon ausgenommen ist die spätere Behandlung von Vektorräumen mit Skalarprodukt, wo es wesentlich ist, reelle Vektorräume zugrunde zu legen und auf die Ordnung der reellen Zahlen zurückzugreifen.

Subtraktion in Vektorräumen

Wir setzen $\boxed{x - y := x + (-y)}$. Dann gilt

(4) $$-(-x) = x$$

Beweis. Nach Definition von $-x$ gilt $x + (-x) = 0 = (-x) + x$. Damit ist x zu $-x$ invers, folglich $x = -(-x)$. □

(5) $$-(x + y) = (-x) + (-y)$$

Beweis. Unter Verwendung von Kommutativität und Assoziativität folgt

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) = (x + (-x)) + (y + (-y)) = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist (-x)+(-y) das additiv Inverse zu $x + y$. □

(6) $$-(x - y) = y - x$$

Beweis. Man kombiniere (5) und (6). □
(7) Die Gleichung $x + b = c$ (b, $c \in V$ gegeben) ist eindeutig lösbar mit Lösung $\boxed{x = c - b}$.
Beweis. *Existenz*: Es ist $(c-b)+b = c+(-b+b) = c+0 = c$, somit ist $x = c-b$ eine Lösung.

Eindeutigkeit: Falls x eine Lösung von $x + b = c$ ist, so folgt durch Addition von $-b$ auf beiden Seiten, dass $x = c - b$ ist. □

(8) $$(-a).x = -(a.x) = a.(-x).$$

Beweis. Es ist $a + (-a) = 0$, somit $0 = 0.x = (a + (-a)).x = a.x + (-a).x$, und die Behauptung folgt. □

Erzeugendensysteme und Basen

Definition 1.10 (Linearkombination) *V sei ein Vektorraum.*

(a) Ein Element der Form

$$v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n,$$

*mit Skalaren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißt **Linearkombination** der Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ mit den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

(b) Ein System von Vektoren $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V heißt ***Erzeugendensystem*** *von V, wenn sich jedes $v \in V$ als Linearkombination*

$$v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n,$$

mit geeigneten Skalaren $a_1, a_2, \dots, a_n$ schreiben lässt.

Definition 1.11 (Lineare Abhängigkeit) *V sei ein Vektorraum. Ein System $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von Vektoren aus V heißt* ***linear abhängig****, wenn es Skalare $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$*[3] *gibt mit*

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \cdots + a_n.v_n = 0.$$

Andernfalls heißt das System $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ***linear unabhängig***[4]*.*

Definition 1.12 (Basis) *Ein System $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ von n Vektoren aus V heißt eine* ***Basis*** *von V, falls das System $b_1, b_2, \dots, b_n$ zugleich linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.*

Beispiel 1.13 (Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$) *Im $\mathbb{R}^n$ ist das System*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem, denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der obigen Formel folgt zugleich die lineare Unabhängigkeit von $e_1, e_2, \dots, e_n$. (Weshalb?) □

---

[3] Dies bedeutet: **mindestens** ein a_i ist ungleich Null.

[4] Wir werden — üblichem Sprachgebrauch folgend, davon sprechen, dass die Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n$ linear abhängig (bzw. linear unabhängig) sind, obwohl dies missverständlich ist: Sind sämtliche $v_i \neq 0$, so ist $v_1, v_2, \dots, v_n$ ein System von Vektoren, die einzeln jeweils linear unabhängig sind, aber als Folge $v_1, v_2, \dots, v_n$ durchaus linear abhängig sein können.

Folglich ist $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, welche wir die Standardbasis[5] des $\mathbb{R}^n$ nennen. Insbesondere liegt für $n = 1$ mit $e_1 = 1$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ vor. Aber auch jedes andere Element $0 \neq b \in \mathbb{R}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^1$.

Satz 1.14 *Ist $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, so besitzt jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

als Linearkombination von $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Beweis. Vgl. auch (6.7). Die **Existenz** einer Linearkombination

$$v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

folgt, weil $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Zum Nachweis der **Eindeutigkeit** dieser Darstellung nehmen wir an, dass

$$\begin{aligned} v &= a_1.b_1 + a_2.b_2 + \cdots + a_n.b_n \\ v &= a_1'.b_1 + a_2'.b_2 + \cdots + a_n'.b_n \end{aligned}$$

zwei Darstellungen von v als Linearkombination von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind. Bilden der Differenz führt zur Gleichung

$$0 = (a_1 - a_1').b_1 + (a_2 - a_2').b_2 + \cdots + (a_n - a_n').b_n,$$

woraus — die lineare Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ berücksichtigend — das Verschwinden der Koeffizienten, also $a_1 - a_1' = 0$, $a_2 - a_2' = 0, \ldots$, $a_n - a_n' = 0$ folgt. Wir haben damit $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2', \ldots$, $a_n = a_n'$ und folglich die Eindeutigkeit der Darstellung gezeigt. □

Wenn wir eine Basis von V haben, kennen wir daher den Vektorraum V vollständig, da wir seine Elemente als eindeutige Linearkombinationen seiner Elemente darstellen können. Im allgemeinen wird ein Vektorraum allerdings **mehrere**, häufig — siehe Anschauungsraum — sogar unendlich viele Basen haben.

Folgerung 1.15 *Ist $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Basis von V, so ist die Abbildung*

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i.b_i$$

***bijektiv**, d.h. zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $h(x) = v$.* □

[5] **Die** Basis eines Vektorraums $V \neq 0$ oder auch des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ gibt es nicht, da es in jedem dieser Fälle mehrere (sogar unendlich viele) Basen gibt. Der bestimmte Artikel für die Bezeichnung der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ macht dagegen Sinn!

Bemerkung 1.16 *(a) Die Vektoren einer Basis* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *sind immer paarweise verschieden. Ferner kommt es für die Basiseigenschaft nicht auf die Reihenfolge an, in der die Vektoren einer Basis aufgezählt werden. Immer, wenn es daher bequem ist, werden wir anstelle von* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *von der Basis* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *sprechen.*

(b) In $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ *liefert jeder Vektor ungleich Null, also jede reelle Zahl* $b \neq 0$, *eine Basis.*

(c) Im $\mathbb{R}^2$ *bilden — wie wir in Kapitel I gesehen haben — zwei Vektoren*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

genau dann eine Basis, wenn $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ *gilt.*

(d) Im $\mathbb{R}^3$ *bilden — wie wir in Kapitel I gesehen haben — drei Vektoren*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

genau dann eine Basis, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist.

Die vorstehenden Kriterien liefern eine **formelmäßige** Ermittlung der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit. Später wird uns generell die Determinantentheorie für $n \times n$-Matrizen (Kapitel 5) und ein entsprechendes Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung stehen. Die Berechnung von Determinanten ist für große Formate jedenfalls zeitaufwendig. Andere Verfahren zur Bestimmung der linearen Unabhängigkeit — etwa via Gauß-Algorithmus — führen in der Regel sehr viel schneller zum Ziel und sind entsprechend vorzuziehen.

3.2 Unterräume und Lineare Hülle

Definition 2.1 *Eine Teilmenge U eines R-Vektorraums V heißt* ***Unterraum*** *von V, wenn gilt:*

(U 1) $0 \in U$.

(U 2) $U + U \subseteq U$, *d.h.* $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$.

(U 2) $\mathbb{R}.U \subseteq U$, *d.h.* $x \in U, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a.x \in U$.

2.2 Der Name Unter**raum** ist gerechtfertigt, denn ein Unterraum U von V ist bzgl. der Verknüpfungen

$$\begin{array}{rcll} + & : & U \times U \longrightarrow U, & (u, v) \mapsto u + v \\ . & : & \mathbb{R} \times U \longrightarrow U, & (a, u) \mapsto a.u \end{array}$$

wieder ein Vektorraum.

Beweis. Wegen (U 1) und (U 2) machen beide Verknüpfungen Sinn (sind **wohldefiniert**, wie man sagt). Ferner sind (A 1), (A 2) offensichtlich erfüllt, (A 3) ist wegen (U 1) erfüllt. Wegen (U 3) ist insbesondere $-U \subseteq U$, d.h. $x \in U \Rightarrow -x \in U$. Somit gilt auch (A 4). Der Nachweis von (M 1)–(M 4) ist schließlich Routine. □

Beispiele 2.3 (a) Für jeden Vektorraum V sind stets V selbst und $\{0\}$ Unterräume von V. Ist ferner $v \in V$ so ist $\mathbb{R}.v := \{a.v \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum von V.

(b) V sei der Anschauungsraum. Die nur aus 0 bestehende Teilmenge $\{0\}$, eine Gerade G durch 0 oder eine Ebene E durch 0 sind Beispiele für Unterräume von V. Im Zusammenhang mit der Diskussion des Dimensionsbegriffs werden wir später sehen, dass jeder Unterraum U des Anschauungsraumes (gleichbedeutend des $\mathbb{R}^3$) einer dieser Fälle ist.

Donnerstag, 11. Dezember 2003 Weitere Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V können wir uns nach folgendem Muster verschaffen:

Satz 2.4 *Sind $v_1, v_2, \ldots, v_t \in V$, so ist*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle := \{a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum von V, welchen wir den ***von*** *$v_1, v_2, \ldots, v_t$* ***aufgespannten***[6] ***Unterraum*** *oder auch die* ***lineare Hülle*** *von $v_1, v_2, \ldots, v_t$ oder $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ nennen.*

[6]Auch der Terminus von $v_1, v_2, \ldots, v_t$ erzeugter Unterraum ist gebräuchlich.