2.3 Umformung auf Zeilenstufenform

Montag, 17. November 2003

Wir sehen hier ein typisches Beispiel einer $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform.

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & i_1 & & i_2 & & & i_3 & & i_4 & \end{array} \end{array}$$

Eine Treppenlinie trennt einen unteren Bereich ab, der nur aus Nulleinträgen besteht.

In unserem Fall haben wir $r = 4$ Stufen an den Positionen

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n.$$

Eine Matrix hat per Definition genau dann **Zeilenstufenform**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(S1) In den r Stufen, d.h. an den markierten Stellen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ stehen der Reihe nach die **Einheitsvektoren** $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

(S2) Die übrigen Einträge des oberen Bereichs können beliebig gewählt werden. Im Bereich unterhalb der Treppenlinie gibt es nur Einträge gleich Null.

(S3) Jeder Spaltenvektor ist Linearkombination vorangehender Stufenvektoren.

(S4) Kein Stufenvektor ist Linearkombination vorangehender Spaltenvektoren.

Es ist leicht zu sehen, dass (S2) aus den übrigen Anforderungen folgt. Warum?

Die Anzahl der Stufen nennen wir den **Rang**[4] von A.

Dabei verstehen wir hier unter den **Einheitsvektoren** die Vektoren der Form

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathfrak{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[4] Momentan macht dieser Begriff nur Sinn für Matrizen in Zeilenstufenform. Erst später werden wir den Rang beliebiger Matrizen erklären.

Satz 2.1 (Zeilenstufenform) *Jede $m \times n$-Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.*

Wir behandeln zunächst ein Beispiel, bevor wir die Behauptung beweisen.

Vorschau: Es wird sich herausstellen, dass die entsprechende Umformung in Zeilenstufenform genau die Technik ist, die wir zur vollständigen Lösung eines linearen Gleichungssystems benötigen.

Beispiel 2.2 (Umformung in Zeilenstufenform)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vert\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \vert\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert\underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilenstufenform mit drei Stufen in den Spalten $1, 2$ *und* 4. *Sie hat daher den Rang drei.*

Beweis von Satz 2.1. Wir starten mit einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$ mit dem Spaltenaufbau $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n]$. Falls alle Spalten Null sind, sind wir fertig. Andernfalls sei i_1 der kleinste Index, für den die zugehörige Spalte ungleich Null ist. Durch Vertauschen von Zeilen können wir erreichen, dass der erste Eintrag von $\mathfrak{a}_{i_1}$ ungleich Null und nach Multiplikation der ersten Zeile mit einem geeigneten Faktor sogar $a_{1,i_1} = 1$ gilt.

Die übrigen Einträge dieser Spalte können wir durch elementare Zeilenumformungen zu Null machen. Es ergibt sich dann eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & B & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Hierbei ist B eine $(m-1)\times(n-i_1)$-Matrix. Durch Induktion[5] nach der Zeilenzahl m können wir daher annehmen, dass sich B durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform B' bringen lässt. Diese Zeilenumformungen wenden wir auf die ganze Matrix an.

Für jede Stufe von B' können wir wegen des dort vorhandenen Eintrags 1 erreichen, dass durch elementare Zeilenumformung auch der Eintrag der ersten Zeile der großen Matrix Null wird. Das Ergebnis ist eine Matrix in Zeilenstufenform. $\square$

[5] Die Induktionsverankerung für $m = 1$ bereitet kein Problem. Wir konzentrieren uns hier auf den Induktionsschritt.

2.4 Der Gauß-Algorithmus

Wir lassen uns in der folgenden Darstellung vom früher behandelten Struktursatz 2.1 leiten und behandeln der Reihe nach die Fragen

- Lösbarkeit
- Finden einer speziellen Lösung
- Bestimmung des Lösungsraum des homogenen Systems
- Zusammensetzen zur 'allgemeinen Lösung'.

Lösbarkeit

Durch Umformung auf Zeilenstufenform lässt sich die Lösbarkeit schnell entscheiden.

Satz 2.1 (Lösbarkeitskriterium) *Das lineare Gleichungssystem zur erweiterten Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ ist genau dann lösbar, wenn nach der Umformung von $[A|\mathfrak{b}]$ in Zeilenstufenform $[A'|\mathfrak{b}']$ die letzte Spalte $\mathfrak{b}'$ kein Stufenvektor ist.*

Beweis. Da sich die Lösungsmenge durch elementare Zeilenumformungen nicht verändert, ist das lineare Gleichungssystem zu $[A|\mathfrak{b}]$ genau dann lösbar, wenn dasjenige zu $[A'|\mathfrak{b}']$ lösbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass sich $\mathfrak{b}'$ aus den Spaltenvektoren von A' linear kombinieren lässt.

Nach **(S3)** und **(S4)** ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{b}'$ kein Stufenvektor ist. $\square$

Finden einer speziellen Lösung

Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei. Die Matrizen A und A' seien $m \times n$-Matrizen und $\mathfrak{b}$ sowie $\mathfrak{b}'$ seien entsprechend m-Spalten. *Wir nehmen an, dass das System lösbar ist*, also $\mathfrak{b}'$ kein Stufenvektor ist. Weglassen aller Nullzeilen[6] führt zu einer $r \times (n+1)$-Matrix, mit $r \leq n$ und gleicher Lösungsmenge, wobei r der Rang von A ist.

Wir füllen nun die resultierende Matrix solange mit Nullzeilen auf bzw. löschen "überflüssige" Nullzeilen, bis in der i-ten Stufe stets der Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$ steht (für alle $i = 1, \ldots, r$) und wir insgesamt n Zeilen haben. Dies liefert eine erweiterte Matrix $[A''|\mathfrak{b}'']$, wobei A'' das Format $n \times n$ hat.

[6] Weglassen bzw. Hinzufügen von Nullzeilen einer erweiterten Matrix verändert die Lösungsmenge nicht.

Satz 2.2 (Spezielle Lösung) *Mit obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen ist $\mathfrak{b}''$ eine Lösung des Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{b}]$.*

Beweis. Wenn der i-te Eintrag von $\mathfrak{b}''$ von Null verschieden ist, so ist nach Konstruktion die i-te Spalte von A'' ein Stufenvektor, also gleich dem Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$. Interpretation des Gleichungssystems zu $[A''|\mathfrak{b}'']$ als Linearkombinationsaufgabe zeigt, dass $\mathfrak{b}''$ eine Lösung ist. □

Wir führen die Überlegungen an einem Beispiel durch.

Beispiel 2.3 (Spezielle Lösung) *Die erweiterte Matrix*

$$[A|\mathfrak{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{2} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

befindet sich schon in Zeilenstufenform. Die letzte Spalte ist keine Stufe, daher ist das System lösbar. Auffüllen mit Nullzeilen liefert das äquivalente System:

$$[A''|\mathfrak{b}''] = \left[\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{2} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir beachten, dass Nullen in der Hauptdiagonalen von A'' in derselben Zeile einen Nulleintrag in $\mathfrak{b}''$ hervorrufen. Grund?
Es folgt: $\mathfrak{b}''$ ist eine spezielle Lösung des Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{b}]$.

Hinweis: Dieses einfache Rezept zum Finden einer speziellen Lösung darf nicht zum Schluss verleiten, $\mathfrak{b}''$ sei die einzige Lösung dieses Gleichungssystems.

Homogene Systeme in Zeilenstufenform

Wir nehmen jetzt an, dass A eine Matrix in Zeilenstufenform ist. Durch Streichen und Neueinfügen von Nullzeilen sei schon erreicht, dass A quadratisch, vom Format $n \times n$ ist und die Stufenvektoren ihre Eins in der Hauptdiagonalen haben. Wir sprechen dann von *erweiterter Stufenform.* Die Anzahl der Stufen(vektoren), also der Rang von A, sei gleich r. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ die Spalten der Matrix A.

Jeder Nichtstufenvektor von A hat als Hauptdiagonaleintrag eine Null. Abänderung dieser (diagonalen) Nullen zu -1 führt zu Vektoren

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}.$$

Satz 2.4 (Lösungsraum des homogenen Systems) *Die vorstehend konstruierten Vektoren* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$ *sind linear unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems. Ferner ist jede Lösung* $\mathfrak{h}$ *des homogenen Gleichungssystems eine Linearkombination von* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$ *und umgekehrt.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass die Lösungen des homogenen Systems einen **Unterraum** H von $\mathbb{R}^n$ bilden, der aus allen n-Spalten

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

besteht, für die

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

gilt. Es liegt daher der n-Vektor $\mathfrak{o}$ in H. Ferner ist H gegen Summenbildung und gegen Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen. Folglich ist H auch gegen Bildung von Linearkombinationen abgeschlossen.

Wir haben noch die folgenden Eigenschaften zu zeigen:

(a) Jedes $\mathfrak{h}_j$ gehört zu H.

(b) Die Vektoren $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$ sind linear unabhängig.

(c) Jedes $\mathfrak{h}$ aus H ist darstellbar als Linearkombination $\sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j \, \mathfrak{h}_j$.

Durch Umnummerieren der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (und synchrones Umnummerieren der Spalten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von A) können wir annehmen, dass die Stufenvektoren der Reihe nach in den Positionen 1 bis r stehen und danach die Nichtstufenvektoren kommen. Also gilt mit diesen Vereinbarungen:

(1) $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{e}_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

(2) Jedes $\mathfrak{a}_{r+j}$, $j = 1, \ldots, n-r$, ist eine Linearkombination von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

(3) Es ist $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{a}_{r+j} - \mathfrak{e}_{r+j}$.

Zu (a): Wegen **(2)** haben $\mathfrak{a}_{r+j}$ und $\mathfrak{h}_j$ die Form

$$\mathfrak{a}_{r+j} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathfrak{h}_j = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Eintrag -1 von $\mathfrak{h}_j$ in der Position $r+j$ steht. Es folgt wegen **(1)**

$$(a_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{a}_r) + (-1)\mathfrak{a}_{r+j} = \mathfrak{a}_{r+j} - \mathfrak{a}_{r+j} = \mathfrak{o}.$$

Interpretation des homogenen Gleichungssystems als Linearkombinationsaufgabe zeigt uns, dass $\mathfrak{h}_j$ zu H gehört.

Zu (b): Es gilt

$$\mathfrak{h}_1 = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir nunmehr $\alpha_1\mathfrak{h}_1 + \alpha_2\mathfrak{h}_2 + \cdots + a_{n-r}\mathfrak{h}_{n-r} = \mathfrak{o}$ an, so folgt

$$\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der $\mathfrak{h}_j$ gezeigt.

Zu (c): Es sei der Spaltenvektor $\mathfrak{x}$ mit den Einträgen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in H gelegen. Es gelte also $\sum_{j=1}^{n} x_i\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$. Wir setzen $\alpha_j := -x_{r+j}$ für $j = 1, \ldots, n-r$ und zeigen, dass $\mathfrak{x} = \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j\mathfrak{h}_j$ gilt.

Es ist nämlich unter Berücksichtigung von **(1)** und **(3)**

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} &= \sum_{j=1}^{r} x_i\mathfrak{a}_i + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\mathfrak{a}_{r+j} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} x_i\mathfrak{e}_i + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\mathfrak{e}_{r+j} \right) - \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j\mathfrak{h}_j \\ &= \mathfrak{x} - \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j\mathfrak{h}_j. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 2.4 abgeschlossen. □

Die drei Schritte des Gauß-Algorithmus

Wir haben jetzt alle Bausteine für den **Gauß-Algorithmus** zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (*) beisammen, den wir nachfolgend zusammenfassen.

Schritt 1 (Lösbarkeit): Die erweiterte Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ des linearen Gleichungssystems (*) wird durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform $[A'|\mathfrak{b}']$ gebracht. Falls die letzte Spalte $\mathfrak{b}'$ ein Stufenvektor ist, ist das System nicht lösbar, andernfalls ist es lösbar.

Schritt 2 (Spezielle Lösung): Durch Streichen bzw. Einfügen von Nullzeilen wird $[A'|\mathfrak{b}']$ so zu $[A''|\mathfrak{b}'']$ umgeformt, dass A'' eine quadratische Matrix ist und die Einsen der Stufenvektoren in der Hauptdiagonale von A' stehen (erweiterte Stufenform). *Im lösbaren Fall* ist dann $\mathfrak{b}''$ eine spezielle Lösung des Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{b}]$.

Schritt 3 (Lösungsraum des homogenen Systems): Für jeden der Nichtstufenvektoren von A'' ersetzen wir den Hauptdiagonaleintrag Null durch -1 und erhalten ein System von $n-r$ (r=Anzahl der Stufenvektoren) Spaltenvektoren $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$, welches eine **Basis**[7] des Lösungsraums H des homogenen Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{o}]$ bildet.

Die 'allgemeine Lösung' des Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{b}]$ hat dann die Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b}'' + \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i . \mathfrak{h}_i, \qquad \text{mit beliebigen Skalaren } \alpha_i.$$

Die letzte Aussage erhalten wir aus dem Struktursatz 2.1.

Anwendungsbeispiel

Schritt 1: Lösbarkeit

Gegeben sei die erweiterte Matrix $[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$

Umformung in Zeilenstufenform: [8]

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{\vert 1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{\vert 1} & \underline{0} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\vert 1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

[7] Unter einer Basis von H verstehen wir dabei ein linear unabhängiges System von Vektoren von H, aus denen sich jeder Vektor von H linear kombinieren lässt.

[8] Beachten Sie, dass die Summe der ersten drei Zeilen gleich der vierten ist.

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir lesen ab: Das System ist lösbar!

Schritt 2: Streichen/Einfügen von Nullzeilen

Aus

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

wird die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir lesen ab: Die rechte Seite[9] $\mathfrak{x}_0 = (3, -1, 0, -1, 0)$ ist eine spezielle Lösung.

Schritt 3: Lösungsraum des homogenen Systems

Die im Diagonaleintrag modifizierten Nichtstufen-Vektoren

$$\mathfrak{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

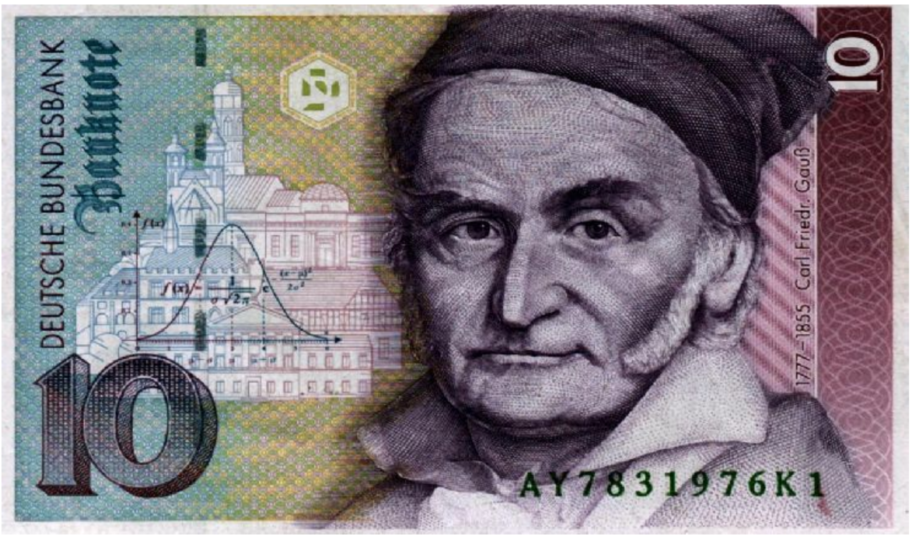
bilden eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.

Das lineare Gleichungssystem (*) ist durch Angabe von $[\mathfrak{x}_0; \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ vollständig gelöst! Die 'allgemeine Lösung' des Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{b}]$ hat nämlich die Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \alpha_1 \mathfrak{h}_1 + \alpha_2 \mathfrak{h}_2 \text{ mit beliebigen Skalaren } \alpha_1, \alpha_2.$$

[9] Aus Platzgründen schreiben wir hier $\mathfrak{x}_0$ als Zeile, nicht als Spalte.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)



Als 19-jähriger löste Gauß ein seit der Antike offenes Problem. Er zeigte während eines Ferienaufenthalts “durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang der Wurzeln” (der Gleichung $x^{17} = 1$), wie er später schrieb “noch ehe ich aus dem Bette aufgestanden war”, dass sich das reguläre 17-Eck allein mittels Zirkel und Lineal konstruieren lässt, ein Ereignis, das ihn bestimmte, Mathematik zu seinem Beruf zu machen.

Gauß entwickelte sich zum größten Mathematiker seiner Zeit. Nicht nur der Gaußsche Algorithmus, auch die komplexe Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene) und die Gaußsche Normalverteilung, dargestellt auf dem 10-DM-Schein, sind nach ihm benannt. Gearbeitet hat er auf allen Gebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen.

Kapitel 3

Vektorräume und Lineare Abbildungen

Donnerstag, 27. November 2000

Die Thematik "Vektorräume und Lineare Abbildungen" bildet den Kern dieser Veranstaltung. **Lineare Techniken** sind zentral für weite Bereiche mathematischen Argumentierens. Die in der Analysis thematisierte **Lineare Approximation** ermöglicht sehr häufig, komplizierte mathematische Fragestellungen auf **Lineare Probleme** zu reduzieren.

Lineare Probleme, ihrerseits, führen meist auf das Lösen **Lineare**r **Gleichungssysteme**. Dieselben genießen in der Mathematik entsprechend einen hohen Stellenwert. Lösungstechniken für lineare Gleichungssysteme (Struktursatz und Gauß-Algorithmus) haben wir schon im vergangenen Kapitel untersucht. Als weitere mächtige Technik wird die **Matrizenrechnung** hinzutreten.

Gemeinsame Basis aller linearen Techniken bildet der Begriff des **Vektorraum**s und der im engen Zusammenhang stehende Begriff der **Linearen Abbildung**. Wir starten demgemäß mit dem Begriff eines abstrakten Vektorraums, untersuchen seine elementaren Eigenschaften und unterlegen den Begriff mit einer Fülle von Beispielen. Im abstrakten Kontext dieses Kapitels ist es dabei hilfreich, die früher behandelte anschauliche Vektorrechnung wo immer möglich zum Vergleich heranzuziehen.

3.1 Definition von Vektorräumen und Beispiele

Vektorräume und Beispiele

Wir greifen die im Rahmen der anschaulichen Vektorrechnung isolierten "Gesetzmäßigkeiten" **(A1)–(A4)**, **(M1)–(M4)** erneut auf und definieren den Begriff des (abstrakten) Vektorraums durch axiomatische Forderung dieser Bedingungen:

Definition 1.1 (Reller Vektorraum) *Eine Menge V versehen mit zwei Operationen*

$$\begin{aligned} + \ &: \ V \times V \longrightarrow V, \quad (v,w) \mapsto v+w \\ \cdot \ &: \ \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (a,v) \mapsto a\,v \end{aligned}$$

heißt **Vektorraum**, *genauer reeller Vektorraum oder $\mathbb{R}$-Vektorraum, wenn gilt:*

(A 1) $v + w = w + v$ *für alle* $v, w \in V$.

(A 2) $u + (v + w) = (u + w) + v$ *für alle* $u, v, w \in V$.

(A 3) *Es gibt* $0 \in V$ *mit* $v + 0 = v = 0 + v$ *für alle* $v \in V$.

(A 4) *Zu jedem* $v \in V$ *gibt es* $w \in V$ *mit* $v + w = 0 = w + v$.

(M 1) $a(v + w) = av + aw$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$.

(M 2) $(a+b)v = av + bv$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

(M 3) $(a \cdot b)v = a(bv)$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

(M 4) $1v = v$ *für alle* $v \in V$.

Elemente aus V *heißen* **Vektoren**, *die aus* $\mathbb{R}$ **Skalare**

Wir beachten, dass andere in der Diskussion des ersten Kapitels aufgetretene Strukturen des Anschauungsraumes (Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt) nicht Bestandteil dieser Definition sind. Hinsichtlich des Skalarprodukts werden wir in Kapitel 6 sogenannte Euklidische Vektorräume einführen, die mit einem Skalarprodukt ausgestattet sind.

Ein anderer Punkt verdient Hervorhebung. In der anschaulichen Vektorrechnung haben wir Vektoren individuell definiert (als Klassen zueinander paralleler gerichteter Strecken) und den Anschauungsraum als Menge aller dieser Vektoren aufgefasst. Für die anstehende abstrakte Behandlung von Vektorräumen müssen wir umdenken. Ein Vektor ist jetzt nichts anderes als ein Mitglied eines Vektorraums. Ohne diesen macht es keinen Sinn mehr, von Vektoren zu sprechen.

Noch eine Anmerkung zur Schreibweise: Anders als in der anschaulichen Vektorrechnung werden wir Vektoren in der Regel durch kleine lateinische Buchstaben wie v, w, usw. bezeichnen; entsprechend werden wir nunmehr weder die Schreibweise $\mathfrak{v}$ noch $\overrightarrow{v}$ verwenden. Ebenfalls entfällt bezeichnungsmäßig — nicht jedoch begrifflich — die Unterscheidung zwischen Nullvektor und Skalar Null.

Beispiel 1.2 (Anschauungsraum und $\mathbb{R}^3$) (i) *Die Vektoren des Anschauungsraumes bilden mit den Operationen* Vektoraddition *und* Multiplikation mit Skalaren *einen* $\mathbb{R}$-*Vektorraum.*

(ii) *Die Menge*

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

bildet mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls einen $\mathbb{R}$-*Vektorraum.*

Beispiel 1.3 (Lösungsmenge einer linearen Gleichung) *Wir fixieren vier reelle Zahlen* a_1, a_2, a_3, b. *Dann ist die Menge*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \right\}$$

bzgl. der Operationen von 1.2 (ii) *genau dann ein* $\mathbb{R}$-*Vektorraum, wenn* $b = 0$.

Satz 1.4 (Unser Standardbeispiel) *Für jedes $n \geq 0$ bildet die Menge*

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis. Koordinatenweises Rechnen in $\mathbb{R}$ zeigt die Gültigkeit von **(A1)** – **(A4)** sowie **(M1)** – **(M4)**. □

Das folgende Beispiel zeigt die vereinheitlichende Kraft und Denkökonomie des abstrakten Vektorraumbegriffs, der — wie sich an dem Beispiel ablesen lässt — auch für die Analysis sehr nützlich ist.

Beispiel 1.5 (Vektorräume von Funktionen) *Sei*

$$V = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen, welche auf dem reellen Einheitsintervall $[0,1] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 1\}$ definiert sind. Wir erklären $f+g$ und $a.f$ ($a \in \mathbb{R}$, $f,\ g \in V$) durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (a.f)(x) = a \cdot f(x).$$

Es ist leicht zu sehen, dass V bzgl. dieser Operationen ein reeller Vektorraum ist.

Das Beispiel gestattet offensichtliche Variationen: "Polynomfunktionen auf $[0,1]$", "differenzierbare Funktionen auf $[0,1]$".

Bemerkung 1.6 In die Definition eines Vektorraums — und die nachfolgende Behandlung — gehen nur die grundlegenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen ein, die man zu den gleich zu besprechenden *Körperaxiomen* zusammenfasst. Wir werden daher später allgemeiner Vektorräume über einem beliebigen Körper K betrachten.

Wir werden diese Erweiterung des Vektorraumbegriffs jetzt noch nicht benötigen und bleiben momentan bei Vektorräumen über $\mathbb{R}$. Es ist jedoch nützlich zu verfolgen, dass die folgenden Argumente nicht von speziellen Eigenschaften der reellen Zahlen Gebrauch machen[1].

[1] Davon ausgenommen ist die spätere Behandlung von Vektorräumen mit Skalarprodukt, wo es wesentlich ist, reelle Vektorräume zugrunde zu legen.