3.9 Elementarmatrizen

Definition 9.1 *Unter einer* ***Elementarmatrix*** *verstehen wir eine Matrix die aus einer $n \times n$-Einheitsmatrix E_n durch eine einzige elementare Zeilenumformung hervorgeht.*

Wir haben wir damit folgende *drei Typen von Elementarmatrizen*:

(1) Für $i \neq k$ die Matrix $E^{i,k}$, die aus E_n durch Vertauschen von i-ter und k-ter Zeile hervorgeht. Es ist $E^{i,k} = E^{k,i}$.

(2) Für $i = 1, \dots, n$ und einen Skalar $\alpha \neq 0$ die Matrix $E^i(\alpha)$, die aus E_n durch Multiplikation der i-ten Zeile mit dem Faktor α hervorgeht.

(3) Für $i \neq k$ und einen beliebigen Skalar α die Matrix $E^{i,k}(\alpha)$, die aus E_n durch Addition des α-fachen der k-ten Zeile zur i-ten Zeile hervorgeht.

Somit gilt beispielsweise für $i < k$

$$E^{i,k} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} & & i & & k & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad E^{i,k}(\alpha) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} & & i & & k & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & \alpha & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Hinweis. Elementare *Spaltenumformungen* der Einheitsmatrix führen auf dieselben Typen von Matrizen.

Satz 9.2 (Elementarmatrizen und elementare Zeilenumformungen)

(a) Elementare Zeilenumformungen (bzw. Spaltenumformungen) ergeben sich gerade durch Linksmultiplikation (bzw. Rechtsmultiplikation) mit einer Elementarmatrix.

(b) Jede Elementarmatrix ist invertierbar und ihre Inverse ist wieder eine Elementarmatrix.

(c) Der Spaltenrang einer Matrix ändert sich nicht durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen.

Beweis. Wir verwenden momentan $e_1, e_2, \dots, e_n$ zur Bezeichnung der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ in *Zeilenform.*

Zu (a): Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ eine im Zeilenaufbau gegebene $n \times p$-Matrix, so ist $e_i \cdot A = a_i$. Die Behauptung (a) folgt dann unmittelbar hinsichtlich der Zeilenumformungen. Der Beweis für elementare Spaltenumformungen verläuft analog.

Zu (b): Von einer Elementarmatrix E kommen wir durch eine einzige elementare Zeilenumformung zur Einheitsmatrix E_n zurück. Nach (a) gibt es daher eine Elementarmatrix E' mit $E' \cdot E = E_n$.

Zu (c): Wegen (b) reicht es zu zeigen, dass die $m \times n$-Matrizen A, $A \cdot B$ und $C \cdot A$ denselben Spaltenrang haben, wenn B eine invertierbare $m \times m$-Matrix und C eine invertierbare $n \times n$-Matrix ist.

Übersetzt in die Sprache der linearen Abbildungen müssen wir nämlich nachweisen, dass für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die linearen Abbildungen f, $f \circ g$ und $h \circ f$ denselben Rang haben, falls $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sowie $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismen sind. Offensichtlich haben — wegen $g(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ — die beiden Abbildungen f und $f \circ g$ dasselbe Bild und daher denselben Rang. Da ferner h ein Isomorphismus ist, sind $\mathrm{Bild}(f) = f(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{Bild}(h \circ f) = h(f\mathbb{R}^n)$ isomorph, somit haben auch f und $h \circ f$ denselben Rang. □

Die Zeilenstufenform einer invertierbaren Matrix ist die Einheitsmatrix. Es folgt:

Satz 9.3 (Invertierbare Matrizen und Elementarmatrizen) *Jede invertierbare $n \times n$-Matrix A ist darstellbar als Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis. Als invertierbare Matrix lässt sich A durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umformen. Dabei entspricht jeder Umformungsschritt der Linksmultiplikation mit einer Elementarmatrix.

Es gibt daher Elementarmatrizen $F_1, F_2, \ldots, F_s$ mit

$$F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = E_n.$$

Folglich ist $A = F_1^{-1} \cdot F_2^{-1} \cdots F_s^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen. □

Folgerung 9.4 *Jede invertierbare $n \times n$-Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.* □

Jede invertierbare Matrix erhalten wir aus der $n \times n$-Matrix durch eine Folge elementarer Spaltenumformungen. Aus Symmetriegründen gelten entsprechende Aussagen für elementare Zeilenumformungen.

Jede $m \times n$-Matrix A lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf *Zeilenstufenform* und analog durch elementare Spaltenumformungen auf *Spaltenstufenform*[20] bringen.

Satz 9.5 *Zu jeder $m \times n$-Matrix A gibt es eine invertierbare Matrizen Q und R, so dass $Q \cdot A$ Zeilenstufenform und $A \cdot R$ Spaltenstufenform hat.*

[20] Dies bedeutet, dass durch Vertauschen von Spalten und Zeilen eine Matrix von Zeilenstufenform entsteht.

Beweis. Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich A auf Zeilenstufenform bringen. Damit gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, \ldots, E_s$, so dass $E_1 \cdot E_2 \cdots E_s \cdot A$ Zeilenstufenform hat[21]. Das Produkt $Q = E_1 \cdot E_2 \cdots E_s$ ist eine invertierbare Matrix mit der gewünschten Eigenschaft.
Der Beweis für die Spaltenstufenform verläuft analog. □

Satz 9.6 *Jede $m \times n$-Matrix A lässt sich durch zulässige Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist und die Symbole 0 für Nullmatrizen geeigneten Formats stehen.
Dabei ist r der Spaltenrang von A.

Beweis. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A zunächst auf Zeilenstufenform. In den r Stufen dieser Matrix stehen die ersten r Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_r$ der Standardbasis.

Diese Spalten bringen wir anschließend durch elementare Spaltenumformungen in die ersten r Positionen; von den verbleibenden Spalten wissen wir, dass sie Linearkombinationen von $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sind. Dieselben können daher durch weitere elementare Spaltenumformungen zu Null umgeformt werden. □

Satz 9.7 *Sei A eine $m \times n$-Matrix vom Spaltenrang r. Dann gilt:*
(a) Es gibt Elementarmatrizen $E_1, E_2, \ldots, E_s$ bzw. $F_1, F_2, \ldots, F_t$, so dass

$$E_1 \cdot E_2 \cdots E_s \cdot A \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gibt invertierbare Matrizen Q und R, so dass

$$Q \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. (a) ergibt sich unmittelbar aus dem vorangehenden Satz. Aussage (b) folgt dann aus (a). □

Als Anwendung dieser Überlegungen erhalten wir jetzt die Übereinstimmung von Zeilen- und Spaltenrang.

Satz 9.8 (Zeilenrang=Spaltenrang) *Für jede $m \times n$-Matrix A stimmen Zeilenrang (die maximale Anzahl eines Systems linear unabhängiger Zeilen) und der Spaltenrang (die maximale Anzahl eines Systems linear unabhängiger Spalten) überein.*

[21] In der hier verwendeten Schreibweise nicht E_i mit der $i \times i$-Einheitsmatrix verwechseln!

Beweis. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen lässt sich A zu einer Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umformen. Bei dieser Umformung bleiben Zeilen- und Spaltenrang erhalten. Ersichtlich stimmen für B Zeilen- und Spaltenrang überein, also auch für A. $\square$

Kapitel 4

Determinanten

4.1 Weshalb Determinanten?

Donnerstag, 29. Januar 2004

Es gibt drei Problemfelder, für welche Determinanten von großem Nutzen sind:

1. Die formelmäßige Überprüfung der linearen Unabhängigkeit eines Systems von n Vektoren des $\mathbb{R}^n$,
2. Die formelmäßige Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit **invertierbarer** Matrix A,
3. Die formelmäßige Berechnung der inversen Matrix einer invertierbaren Matrix A.

Der Fall $n = 2$

Es macht Sinn, dass wir zunächst den Fall von 2×2-Matrizen anschauen.

Satz 1.1 *Für eine 2×2-Matrix $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sind äquivalent:*
(1) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
(2) A ist invertierbar.
(3) Die Determinante $|A| := ad - bc$ ist von Null verschieden.
In diesem Fall ist die inverse Matrix durch die Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

gegeben.

Beweis. Die Implikation (1) $\Leftrightarrow$ (2) kennen wir schon. (3) $\Rightarrow$ (2): Produktbildung liefert

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wir nehmen an, dass A invertierbar ist und erhalten daher eine Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

aus der wir — beispielhaft für $c \neq 0$ — die Gleichungen

$$\begin{aligned} ae + bg &= 1 \\ ce + dg &= 0 \end{aligned}$$

extrahieren. Subtraktion des c-fachen der ersten von dem a-fachen der zweiten Gleichung liefert

$$(ad - cb)g = -c,$$

woraus $|A| \neq 0$ folgt. Ähnlich argumentieren wir, falls ein anderer Eintrag von A nicht Null ist. □

Lösungsformel für $A \cdot x = b$

Satz 1.2 (Cramersche Regel) *Seien*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen voraus, dass A ***invertierbar*** *ist.*

Die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems ist dann durch

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

gegeben.

Beweis. Bilde das Produkt $A^{-1} \cdot b$ mit der diskutierten Formel für A^{-1}. □

Der Fall $n = 3$

In Kapitel 1 haben wir gesehen, wie mit Hilfe des Spatprodukts eine formelmäßige Überprüfung der linearen Unabhängigkeit eines Systems von drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ tatsächlich möglich ist. Die Cramersche Regel hat dort gleichfalls eine Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme mit invertierbarer 3×3-Matrix ergeben. Zum dritten Punkt verfügen wir bisher "nur" über algorithmische Lösungsverfahren. Wir erinnern ferner an die Rückführung von 3×3-Determinanten auf solche vom Format 2×2 durch "Entwicklung" der Determinante.

4.2 Existenz von Determinanten

Sinngemäß lassen sich die für $n = 2$ und $n = 3$ dargestellten Ergebnisse auf höhere Dimensionen n verallgemeinern. Hauptschwierigkeit ist dabei die **Determinantendefinition** selbst, da es nicht so klar ist, wie die Formel $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ und die entsprechende Formel für $n = 3$ auf höhere Dimensionen zu übertragen ist.

Gerade noch für $n = 3$ gibt es eine ähnlich "leichte" Formel, die **Sarrussche Regel**, welche $|A|$ als Summe von 6 Produkten (jeweils von drei Matrixeinträgen) mit zusätzlich alternierendem Vorzeichenfaktor darstellt.

Die **Leibnizsche Formel**, die wir erst am Ende dieses Kapitels behandeln, stellt generell — die Fälle $n = 2, 3$ verallgemeinernd — eine $n \times n$-Determinante als Summe von $n!$ Summanden mit alternierenden Vorzeichen dar; diese Summanden sind ihrerseits Produkte aus jeweils n Matrixeinträgen.

Satz 2.1 (Kennzeichung der Determinantenfunktion) *Es gibt genau eine Funktion*

$$\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad [a_1, a_2, \ldots, a_n] \mapsto \det(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(D 1) det *ist linear in jeder Spalte, d.h. es gilt stets*

$$\begin{aligned} \det(a_1, \ldots, a_i + a_i', \ldots, a_n) &= \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n) \\ \det(a_1, \ldots, \lambda.a_i, \ldots, a_n) &= \lambda \cdot \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

(D 2) $\det(A) = 0$*, wenn die Spalten von A linear abhängig sind.*

(D 3) $\det(E_n) = 1$.

Diese Funktion det nennen wir **Determinantenfunktion**. Für eine $n \times n$-Matrix A nennen wir $|A| := \det(A)$ die **Determinante** von A.

Der Nachweis der Eindeutigkeit von det beruht auf folgendem einfach zu beweisenden Hilfssatz.

Lemma 2.2 (Einfache Eigenschaften) *Die Funktion $D : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften* ***(D 1)*** *und*

(D 2') *Hat A zwei gleiche Spalten, so ist $D(A) = 0$.*

Dann gilt

(a) *Bei Vertauschen zweier Spalten ändert $D(A)$ das Vorzeichen.*

(b) *Bei Multiplikation einer Spalte von A mit einem Faktor λ ändert sich $D(A)$ um den Faktor λ.*

(c) *Der Wert $D(A)$ ändert sich nicht, wenn wir ein Vielfaches einer Spalte zu einer* ***anderen*** *Spalte addieren.*

(d) *D erfüllt die Bedingung* ***(D 2)****.*

Wir können daher Determinantenfunktionen auch durch die Bedingungen ***(D 1)****,* ***(D 2')*** *und* ***(D 3)*** *definieren.*

Beweis. Zu (a): Wir nehmen $i \neq k$ an und werten die Formel

$$0 = D(a_1, \ldots, \boxed{a_i + a_k}, \ldots, \boxed{a_i + a_k}, \ldots, a_n)$$

unter Verwendung der Linearität (D 1) und der Bedingung (D 2') aus.
Zu (b): Dies ist durch die geforderte Linearität von D in den Spalten abgedeckt.
Zu (c): Wir nehmen $i < k$ an und erhalten wegen (1)

$$\begin{aligned}&D(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, \boxed{a_k + \lambda.a_i}, \ldots, a_n) = \\ &D(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots, a_n) + \lambda \underbrace{D(a_1, \ldots, \boxed{a_i}, \ldots, \boxed{a_i}, \ldots, a_n)}_{=0}.\end{aligned}$$

Der Fall $k < i$ wird analog behandelt.
Zu (d): Wir nehmen an, dass die Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Matrix A linear abhängig sind. Dann lässt sich eine von ihnen, sagen wir a_k, als Linearkombination der übrigen schreiben. Durch sukzessive Addition von Vielfachen von Spalten a_i mit $i \neq k$ lässt sich dann A zu einer Matrix A' umformen, deren k-te Spalte Null ist. Wegen **(c)** gilt $D(A) = D(A')$. Andererseits ist wegen **(b)** $D(A') = 0$. □

Nachweis der Eindeutigkeit

Wir nehmen an, dass det und det$'$ beide die Eigenschaften (D 1), (D 2) und (D 3) haben. Falls die Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Matrix A linear abhängig sind, liefern sowohl det als auch det$'$ auf A den Wert Null. Beide Funktionen stimmen also auf nicht invertierbaren Matrizen überein.

Sei nun A eine **invertierbare** $n \times n$-Matrix. In diesem Fall entsteht A aus der Einheitsmatrix E_n durch eine Folge elementarer Spaltenumformungen. Das Lemma 2.2 zeigt uns, dass sich det und det$'$ unter elementaren Zeilenumformungen identisch verhalten und folglich $\det(A) = \det'(A)$ gilt. □

Existenzbeweis und Rekursionsformel

Der folgende Existenzbeweis liefert zugleich ein rekursives Berechnungsverfahren für die Determinantenabbildung. Mit anderen Worten zeigen wir die Existenz einer Determinantenabbildung $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch Induktion nach n.

Der Fall $n = 1$: Hier erfüllt die $\det : \mathrm{M}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(a) \mapsto a$ alle Anforderungen.

Der Fall $n > 1$: Wir nehmen an, dass wir schon eine Determinantenfunktion $\det_{n-1}$ für $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen haben und konstruieren dann eine $\det_n$ für $n \times n$-Matrizen:

Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sei A_{ik} die durch Streichen von i-ter Zeile und k-ter Spalte aus A entstehende $(n-1) \times (n-1)$-Matrix. Wir fixieren dann einen Zeilenindex i und setzen

$$(*) \qquad \det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A_{ij})$$

(sogenannte Entwicklung nach der i-ten Zeile).

Wegen Lemma 2.2 genügt es zu zeigen, dass $\det_n$ den Eigenschaften **(D 1)**, **(D 2')** und **(D 3)** einer Determinantenfunktion genügt.

Zu (D 3): Im Fall der Einheitsmatrix $A = E_n$ bleibt von (*) nur der Summand $(-1)^{i+i} \det(E_{n-1})$, so dass $\det_n(E_n) = 1$ folgt.

Zu (D 1): Die Linearität von $\det_n$ in den Spalten ist leicht zu verifizieren.

Der Kern des Beweises ist der Nachweis von **(D 2')**. Wir beschränken uns für den Nachweis auf den Fall von zwei gleichen benachbarten Spalten $a_k = a_l$ für $l = k + 1$. Dann hat A_{ij} für $j \notin \{k, l\}$ ebenfalls zwei gleiche Spalten und $\det_{n-1}(A_{ij})$ verschwindet. Ferner ist $A_{ik} = A_{il}$ und somit nach (*)

$$\det_n(A) = (-1)^{i+k}\det_{n-1}(A_{ik}) + (-1)^{i+l}\det_{n-1}(A_{il}) = 0. \qquad \square$$

Montag, 2. Februar 2004

Explizite Berechnung der Determinante

Der gerade diskutierte Eindeutigkeitsbeweis sagt uns zugleich, wie wir $\det(A)$ explizit bestimmen können.

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Durch **elementare Spaltenumformungen** können wir A auf Spaltenstufenform A' bringen. Falls A' von der Einheitsmatrix verschieden ist, hat A' und damit auch A einen Rang $< n$. In diesem Fall ist $\det(A) = 0$.

Andernfalls ist A invertierbar und $A' = E_n$. Somit hat A' die Determinante 1. Ferner wissen wir (Lemma!), wie elementare Spaltenumformungen den Wert der Determinante ändern. Nur das Vertauschen zweier Spalten und die Multiplikation einer Spalte mit dem Faktor $\lambda \neq 0$ liefern einen Beitrag, nämlich -1 bzw. λ.

Zusammenfassung 2.3 *Wir protokollieren die für die Umformung der invertierbaren Matrix A zur Einheitsmatrix notwendigen elementaren Spaltenumformungen, genauer notieren wir:*

1. *die Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ der verwendeten Multiplikationen von Spalten, und*

2. *die Anzahl t der Spaltenvertauschungen.*

Es ist dann $\det(A) = (-1)^t / \prod_{i=1}^{s} \lambda_i$.

Beispiel 2.4 (Determinantenberechnung) Zu berechnen sei die Determinante der 3×3-Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Mit $v'(i,j)$, $m'(i,\lambda)$, $a'(i,j,\alpha)$ bezeichnen wir die Spaltenumformungen "Vertauschen von i-ter und j-ter Spalte", "Multiplikation der i-ten Spalte mit $\lambda \neq 0$" bzw. "Addition des α-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte". Dann gilt

1. $a'(1,2,-3)$ und $a'(1,3,-5)$ liefern $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -7 & -12 \end{bmatrix}$.

2. $a'(2,1,1), a'(2,3,-1/2)$ und $m'(2,-1)$ liefern dann $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $a'(3,1,2), a'(3,2,-7/2)$ und $m'(3,1/2)$ liefern schließlich die Einheitsmatrix.

Fazit. *Es gab keine Spaltenvertauschungen. Zwei Spaltenmultiplikationen mit den Faktoren -1 bzw. $1/2$ traten auf. Die Determinante von A ist demgemäß -2.*