Beweis. Bei **(a)** handelt es sich um eine Umformulierung des ersten Teils von Satz 6.2, während **(b)** aus dem zweiten Teil des genannten Satzes folgt. □

Wir sind damit in der Lage — unter geeigneten Voraussetzungen an das Format — Matrizen zu addieren, mit Skalaren oder auch miteinander zu multiplizieren. Gleiches können wir — unter geeigneten Voraussetzungen an Definitions- und Wertebereiche — mit linearen Abbildungen tun. Wir erinnern daran, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix als

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

definiert ist.

Satz 6.7 (Darstellungsmatrizen) *Die Zuordnung $f \mapsto M(f)$, von linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu $m \times n$-Matrizen hat die folgenden Eigenschaften.*

(1) *$M(f+g) = M(f) + M(g)$ für alle linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

(2) *$M(a.f) = a.M(f)$ für alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und Skalare a.*

(3) *$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ für alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.*

(4) *$M(1_{\mathbb{R}^n}) = E_n$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bedeutet.*

$\boxed{\textbf{Montag, 19. Januar 2004}}$

Beweis. Zu (1): Es gilt $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$, daher $M(f+g) = [f(e_1) + f(e_2), \ldots, f(e_n)+g(e_n)] = [f(e_1), \ldots, f(e_n)]+[g(e_1), \ldots, g(e_n)]$ und folglich $M(f+g) = M(f) + M(g)$. **(2)** beweist man analog.
Zu (3): Es seien $A = M(f)$, $B = M(g)$ und $C = M(g \circ f)$. Daher ist $A = [a_1, \ldots, a_m]$ mit $a_i = f(e_i)$. Nach Satz hat g die Form $g(x) = B \cdot x$. Es ist daher

$$(g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g(a_i) = B \cdot a_i,$$

damit wegen Satz 6.4 (4)

$$M(g \circ f) = [B \cdot a_1, B \cdot a_2, \ldots, B \cdot a_n] = B \cdot A,$$

und somit $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$.
Zu (4): Als Darstellungsmatrix $M(1_{\mathbb{R}^n})$ der identischen Matrix erhalten wir $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, also die $n \times n$-Einheitsmatrix. □

Satz 6.8 (Rechenregeln) (i) *Die Menge* $\mathrm{M}_m(n)(\mathbb{R})$ *der* $m \times n$*-Matrizen bildet bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren einen Vektorraum der Dimension* mn*.*

(2) *Es gilt für jede* $m \times n$*-Matrix* A

$$E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$$

(3) *Die Matrixmultiplikation ist assoziativ.*

(4) *Es gelten die distributiven Gesetze* $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$ *und* $A\cdot(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$*.*

(5) *Im allgemeinen ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ.*

Beweis. Zu (1): Dies ergibt sich aus der Identifizierung $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^n$.
Zu (2): Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ gilt $1_{\mathbb{R}^m} \circ f = f = f \circ 1_{\mathbb{R}^n}$. Durch Übergang zu den Darstellungsmatrizen folgt unter Verwendung von Satz 6.7 (3) und (4) die Beziehung $E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$.
Zu (3) und (4): Es ist leicht zu sehen, dass die Verknüpfung von Abbildungen assoziativ und im Fall von linearen Abbildungen auch bezüglich der Summenbildung distributiv ist. Übergang zu den Darstellungsmatrizen liefert dann wegen Satz 6.7 die Behauptung.
Zu (5): Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann gilt

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B \cdot A.$$

□

3.7 Invertierbare Matrizen

Definition 7.1 *Eine $n \times n$-Matrix A heißt **invertierbar**, wenn es eine $n \times n$-Matrix B gibt, so dass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$ gilt.*

*In diesem Fall ist B durch A eindeutig bestimmt und heißt zu A **inverse Matrix**. Bezeichnung: A^{-1}.*

Zur Eindeutigkeit: Sind B und B' zu A invers, so folgt

$$B' = B' \cdot E_n = B' \cdot (A \cdot B) = (B' \cdot A) \cdot B = E_n \cdot B = B,$$

also wie behauptet $B' = B$. Wir werden übrigens im nächsten Satz sehen, dass wir für für $n \times n$-Matrizen, also für quadratische Matrizen, nur einseitig ein Inverses fordern müssen.

Satz 7.2 (Invertierbarkeit) *Für eine $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:*

(1) *A ist invertierbar.*

(2) *Die Multiplikationsabbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(3) *Die Spalten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ der Matrix A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.*

(4) *Es gibt eine $n \times n$-Matrix B mit $A \cdot B = E_n$.*

(5) *Es gibt eine $n \times n$-Matrix C mit $C \cdot A = E_n$.*

In diesem Fall sind die in (4) und (5) auftretenden Matrizen B und C beide gleich A^{-1}.

Donnerstag, 22. Januar 2004

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikationen

$$\begin{array}{ccc} (2) & \Rightarrow & (1) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (3) & \Leftarrow & (5) \end{array}$$

und danach die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2).
(2)$\Rightarrow$(1): Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, inverse Abbildung. Aus $f \circ g = 1_{\mathbb{R}^n} = g \circ f$ folgt durch Übergang zu Darstellungsmatrizen , dass $M(f) \cdot M(g) = E_n = M(g) \cdot M(f)$ gilt. Daher ist $B = M(g)$ zu $A = M(f)$ invers.
(1)$\Rightarrow$(5) ist trivial. **(5)$\Rightarrow$(3):** Wegen $C \cdot A = E_n$ gilt $[C \cdot s_1, \ldots, C \cdot s_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, somit $C \cdot s_i = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Daher sind die Spalten $s_1, s_2, \ldots, s_n$

der Matrix A linear unabhängig. Aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot s_i = 0$ folgt nämlich durch Multiplikation mit C (von links), dass $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i = 0$ gilt und damit alle α_i verschwinden. Nach Satz 3.11 bilden dann $s_1, s_2, \dots, s_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
(3)⇒(2): Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, ist linear. Ferner bildet sie die Standardbasis $e_1, e_2, \dots, e_n$ auf die aus den Spaltenvektoren $s_1, s_2, \dots, s_n$ von A bestehende Basis des $\mathbb{R}^n$ ab. f ist daher ein Isomorphismus.
(1)⇒(4) ist trivial. **(4)⇒(2):** Seien $b_1, b_2, \dots, b_n$ die Spalten von B. Wegen $A \cdot B = E_n$ gilt dann $[A \cdot b_1, A \cdot b_2, \dots, A \cdot b_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, bildet daher die Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$ auf die Standardbasis $e_1, e_2, \dots, e_n$ ab, ist daher ein Isomorphismus.

Sei nun $A \cdot B = E_n$, dann liefert Multiplikation mit A^{-1} von links, dass $B = A^{-1}$ gilt. Entsprechend folgt aus $C \cdot A = E_n$ durch Multiplikation mit A^{-1} von rechts, dass $C = A^{-1}$ gilt. □

Satz 7.3 (Inverse Matrizen: Rechenregeln) *A, B seien $n \times n$-Matrizen. Es gilt*

(1) Die Einheitsmatrix E_n ist invertierbar und $E_n^{-1} = E_n$.
(2) Ist A invertierbar, so auch A^{-1}. Es gilt dann: $(A^{-1})^{-1} = A$.
(3) Sind A und B invertierbar, so auch $A \cdot B$. Es gilt dann:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} .$$

Wir beachten in (3) die Umkehrung der Reihenfolge!

Beweis. Zu (1): Aus $E_n \cdot E_n = E_n$ folgt, dass E_n zu sich selbst invers ist. Eindeutigkeit der Inversen liefert die Behauptung.

Zu (2): Die Beziehung $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$, die ausdrückt, dass A^{-1} zu A invers ist, lässt sich durch Verkehrung der Rollen beider Faktoren auch so lesen, dass A zu A^{-1} invers ist, also $A = (A^{-1})^{-1}$ ist.

Zu (3): Es gilt

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n.$$

Entsprechend folgt $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E_n$ und dann die Behauptung. □

Invertierbare Matrizen und lineare Gleichungssysteme

A sei eine invertierbare $n \times n$-Matrix und b eine n-Spalte. Wir befassen uns erneut mit dem Lösen des linearen Gleichungssystems zur erweiterten Matrix $[A, b]$. Dieses Gleichungssystem können wir mit Hilfe der Matrixmultiplikation kompakt in der Form $A \cdot x = b$ darstellen.

Satz 7.4 (Gleichungssystem mit invertierbarer Matrix) *A sei eine invertierbare Matrix. Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$.*

Beweis. Einsetzen von $x = A^{-1} \cdot b$ ergibt, dass x eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist.

Sei andererseits x eine Lösung von $A \cdot x = b$, so ergibt Links-Multiplikation mit der Matrix A^{-1}, dass dann $x = A^{-1} \cdot b$ gelten muss. □

Bemerkung 7.5 (Bewertung der Lösungsformel) (1) Gegenüber der algorithmischen Lösung von $A \cdot x = b$ durch Umformen von $[A|b]$ auf Zeilenstufenform ist es vorteilhaft, dass wir die Lösung x durch eine allgemeingültige Formel $x = A^{-1} \cdot x$ angeben können.

(2) Diese Formel verdeutlicht zudem die Denkökonomie der Matrizenrechnung. Bis auf die Feinheit, dass wir auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten haben, entspricht sie genau der Lösung der Zahlengleichung $ax = b$ für $a \neq 0$.

(3) Zu beachten ist, dass die Formel — anders als der Gauß-Algorithmus — nur für invertierbare Matrizen A gilt.

(4) Ferner ist der Rechenaufwand zu beachten: Wir erzeugen hohen Rechenaufwand durch die anschließend diskutierte Bestimmung der inversen Matrix und anschließende Matrixmultiplikation. Im Vergleich schneidet die direkte algorithmische Lösung von $A \cdot x = b$ besser ab.

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Wie berechnet man die zu A inverse Matrix? Nach Voraussetzung bilden die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zur Bestimmung der zu A inversen Matrix X müssen wir das Matrixproblem $A \cdot X = E_n$ mit $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ lösen. Völlig gleichbedeutend ist die Aufgabe $[A \cdot x_1, \ldots, A \cdot x_n] = [e_1, \ldots, e_n]$, somit das simultane Lösen der linearen Gleichungssysteme $A \cdot x_i = e_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Wir wissen, dass diese Lösung durch elementare Zeilenumformungen möglich ist; dieselben können wir simultan durchführen:

Satz 7.6 (Algorithmische Berechnung der inversen Matrix) *Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Zeilenstufenform die Einheitsmatrix E_n ist.*

In diesem Fall lässt sich $[A|E_n]$ durch elementare Zeilenumformungen auf die Form $[E_n|B]$ bringen. Es ist dann B die zu A inverse Matrix.

Beweis. Sei A invertierbar. Wir bringen A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform A'. Da das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ wegen der Invertierbarkeit von A nur die Nullösung besitzt, gilt dies auch für $A' \cdot x = 0$. Damit hat A' den Rang n und ist wegen der Zeilenstufenform folglich die Einheitsmatrix E_n.

Wir setzen nun voraus, dass die Zeilenstufenform von A die Einheitsmatrix ist. In diesem Fall lässt sich $[A|E_n]$ durch elementare Zeilenumformungen zu $[E_n|B]$ umformen. Nach Vorbetrachtung ist $A \cdot B = E_n$, somit $B = A^{-1}$. $\square$

Wir führen diese Überlegungen an einem einfachen Beispiel durch:

Beispiel 7.7 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Wir bringen die erweiterte Matrix $[A|E_3]$ durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Es folgt damit, dass A invertierbar ist mit inverser Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.8 Der Rangsatz

Die Eigenschaften einer linearen Abbildung $f : V \to W$ werden stark von den beiden mit ihr verbundenen Unterräumen $\mathrm{Kern}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ — *und ihren Dimensionen* — bestimmt. Wir richten unser Augenmerk daher auf:

- den Kern von f, welcher ein Unterraum von V ist;
- das Bild von f, welches ein Unterraum von W ist.

Allein schon die Dimensionen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ geben wichtige Auskunft über f.

Definition 8.1 (Rang) *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt die Dimension von* $\mathrm{Bild}(f)$ *der **Rang** von f. Bezeichnung: rg(f).*

Ist A eine $m \times n$-Matrix, so erklären wir den Rang von A *als Rang der zugeordneten linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$.*

Für die durch die $m \times n$-Matrix A gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird $\mathrm{Bild}(f)$ von den Spalten von A aufgespannt. Daher ist der Rang $\mathrm{rg}(A)$ von A die maximale Anzahl eines Systems linear unabhängiger Spalten von A. Im Fall einer Matrix von Zeilenstufenform stimmt dieser mit dem früher definierten Rang überein. Wir sprechen daher genauer auch vom **Spaltenrang**[18] von A. Wir besprechen nun, wie die diskutierten Dimensionen miteinander zusammenhängen.

Satz 8.2 (Rangsatz für lineare Abbildungen) *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann gilt*

$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f).$$

Da uns — in der Regel — bei gegebenem f die Dimension von V (und auch die von W) bekannt ist, bestimmen sich folglich die Dimensionen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ wechselseitig. Als Regelbezeichnung[19] hat sich hier der Rang von f durchgesetzt.

Beweis des Rangsatzes. Da V und W endlichdimensional sind, haben auch $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ endliche Dimension.

Seien nun $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Im ersten Schritt wählen wir für jedes g_i $(1 \leq i \leq q)$ ein Urbild f_i aus V.

[18] Entsprechend lässt sich der **Zeilenrang** von A als Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von A erklären. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass Zeilen- und Spaltenrang stets übereinstimmen.

[19] Manchmal ist von der Dimension von $\mathrm{Kern}(f)$ als dem Defekt von f die Rede.

Wir behaupten, dass $B := (e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q)$ eine Basis von V ist, woraus dann der Rangsatz sofort folgt.
(1) B ist linear unabhängig: Aus

$$(a_1.e_1 + a_2.e_2 + \cdots + a_p.e_p) + (b_1.f_1 + b_2.f_2 + \cdots + b_q.f_q) = 0$$

folgt durch Anwendung von f, dass

$$b_1.g_1 + b_2.g_2 + \cdots + b_q.g_q = 0$$

und dann alle b_j verschwinden, da die g_j's eine Basis bilden. Es ergibt sich nunmehr

$$a_1.e_1 + a_2.e_2 + \cdots + a_p.e_p = 0,$$

woraus das Verschwinden auch der a_i folgt.

(2) B ist ein Erzeugendensystem von V: Sei $v \in V$, somit $f(v) \in \operatorname{Bild}(f) = \langle g_1, g_2, \ldots, g_q \rangle$. Wir erhalten also

$$f(v) = b_1.g_1 + \cdots + b_q.g_q = f(b_1.f_1 + \cdots + b_q.f_q)$$

mit geeigneten Skalaren b_j. Es folgt

$$f(v - (b_1.f_1 + b_2.f_2 + \cdots + b_q.f_q)) = 0,$$

somit ist

$$v - (b_1.f_1 + b_2.f_2 + \cdots + b_q.f_q)$$

in $\operatorname{Kern}(f)$ gelegen, daher von der Form $a_1.e_1 + a_2.e_2 + \cdots + a_p.e_p$ mit geeigneten Skalaren a_i. Zusammengefasst:

$$v = (a_1.e_1 + a_2.e_2 + \cdots + a_p.e_p) + (b_1.f_1 + b_2.f_2 + \cdots + b_q.f_q). \qquad \square$$

Montag, 26. Januar 2004

Satz 8.3 (Rangsatz für Matrizen) *Sei A eine $m \times n$-Matrix und H der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Die Dimension von H ist gerade $n - rg(A)$.*

Beweis. Wir wenden den Rangsatz 8.2 auf die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ an und beachten, dass $H = \operatorname{Kern}(f)$ und $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$ gilt. $\square$