Es ist dann $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus von W nach V. Für jeden Vektorraum V ist die identische Abbildung $1_v : V \to V$ ein Isomorphismus. Schließlich ist die Komposition von zwei Isomorphismen stets wieder ein Isomorphismus. Die Isomorphiebeziehung $\cong$ ist daher *reflexiv* ($V \cong V$), *symmetrisch* ($V \cong W$ impliziert $W \cong V$) und *transitiv* ($U \cong V$ und $V \cong W$ impliziert $U \cong W$).

Etwas pauschal formuliert, haben isomorphe Vektorräume übereinstimmende mathematischen Eigenschaften. Wir werden uns schrittweise von der Gültigkeit dieser Behauptung überzeugen.

Montag, 13. Januar 2004

Satz 5.8 *Isomorphe Vektorräume haben dieselbe Dimension.*

Beweis. Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir zeigen, dass $(*)$ $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von W ist, woraus durch Anzahlvergleich folgt, dass V und W dieselbe Dimension n haben.

$(*)$ **ist ein Erzeugendensystem**: Jedes w aus W hat die Form $w = f(v)$. Da $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, ist v eine Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und folglich $w = f(v)$ eine Linearkombination von $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$.

(*) ist linear unabhängig: Sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i.f(v_i) = 0$, so folgt dass $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i.v_i) = 0 = f(0)$ gilt. Wegen der Bijektivität von f erzwingt dies $\sum_{i=1}^n \alpha_i.v_i = 0$, woraus sich wegen der Basiseigenschaft $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ergibt. $\square$

Satz 5.9 (Klassifikation endlichdimensionaler Vektorräume)

(a) *Hat ein Vektorraum V die Dimension n, so ist $V \cong \mathbb{R}^n$.*

(b) *Es gilt $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $m = n$.*

Beweis. Zu (a): Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir betrachten die schon in Folgerung 1.15 betrachtete Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i.v_i.$$

Wir wissen, dass h bijektiv ist, da es sich bei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ um eine Basis von V handelt. Nachrechnen zeigt ferner, dass h linear ist. Somit ist h ein Isomorphismus.

Zu (b): Falls $m = n$ ist gilt $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$, damit sind beide Vektorräume erst recht zueinander isomorph. Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ zueinander isomorph sind. Nach Satz 5.8 haben dann beide Vektorräume dieselbe Dimension $m = n$. $\square$

Folgerung 5.10 *Die endlichdimensionalen Vektorräume V und W sind genau dann isomorph, wenn* $\dim V = \dim W$ *ist.*

Beweis. Falls V und W isomorph sind, haben sie nach Satz 5.8 dieselbe Dimension. Falls V und W andererseits dieselbe Dimension n haben, folgen $\mathbb{R}^n \cong V$ und $\mathbb{R}^n \cong W$ aus Satz 5.9. Unter Berücksichtigung von Symmetrie und Transitivität der Isomorphiebeziehung ergibt sich dann $V \cong W$. □

Bemerkung 5.11 (Isomorphie und Gleichheit) Wir müssen aufpassen, die Begriffe Gleichheit und Isomorphie von Vektorräumen trotz ihrer Ähnlichkeit nicht durcheinander zu bringen.

Zwei Vektorräume V und W sind gleich, wenn V und W aus denselben Elementen bestehen und zusätzlich Addition und Multiplikation mit Skalaren für V und W übereinstimmen.

Andererseits sind beispielsweise die Vektorräume

$$\mathbb{R}^2 \text{ und } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

zueinander *isomorph*, da sie beide die Dimension zwei haben.

Aber natürlich sind diese Vektorräume *nicht gleich*.

3.6 Matrizen und lineare Abbildungen

Wie konstruiert man lineare Abbildungen von V nach W? Eine Antwort auf diese Frage gibt der Satz über lineare Fortsetzung. Wir sehen schon an seiner Formulierung die wichtige Rolle von Basen.

Satz 6.1 (Satz über lineare Fortsetzung) *V und W seien Vektorräume.*

(a) *Stimmen die linearen Abbildungen $f, g : V \to W$ auf einem Erzeugendensystem von V überein, so folgt $f = g$.*

(b) *Ist $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ein System von n Vektoren aus W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit*

$$f(b_1) = w_1, f(b_2) = w_2, \ldots, f(b_n) = w_n.$$

Es gilt dabei $f\left(\sum_{i=1}^n r_i.b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i.w_i$ für jede Auswahl der Skalare r_i.

Es reicht somit völlig aus, eine lineare Abbildung $f : V \to W$ auf einer festen Basis von V zu kennen. Ferner können wir durch beliebige Wertewahl auf der gewählten Basis eine lineare Abbildung auf $f : V \to W$ festlegen.

Donnerstag, 15. Januar 2004

Beweis. Zu (a): Wir können jedes $x \in V$ als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^n x_i.b_i$ darstellen. Aus der Linearität von f und g folgt dann

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i.f(b_i) = \sum_{i=1}^n x_i.g(b_i) = g(x).$$

Es folgt damit $f = g$.

Zu (b): Wir definieren $f : V \to W$ durch die Formel

$$f\left(\sum_{i=1}^n r_i.b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i.w_i.$$

In der Tat definiert diese Formel eine Abbildung, da sich jedes x aus V eindeutig als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^n r_i.b_i$ darstellen lässt. Die Darstellung eines Basiselements b_i als Linearkombination der Basiselemente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ist gerade $b_i = 0.b_1 + \cdots + 0.b_{i-1} + 1.b_i + 0.b_{i+1} + \cdots + 0.b_n$, so dass $f(b_i) = w_i$ folgt.

Es bleibt, dass wir uns mit der Linearität von f befassen. Sind $x = \sum_{i=1}^n x_i.b_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i.b_i$ die Basisdarstellungen von x und y aus V, so folgt $x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i).b_i$. Wir erhalten damit

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i).b_i = \sum_{i=1}^n x_i.b_i + \sum_{i=1}^n y_i.b_i = f(x) + f(y).$$

Entsprechend zeigen wir, dass $f(a.x) = a.f(x)$ für alle Skalare a gilt. Damit haben wir die Existenz einer linearen Abbildung $f : V \to W$ gezeigt, die auf $b_1, b_2, \ldots, b_n$ der Reihe nach die Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ annimmt. Die Eindeutigkeit von f folgt aus Teil (a). □

Wir befassen uns anschließend mit einer wichtigen Folgerungen des Satzes über lineare Fortsetzung, welcher die Beschreibung von linearen Abbildungen durch Matrizen betrifft. Wir bezeichnen dazu mit $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir werden im folgenden die Mengen

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^n = (\mathbb{R}^m)^n$$

miteinander identifizieren, indem wir eine $m \times n$-Matrix A je nach Kontext durch ihren Spaltenaufbau $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$ als Mitglied des $(\mathbb{R}^m)^n$ oder durch ihren Zeilenaufbau $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$ als Mitglied von $(\mathbb{R}^n)^m$ auffassen. Insbesondere ist $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ bezüglich der argumentweisen Operationen ein Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Satz 6.2 (Darstellungsmatrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) *(a) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eindeutig durch ihre* Darstellungsmatrix

$$M(f) = [f(e_1), \ldots, f(e_n)] \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

vom Format $m \times n$ bestimmt, deren Spalten in dieser Reihenfolge die Bilder der Einheitsvektoren $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ unter f sind.

(b) Sei A umgekehrt eine $m \times n$-Matrix mit den Spalten $s_1, s_2, \ldots, s_n$, d.h.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [s_1, s_2, \ldots, s_n]\,.$$

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $M(f) = A$, also mit $f(e_i) = s_i$ Diese Abbildung ist formelmäßig gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i.s_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}.x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}.x_i \end{pmatrix}.$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes über lineare Fortsetzung zeigt, dass die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch die Folge $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ der Bilder der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$, also durch ihre Darstellungsmatrix $M(f)$, eindeutig bestimmt ist.

Die nächste Aussage, wie auch die Formel, folgt aus Teil (b) des Satzes über lineare Fortsetzung. □

Wir verwenden diesen Satz, um in einem zweistufigen Verfahren die Multiplikation von Matrizen einzuführen.

Definition 6.3 (Matrizenmultiplikation) *Sei A eine $m \times n$-Matrix wie oben.*

(a) ($m \times n$-Matrix) $\times$ Spalte: *Sei x eine $n \times 1$-Matrix, d.h. eine n-Spalte. Dann heißt*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} x_i. \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}.x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}.x_i \end{pmatrix}$$

*das **Produkt** der $m \times n$-Matrix A mit dem Spaltenvektor x.*

(b) ($m \times n$-Matrix) $\times$ ($n \times p$-Matrix): *Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix mit dem Spaltenaufbau $B = [b_1, b_2, \ldots, b_p]$. Dann heißt*

$$A \cdot B = A \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_p] := [A.b_1, \ldots, A.b_p]$$

das Matrizenprodukt von A und B.

Satz 6.4 (Berechnung Matrizenprodukt) *A sei eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und x eine n-Spalte. Dann gilt*

(1) Matrix $\times$ Einheitsvektor: $A \cdot e_i = [s_1, s_2, \ldots, s_n] \cdot e_i = s_i$.

(2)(n-Zeile) $\times$ (n-Spalte): $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

(3) ($m \times n$-Matrix) $\times$ (n-Spalte):

$$\begin{aligned} A \cdot x &= [s_1, s_2, \ldots, s_n] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i.s_i \\ &= \begin{pmatrix} z_1 \cdot x \\ \vdots \\ z_m \cdot x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

(4) ($m \times n$-Matrix) $\times$ ($n \times p$-Matrix):

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \\
&= A \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_p] \\
&= [A \cdot b_1, A \cdot b_2, \ldots, A \cdot b_p] \\
&= \begin{bmatrix} z_1 \cdot b_1 & \cdots & z_1 \cdot b_p \\ z_m \cdot b_1 & \ldots & z_m \cdot b_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_p] = \begin{bmatrix} z_1 \cdot B \\ \vdots \\ z_n \cdot B \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Beweis. Die einzelnen Aussagen ergeben sich direkt aus der Definition. □

Fazit 6.5 (Matrizenprodukt) Das Matrizenprodukt $A{\cdot}B = C$ lässt sich genau dann bilden, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt, d.h. wenn A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix ist. Das Produkt $C = A \cdot B$ ist dann diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$).

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation lässt sich die zuvor behandelte Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen besonders elegant ausdrücken:

Satz 6.6 (Korrespondenz: Lineare Abbildungen und Matrizen) *Es sei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear mit Darstellungsmatrix $M(f) = [f(e_1), \ldots, f(e_n)]$. Dann ist $A = M(f)$ eine $m \times n$-Matrix und es gilt*

$$f(x) = A \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) *Sei umgekehrt A eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto A \cdot x$$

linear mit Darstellungsmatrix $M(f) = A$.

Beweis. Bei **(a)** handelt es sich um eine Umformulierung des ersten Teils von Satz 6.2, während **(b)** aus dem zweiten Teil des genannten Satzes folgt. □

Wir sind damit in der Lage — unter geeigneten Voraussetzungen an das Format — Matrizen zu addieren, mit Skalaren oder auch miteinander zu multiplizieren. Gleiches können wir — unter geeigneten Voraussetzungen an Definitions- und Wertebereiche — mit linearen Abbildungen tun. Wir erinnern daran, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix als

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

definiert ist.

Satz 6.7 (Darstellungsmatrizen) *Die Zuordnung $f \mapsto M(f)$, von linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu $m \times n$-Matrizen hat die folgenden Eigenschaften.*

(1) *$M(f+g) = M(f) + M(g)$ für alle linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

(2) *$M(a.f) = a.M(f)$ für alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und Skalare a.*

(3) *$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ für alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.*

(4) *$M(1_{\mathbb{R}^n}) = E_n$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bedeutet.*

Montag, 19. Januar 2004

Beweis. Zu (1): Es gilt $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$, daher $M(f+g) = [f(e_1) + f(e_2), \ldots, f(e_n) + g(e_n)] = [f(e_1), \ldots, f(e_n)] + [g(e_1), \ldots, g(e_n)]$ und folglich $M(f+g) = M(f) + M(g)$. **(2)** beweist man analog.
Zu (3): Es seien $A = M(f)$, $B = M(g)$ und $C = M(g \circ f)$. Daher ist $A = [a_1, \ldots, a_m]$ mit $a_i = f(e_i)$. Nach Satz hat g die Form $g(x) = B \cdot x$. Es ist daher

$$(g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g(a_i) = B \cdot a_i,$$

damit wegen Satz 6.4 (4)

$$M(g \circ f) = [B \cdot a_1, B \cdot a_2, \ldots, B \cdot a_n] = B \cdot A,$$

und somit $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$.
Zu (4): Als Darstellungsmatrix $M(1_{\mathbb{R}^n})$ der identischen Matrix erhalten wir $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, also die $n \times n$-Einheitsmatrix. □