3.3 Austauschsatz, Basisergänzungssatz und Dimension

Montag, 15. Dezember 2003

Es sei V ein Vektorraum. Jedes Teilsystem eines linear unabhängigen Systems von V ist dann wieder linear unabhängig in V. Ferner führt jede Erweiterung eines Erzeugendensystems von V wieder zu einem Erzeugendensystem von V. Wir nennen ein Erzeugendensystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V **unverkürzbar**, falls kein echtes Teilsystem von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist. Entsprechend nennen wir eine linear unabhängiges System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **maximal linear unabhängig**, falls jede echte Erweiterung linear abhängig ist.

Um die Unverkürzbarkeit eines Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$ einzusehen, reicht dabei der Nachweis, dass jedes durch Weglassen eines einzigen Mitglieds v_i entstehende System $v_1, v_2, \ldots, v_i, \widehat{v_i}, v_{i+1}, \cdots, v_n$ kein Erzeugendensystem von V ist. Für den Nachweis der maximalen lineare Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ reicht es zu zeigen, dass jedes Hinzufügen eines einzigen Vektors v zu einem linear abhängigen System $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ führt.

Satz 3.1 (Kennzeichnung von Basen) *Für ein System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von Vektoren von V sind äquivalent:*

(a) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist eine* Basis *von V.*
(b) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist ein* unverkürzbares Erzeugendensystem[11] *von V.*
(c) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist* maximal linear unabhängig *in V.*
(d) *Jedes $v \in V$ lässt sich aus $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eindeutig linear kombinieren.*

Beweis. Wir orientieren den Nachweis am folgenden Schema

$$\begin{array}{ccccc} & & (b) & & \\ & & \Updownarrow & & \\ (d) & \Leftrightarrow & (a) & \Leftrightarrow & (c). \end{array}$$

Dabei ist uns die Implikation $(a) \Rightarrow (d)$ schon aus Satz 1.14 bekannt. Wir setzen nun (d) voraus. Ersichtlich ist dann $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V. Ferner besitzt der Nullvektor wegen (d) nur die Darstellung $0 = 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n$, woraus die lineare Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und dann auch die Basiseigenschaft, somit (a), folgt.

$(a) \Rightarrow (c)$: Als Basis ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ natürlich linear unabhängig. Ist dann v irgendein ein Vektor aus V, so können wir v als Linearkombination $v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n$ schreiben, woraus sich wegen $a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n + (-1).v = 0$ die lineare Abhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ ergibt. Das System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist daher maximal linear unabhängig.

[11] Auch die Bezeichnung *minimales Erzeugendensystem* ist gebräuchlich.

$(c) \Rightarrow (a)$: Wenn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein maximal linear unabhängiges System in V ist, so ist zur Basiseigenschaft noch zu zeigen, dass sich jeder Vektor v aus $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear kombinieren lässt. Nach Voraussetzung ist $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ linear abhängig. Es gibt daher eine lineare Relation $a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n + a.v = 0$, bei der nicht alle Koeffizienten verschwinden. Dabei kann a nicht gleich Null sein, da sonst die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig wären. Wegen $a \neq 0$ lässt sich die obige Beziehung daher nach v auflösen, was die Behauptung zeigt.

$(a) \Rightarrow (b)$: Als Basis ist zunächst $v_1, v_2, \ldots, v_n$ auch ein Erzeugendensystem. Wir nehmen an, dass es verkürzbar ist, also durch Weglassen sagen wir des i-ten Mitglieds ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ verbleibt[12]. Wir können dann den ausgelassenen Vektor v_i als Linearkombination $v_i = a_1.v_1 + \ldots + a_{i-1}.v_{i-1} + a_{i+1}.v_{i+1} + \cdots + a_n.v_n$ der übrigen Vektoren darstellen. Bringen wir alle Terme auf eine Seite, so erschließt sich die lineare Abhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$, Widerspruch. Damit ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

$(b) \Rightarrow (a)$: Wir müssen noch die lineare Unabhängigkeit eines unverkürzbaren Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zeigen. Wir nehmen dazu $a_1.v_1 + \cdots + a_i.v_i + \cdots + a_n.v_n = 0$ und $a_i \neq 0$ an. Durch Auflösen dieser Gleichung nach v_i ergibt sich, dass v_i eine Linearkombination von $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ ist. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — und damit alle Vektoren aus V — liegen somit sämtlich in der linearen Hülle $\langle v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n \rangle$. Dies widerspricht der vorausgesetzten Minimalität des Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$. □

Bemerkung 3.2 Es reicht nicht, nur eine einzige der vier Kennzeichnungen von Basen zu kennen.

Je nach Sachlage ist die eine oder die andere von ihnen — oft sogar sehr viel — vorteilhafter; wir sollten daher alle vier Kennzeichnungen kennen und sachgerecht anwenden können.

Donnerstag, 18. Dezember 2003

Folgerung 3.3 *Jedes endliche Erzeugendensystem eines Vektorraums V enthält eine Basis von V.*

Beweis. Wir lassen solange Elemente eines endlichen Erzeugendensystems weg, bis ein minimales Erzeugendensystem entsteht[13]. □

Wir machen hier auf eine weit verbreitete Fehlinterpretation von Satz 3.1 aufmerksam. Die dort angeführte Kennzeichnung einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ als

[12] Auch später werden wir — wo dies nicht zu Mißverständnissen führt — durch $\widehat{\ }$ das Weglassen des Elements aus einer Folge bezeichnen.

[13] Im Einklang mit den getroffenen Definitionen ist die leere Menge Basis jedes nur aus dem Nullvektor bestehenden Vektorraums $\{0\}$.

minimales (unverkürzbares) Erzeugendensystem bezieht sich nicht auf die *Anzahl der Basiselemente*, sondern auf die Minimalität von B bezüglich Inklusion $\subseteq$. Entsprechendes gilt für Eigenschaft einer Basis *maximal* linear unabhängig zu sein. Der Satz taugt daher nicht zu einer Begründung, dass je zwei Basen B und B' von V dieselbe Mitgliederzahl haben. Dieses zutreffende Faktum herzuleiten, erfordert weitere Argumente (Austauschsatz), die wir gleich im Anschluss behandeln.

Lemma 3.4 (Austauschlemma) *Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V und w ein von Null verschiedener Vektor aus V, den wir als Linearkombination*

$$(*) \qquad w = a_1.v_1 + \cdots + a_i.v_i + \cdots + a_n.v_n$$

der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Falls $a_i \neq 0$, entsteht durch Austausch von w mit v_i aus der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine neue Basis $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$ von V.

Beweis. Wegen $a_i \neq 0$ lässt sich $(*)$ nach v_i auflösen. Es ergibt sich v_i als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Folglich liegen alle v_j, $j = 1, \ldots, n$, im Unterraum $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$ und damit auch $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. Das System $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ist folglich ein Erzeugendensystem von V.

Um die lineare Unabhängigkeit des Systems zu zeigen, nehmen wir nun an, dass

$$c_1.v_1 + \cdots + c_{i-1}.v_{i-1} + c.w + c_{i+1}.v_{i+1} + \cdots + c_n.v_n = 0$$

ist. Falls $c = 0$ ist, erhalten wir aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ das Verschwinden aller c_j. Falls $c \neq 0$ ist, können wir w als Linearkombination $w = a'_1.v_1 + \cdots + 0.v_i + \cdots + a'_n.v_n$ darstellen, was der Eindeutigkeit der Darstellung von w in der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ widerspricht. $\square$

Satz 3.5 (Austauschsatz) *Es sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sei eine Basis von V. Ist zudem $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ein in V linear unabhängiges System, so können wir durch Umnummerierung der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erreichen, dass durch Austausch von $w_1, w_2, \ldots, w_r$ mit den ersten r Elementen der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ eine neue Basis*

$$w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$$

von V entsteht. Insbesondere ist $r \leq n$.

Beweis durch **Induktion nach** r.
Induktionsverankerung: Der Fall $r = 0$ ist klar.
Induktionsschritt: Nun sei $r \geq 1$ und per Induktionsannahme der Satz für jedes System von $r - 1$ auszutauschenden Vektoren gültig. Wir können daher — nach Umnummerierung der v_j — das linear unabhängige System $w_1, \ldots, w_{r-1}$ zu einer

Basis der Form $w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n$ von V ergänzen, und insbesondere w_r in der Form

$$w_r = a_1.w_1 + \cdots + a_{r-1}.w_{r-1} + a_r.v_r + \cdots + a_n.v_n$$

darstellen. Dabei können $a_r, \dots, a_n$ nicht alle 0 sein, da andernfalls die Vektoren $w_1, w_2, \dots, w_r$ linear abhängig wären. Nach erneutem Umnummerieren können wir daher $a_r \neq 0$ annehmen. Per Austauschlemma können wir dann den Vektor v_r der aktuellen Basis gegen w_r austauschen. Es folgt, dass $w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ eine Basis von V ist. □

Folgerung 3.6 (Invarianz der Dimension) *Je zwei endliche Basen von V haben dieselbe Anzahl von Mitgliedern.*

Beweis. Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ und $w_1, w_2, \dots, w_m$ endliche Basen von V, so folgt aus dem Austauschsatz $n \leq m$ und $m \leq n$, also $n = m$. □

Dieses Faktum erst ermöglicht die Definition der Dimension von Vektorräumen, die sich überhaupt als wichtigste Eigenschaft eines Vektorraums herausstellen wird.

Definition 3.7 (Dimension) *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die Anzahl der Mitglieder einer Basis von V heißt die* ***Dimension*** *von V. Schreibweise:* $\dim_{\mathbb{R}} V$ *oder* $\dim V$.

Beispiel 3.8 Im $\mathbb{R}^n$ bilden die "Einheitsvektoren" $e_1, e_2, \dots, e_n$ die Standardbasis. Somit ist $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Einen Spezialfall der folgenden Aussage haben wir mit dem Dimensionsaxiom der anschaulichen Vektorrechnung (6.6) schon kennengelernt.

Satz 3.9 *Ist V ein Vektorraum der Dimension n, so sind je $n+1$ Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ linear abhängig.* □

Satz 3.10 (Basisergänzungssatz) *V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum. Jeder Unterraum U von V ist dann ebenfalls endlichdimensional. Ferner lässt sich jede Basis $w_1, w_2, \dots, w_r$ von U zu einer Basis*

$$w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$$

von V ergänzen.

Beweis. Sei $n = \dim V$, Wegen des Austauschsatzes hat jedes (endliche) linear unabhängige System $w_1, w_2, \dots, w_r$ von U höchstens $r \leq n$ Mitglieder. Wir können daher annehmen, dass r maximal gewählt ist. Als maximal linear unabhängiges System von U ist $w_1, w_2, \dots, w_r$ nach Satz 3.1 eine Basis von U.

Per Austauschsatz 3.5 lässt sich ferner das in V linear unabhängige System $w_1, w_2, \dots, w_r$ zu einer Basis der Form $w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ von V ergänzen. □

Satz 3.11 (Dimension von Unterräumen) *Ist U ein Unterraum des endlichdimensionalen Vektorraums V so folgt* $\dim U \leq \dim V$. *Gleichheit* $\dim U = \dim V$ *gilt genau dann wenn* $U = V$.

Beweis. Sei $w_1, w_2, \ldots, w_r$ eine Basis von U. Mittels Basisergänzungssatz können wir dieselbe zu einer Basis $w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Aus $r = \dim U = \dim V = n$ folgt dann, dass $w_1, w_2, \ldots, w_r$ zugleich eine Basis von U und von V ist, woraus durch Übergang zur linearen Hülle $U = \langle w_1, w_2, \ldots, w_r \rangle = V$ folgt. □

Satz 3.12 (Dimensionsformel für Unterräume) *Sind U_1, U_2 Unterräume des endlichdimensionalen Vektorraums V, so gilt*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + \dim U_1 + U_2.$$

Beweis. Wir veranschaulichen die Verhältnisse durch das Hasse-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& U_1 + U_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
U_1 \arrow[dr, dash] & & U_2, \arrow[dl, dash] \\
& U_1 \cap U_2 &
\end{tikzcd}$$

wobei die Verbindungslinien die vorhandenen Inklusionen angeben. Zum Beweis der Dimensionsformel starten mit einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s$ von $U_1 \cap U_2$, dem kleinsten der beteiligten Unterräume. Wir können dann $e_1, e_2, \ldots, e_s$ sowohl zu einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p$ von U_1 als auch zu einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s$, $g_1, g_2, \ldots, g_q$ von U_2 ergänzen. Wir behaupten nun, dass die in dieser Konstruktion insgesamt auftretenden Vektoren

$$(*) \qquad e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ bilden, woraus sich die behauptete Formel sofort ergibt.

Montag, 5. Januar 2004

Jedes Element aus U_1 (bzw. U_2) lässt sich aus $e_1, e_2, \ldots, e_s$ und $f_1, f_2, \ldots, f_p$ (bzw. aus $e_1, e_2, \ldots, e_s$ und $g_1, g_2, \ldots, g_q$) linear kombinieren. Jedes $x \in U_1 + U_2$ ist daher eine Linearkombination der Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p$ und $g_1, g_2, \ldots, g_q$. Damit ist $(*)$ ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von $(*)$ betrachten wir eine verschwindende Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{s} a_i.e_i + \sum_{j=1}^{p} b_j.f_j + \sum_{k=1}^{q} c_k.g_k = 0.$$

Es folgt, dass das Element

$$\sum_{i=1}^{s} a_i.e_i + \sum_{j=1}^{p} b_j.f_j = \sum_{k=1}^{q} (-c_k).g_k$$

sowohl in U_1 (betrachte dazu die linke Seite des Ausdrucks) als auch in U_2 (betrachte dazu die rechte Seite) und folglich in $U_1 \cap U_2$ gelegen ist. Daher ist zunächst $c_k = 0$ für $k = 1, \ldots, q$ und dann wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s, f_1, f_2, \ldots, f_p$ von U_1 auch $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ und $b_j = 0$ $(j = 1, \ldots, p)$. Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit von $e_1, e_2, \ldots, e_s$, $f_1, f_2, \ldots, f_p$, $g_1, g_2, \ldots, g_q$. $\square$

Anwendung 3.13 (Schnitt von Ebenen) **(a)** U_1 und U_2 seien zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^3$, also Ebenen durch 0. Falls die beiden Ebenen nicht übereinstimmen, ist ihr Schnittgebilde eine Gerade durch 0. Wegen der Dimensionsformel sind nämlich nur die Möglichkeiten $U_1 = U_2$ bzw. $\dim U_1 \cap U_2 = 1$ möglich.

(b) In höheren Dimensionen, so dem $\mathbb{R}^4$, kann es dagegen vorkommen, dass zwei Ebenen durch 0 nur den Nullpunkt gemeinsam haben. Als Beispiel betrachten wir die zweidimensionalen Unterräume $U_1 = \mathbb{R}.e_1 + \mathbb{R}.e_2$ und $U_2 = \mathbb{R}.e_3 + \mathbb{R}.e_4$ mit dem Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Wie früher bezeichnet hier e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$.

3.4 Das kartesische (direkte) Produkt

Satz 4.1 *Sind V_1, V_2 Vektorräume, so ist das kartesische Produkt $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ bzgl. der komponentenweisen Definition*

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (w_1, w_2) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ a.(v_1, v_2) &= (a.v_1, a.v_2) \end{aligned}$$

von Addition und Multiplikation mit Skalaren wieder ein Vektorraum.

Beweis. durch einfaches Nachrechnen. □

Der Vektorraum $V_1 \times V_2$ heißt das **kartesische Produkt** oder gleichbedeutend das **direkte Produkt** von V_1 und V_2.

Entsprechend bilden wir das direkte Produkt $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ für mehrere Faktoren $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Gilt zusätzlich noch $V_1 = V_2 = \cdots = V_n =: V$, so ist hierfür die Potenzschreibweise $V \times \cdots \times V = V^n$ gebräuchlich.

Der schon früher besprochene $\mathbb{R}^n$ ist somit ein Spezialfall des direkten Produkts von Vektorräumen[14].

Satz 4.2 (Dimensionsformel direktes Produkt) *Sind V_1, V_2 Vektorräume, so gilt* $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$.

Beweis. Wir zeigen etwas mehr: Sind $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und $f_1, f_2, \ldots, f_m$ Basen von V_1 (bzw. von V_2), so ist das System

$$(*) \qquad (e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_m)$$

eine Basis von $V_1 \times V_2$. Sind nämlich $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, so gibt es Darstellungen

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n \\ v_2 &= b_1.f_1 + \cdots + b_m.f_m \end{aligned}$$

von v_1 und v_2 als Linearkombinationen, woraus

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= (v_1, 0) + (0, v_2) \\ &= (a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n, 0) + (0, b_1.f_1 + \cdots + b_m.f_m) \\ &= a_1.(e_1, 0) + \cdots + a_n.(e_n, 0) + b_1.(0, f_1) + \cdots + b_m(0, f_m) \end{aligned}$$

folgt. Das System (*) ist folglich ein Erzeugendensystem von $V_1 \times V_2$.

Das System (*) ist auch linear unabhängig. Aus einer linearen Relation

$$a_1.(e_1, 0) + \cdots + a_n.(e_n, 0) + b_1.(0, f_1) + \cdots + b_m(0, f_m) = 0$$

[14] Es kommt für die jetzige Betrachtung ersichtlich nicht darauf an, ob wir Elemente als Zeilen oder Spalten schreiben.

folgt nämlich unter Verwendung der obigen Formeln

$$(a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n, b_1.f_1 + \cdots + b_m.f_m) = (0, 0),$$

woraus sich die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n &= 0 \\ b_1.f_1 + \cdots + b_m.f_m &= 0 \end{aligned}$$

ergeben. Da $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und $f_1, f_2, \ldots, f_m$ linear unabhängig sind, folgt dann $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, somit die lineare Unabhängigkeit von $(*)$. $\square$

3.5 Lineare Abbildungen

Donnerstag, 8. Januar 2004

Lineare Abbildungen benötigen wir, um Vektorräume zu vergleichen. Es sind dies diejenigen Abbildungen zwischen Vektorräumen, die die Vektorraumstruktur repräsentieren. Eigentlich sind lineare Abbildungen sehr viel wichtiger als die Vektorräume selbst! Der Gehalt dieser Aussage wird mit fortschreitender Vorlesung zunehmend klarer ins Blickfeld rücken.

Definition 5.1 *V und W seien Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear**, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V, \textit{und} \\ f(a.v) &= a.f(v) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und } v \in V. \end{aligned}$$

Rechenregeln 5.2 *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gelten folgende Rechenregeln:*

(1) $f(0_V) = 0_W$,

(2) $f(-v) = -f(v)$, *für alle $v \in V$,*

(3) $f(a_1.v_1+a_2.v_2) = a_1.f(v_1)+a_2.f(v_2)$, *für alle Skalare a_i und Vektoren $v_i \in V$,*

(4) $f\left(\sum_{i=1}^n a_i.v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i.f(v_i)$ *für alle Skalare a_i und Vektoren $v_i \in V$.*

Beweis. Zu (1): Auf die in V gültige Beziehung $0 + 0 = 0$ wenden wir f an und erhalten in W die Beziehung $f(0) + f(0) = f(0)$, aus der durch Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten die Behauptung $f(0) = 0$ folgt[15].

Zu (2): In V gilt $v + (-v) = 0$, woraus sich $f(v) + f(-v) = f(0) = 0$ ergibt. Es folgt $f(-v) = -f(v)$.

Zu (3) und (4): Dies ergibt sich sofort aus der Linearität von f. □

Beispiele 5.3 **(1)** Die Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v) = 0$ für alle $v \in V$ ist linear. Schreibweise $f = 0$.

(2) Die **identische Abbildung** $1_V : V \to V$ mit $1_V(v) = v$ für alle $v \in V$ ist linear.

[15] Wir leiten hier die Eigenschaften (1) und (2) allein aus der Additivität $f(x+y) = f(x)+f(y)$ einer linearen Abbildung her. Heranziehen der Verträglichkeit $f(a.v) = a.f(v)$ mit der skalaren Multiplikation liefert wegen $0.0 = 0$ und $(-1).v = -v$ natürlich erhebliche Beweisabkürzungen für (1) und (2).

(3) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, ist linear.

(4) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_2 + a_3$ ist linear.

(5) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, ist nicht linear.

(6) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$, ist nicht linear.

Weitere Eigenschaften 5.4 Die Abbildung $f : V \to W$ sei linear. Dann gilt

(1) Ist U ein Unterraum von V, so ist $f(U)$ ein Unterraum von W, den wir das **Bild von U unter f** nennen.

(2) Es ist $f(V)$ ein Unterraum von W, den wir das **Bild** von f nennen und mit $\mathrm{Bild}(f)$ bezeichnen.

(3) Ist U ein Unterraum von W, so ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V. Wir nennen $f^{-1}(U)$ das **Urbild** von U unter f.

(4) Insbesondere ist $f^{-1}(\{0\})$ ein Unterraum von V, den wir als **Kern** von f bezeichnen.

(5) Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig in V, so sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig in W.

(6) Sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in W, so sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig in V. Die Umkehrung gilt nicht!

Beweis. Zu (1) und (2): Wegen $f(0) = 0$ liegt 0 in $f(U)$. Sind ferner zwei Elemente $x = f(u_1)$, $u_1 \in U$, und $y = f(u_2)$, $u_2 \in U$, in $f(U)$ gelegen, so gilt dies auch für $x+y = f(u_1+u_2)$. Analog liegt für jeden Skalar a mit $x = f(u)$, $u \in U$, auch $a.x = f(a.u)$ in $f(U)$. Folglich ist $f(U)$ ein Unterraum von W.

Zu (3) und (4): Wegen $f(0) = 0 \in U$ liegt 0 in $f^{-1}(U)$. Sind ferner x und y Elemente aus V mit $f(x) \in U$ und $f(y) \in U$, so folgt $f(x+y) = f(x)+f(y) \in U$. Es ist damit $f^{-1}(U)$ gegen Bildung von Summen abgeschlossen. Schließlich gilt für jeden Skalar a und jedes $x \in f^{-1}(U)$ die Beziehung $f(a.x) = a.f(x) \in U$, so dass auch $a.x$ im Urbild von U gelegen ist. Damit ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V.

Zu (5): Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear abhängig in V, so gibt es nicht sämtlich verschwindende Skalare $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $\sum_{i=1}^n a_i.v_i = 0$. Aus der Linearität von f folgt dann

$$\sum_{i=1}^n a_i.f(v_i) = f\left(\sum_{i=0}^n a_i.v_i\right) = f(0) = 0.$$

Damit sind die Vektoren $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ in W linear abhängig.

Zu (6): Bei der ersten Aussage handelt es sich um eine Umformulierung von **(5)**. Schließlich macht die Nullabbildung, die bekanntlich linear ist, aus jedem linear unabhängigen System $v_1, v_2, \dots, v_n$ ein linear abhängiges System. Dies zeigt auch die zweite Behauptung. □

Satz 5.5 **(1)** *Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen, so ist die durch*

$$g \circ f : U \to W, \quad u \mapsto g(f(u))$$

*erklärte **Verknüpfung**[16] oder auch **Komposition** von f und g wieder eine lineare Abbildung.*

(2) *Sind $f, g : V \to W$ linear, so ist auch die Abbildung $f + g : V \to W$, $v \mapsto f(v) + g(v)$, linear.*

(3) *Ist $f : V \to W$ linear, so ist für jeden Skalar a auch die Abbildung $a.f : V \to W$, $v \mapsto a.f(v)$ linear.*

Beweis. Zu (1): Sei $h = g \circ f$, also $h(u) = g(f(u))$ für alle $u \in U$, so folgt

$$\begin{aligned} h(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = g(f(u_1) + f(u_2)) = h(u_1) + h(u_2) \\ h(r.u) &= g(f(r.u)) = g(r.f(u)) = r.(g(f(u)) = r.h(u) \end{aligned}$$

für alle $u, u_1, u_2 \in U$ und $r \in \mathbb{R}$.

Zu (2): Sei $h = f + g$, also $h(v) = f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$, so folgt

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) \\ &= (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2) = h(v_1) + h(v_2). \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für alle Skalare a und Vektoren $v \in V$

$$\begin{aligned} h(a.v) &= f(a.v) + g(a.v) = a.f(v) + a.g(v) \\ &= a.(f(v) + g(v)) = a.h(v). \end{aligned}$$

[16] Wir werden später an Stelle von $g \circ f$ häufig einfach gf schreiben.

Zu (3): Sei $h = a.f$, so folgt

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= a.f(v_1 + v_2) = a.(f(v_1) + f(v_2)) \\ &= a.f(v_1) + a.f(v_2) = h(v_1) + h(v_2) \\ h(b.v) &= a.f(b.v) = a.(b.f(v)) \\ &= (a \cdot b).f(v) = (b \cdot a).f(v) \\ &= b.(a.f(v)) = b.h(v). \end{aligned}$$

Wir beachten, dass im letzten Argument die Vertauschbarkeit von Skalaren (Kommutativität) verwendet wurde. □

Ist $f : V \to W$ eine bijektive Abbildung, so gibt es zu jedem $w \in W$ ein eindeutig bestimmtes $v \in V$ mit $f(v) = w$; Schreibweise: $v = f^{-1}(w)$. Durch die Zuordnung $w \mapsto v$ mit $f(v) = w$ wird eine Abbildung $f^{-1} : W \to V$ erklärt, welche **Umkehrabbildung** zu f oder auch die zu f **inverse Abbildung** heißt. Wir beachten, dass die Beziehungen

$$f \circ f^{-1} = 1_V \text{ und } f^{-1} \circ f = 1_W$$

gelten[17]. Da $v = f^{-1}(w)$ die Eigenschaft $f(v) = w$ hat, folgt nämlich $w = f(f^{-1}(w)) = (f \circ f^{-1})(w)$ für alle $w \in W$ und damit $1_W = f \circ f^{-1}$. Für $v \in V$ liegt $w = f(v)$. Nach Definition von f^{-1} gilt daher $f^{-1}(w) = v$, also $f^{-1} \circ f(v) = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(w) = v$ für alle $v \in V$, folglich wie behauptet $f^{-1} \circ f = 1_V$.

Satz 5.6 (Linearität der inversen Abbildung) *$f : V \to W$ sei eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear.*

Beweis. Seien $w_1, w_2 \in W$ und $v_1 = f^{-1}(w_1)$, $v_2 = f^{-1}(w_2)$. Es gilt somit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$, folglich $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) = w_1+w_2$, woraus $f^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$ folgt.

Entsprechend gelten für jeden Skalar a und jedes $w \in W$ mit $v = f^{-1}(w)$ die Beziehungen $f(v) = w$, somit $f(a.v) = a.f(v) = a.w$, woraus $f^{-1}(a.w) = a.v = a.f^{-1}(w)$ folgt. □

Definition 5.7 *Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt* ***Isomorphismus*** *von V nach W. Wir nennen die beiden Vektorräume V und W in diesem Fall* ***isomorph****. Bezeichnung $V \cong W$.*

---

[17]Ist $f : V \to W$ eine bijektive Abbildung und U eine Teilmenge von W, so hat $f^{-1}(U)$ zwei mögliche Interpretationen, einerseits die als Urbild von U unter f und andererseits die als Bild von U unter f^{-1}. Beide Interpretationen liefern dasselbe Ergebnis!

Es ist dann $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus von W nach V. Für jeden Vektorraum V ist die identische Abbildung $1_v : V \to V$ ein Isomorphismus. Schließlich ist die Komposition von zwei Isomorphismen stets wieder ein Isomorphismus. Die Isomorphiebeziehung $\cong$ ist daher *reflexiv* ($V \cong V$), *symmetrisch* ($V \cong W$ impliziert $W \cong V$) und *transitiv* ($U \cong V$ und $V \cong W$ impliziert $U \cong W$).

Etwas pauschal formuliert, haben isomorphe Vektorräume übereinstimmende mathematischen Eigenschaften. Wir werden uns schrittweise von der Gültigkeit dieser Behauptung überzeugen.

Satz 5.8 *Isomorphe Vektorräume haben dieselbe Dimension.*

Beweis. Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir zeigen, dass $(*)$ $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von W ist, woraus durch Anzahlvergleich folgt, dass V und W dieselbe Dimension n haben.

$(*)$ **ist ein Erzeugendensystem**: Jedes w aus W hat die Form $w = f(v)$. Da $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, ist v eine Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und folglich $w = f(v)$ eine Linearkombination von $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$.

(*) ist linear unabhängig: Sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i.f(v_i) = 0$, so folgt dass $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i.v_i) = 0 = f(0)$ gilt. Wegen der Bijektivität von f erzwingt dies $\sum_{i=1}^n \alpha_i.v_i = 0$, woraus sich wegen der Basiseigenschaft $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ergibt. $\square$

Satz 5.9 (Klassifikation endlichdimensionaler Vektorräume)

(a) *Hat ein Vektorraum V die Dimension n, so ist $V \cong \mathbb{R}^n$.*

(b) *Es gilt $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $m = n$.*

Beweis. Zu (a): Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir betrachten die schon in Folgerung 1.15 betrachtete Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i.v_i.$$

Wir wissen, dass h bijektiv ist, da es sich bei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ um eine Basis von V handelt. Nachrechnen zeigt ferner, dass h linear ist. Somit ist h ein Isomorphismus.

Zu (b): Falls $m = n$ ist gilt $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$, damit sind beide Vektorräume erst recht zueinander isomorph. Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ zueinander isomorph sind. Nach Satz 5.8 haben dann beide Vektorräume dieselbe Dimension $m = n$. $\square$

Folgerung 5.10 *Die endlichdimensionalen Vektorräume V und W sind genau dann isomorph, wenn* $\dim V = \dim W$ *ist.*

Beweis. Falls V und W isomorph sind, haben sie nach Satz 5.8 dieselbe Dimension. Falls V und W andererseits dieselbe Dimension n haben, folgen $\mathbb{R}^n \cong V$ und $\mathbb{R}^n \cong W$ aus Satz 5.9. Unter Berücksichtigung von Symmetrie und Transitivität der Isomorphiebeziehung ergibt sich dann $V \cong W$. □

Bemerkung 5.11 (Isomorphie und Gleichheit) Wir müssen aufpassen, die Begriffe Gleichheit und Isomorphie von Vektorräumen trotz ihrer Ähnlichkeit nicht durcheinander zu bringen.

Zwei Vektorräume V und W sind gleich, wenn V und W aus denselben Elementen bestehen und zusätzlich Addition und Multiplikation mit Skalaren für V und W übereinstimmen.

Andererseits sind beispielsweise die Vektorräume

$$\mathbb{R}^2 \text{ und } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

zueinander *isomorph*, da sie beide die Dimension zwei haben.

Aber natürlich sind diese Vektorräume *nicht gleich*.

3.6 Matrizen und lineare Abbildungen

Satz 6.1 (Satz über lineare Fortsetzung) *V und W seien Vektorräume.*

(a) *Stimmen die linearen Abbildungen $f, g : V \to W$ auf einem Erzeugendensystem von V überein, so folgt $f = g$.*

(b) *Ist $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ein System von n Vektoren aus W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit*

$$f(b_1) = w_1, f(b_2) = w_2, \ldots, f(b_n) = w_n.$$

Es gilt dabei $f\left(\sum_{i=1}^n r_i.b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i.w_i$ für jede Auswahl der Skalare r_i.

Es reicht somit völlig aus, eine lineare Abbildung $f : V \to W$ auf einer festen Basis von V zu kennen. Ferner können wir durch beliebige Wertewahl auf der gewählten Basis eine lineare Abbildung auf $f : V \to W$ festlegen.

Donnerstag, 15. Januar 2004

Beweis. Zu (a): Wir können jedes $x \in V$ als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^n x_i.b_i$ darstellen. Aus der Linearität von f und g folgt dann

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i.f(b_i) = \sum_{i=1}^n x_i.g(b_i) = g(x).$$

Es folgt damit $f = g$.

Zu (b): Wir definieren $f : V \to W$ durch die Formel $f\left(\sum_{i=1}^n r_i.b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i.w_i$. In der Tat definiert diese Formel eine Abbildung, da sich jedes x aus V eindeutig als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^n r_i.b_i$ darstellen lässt. Die Darstellung eines Basiselements b_i als Linearkombination der Basiselemente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ist gerade $b_i = 0.b_1 + \cdots + 0.b_{i-1} + 1.b_i + 0.b_{i+1} + \cdots + 0.b_n$, so dass $f(b_i) = w_i$ folgt.

Es bleibt, dass wir uns mit der Linearität von f befassen. Sind $x = \sum_{i=1}^n x_i.b_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i.b_i$ die Basisdarstellungen von x und y aus V, so folgt $x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i).b_i$. Wir erhalten damit $f(x+y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i).b_i = \sum_{i=1}^n x_i.b_i + \sum_{i=1}^n y_i.bi = f(x) + f(y)$. Entsprechend zeigen wir, dass $f(a.x) = a.f(x)$ für alle Skalare a gilt. Damit haben wir die Existenz einer linearen Abbildung $f : V \to W$ gezeigt, die auf $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ annimmt. Die Eindeutigkeit von f folgt aus Teil (a). □

Wir beginnen mit zwei wichtigen Folgerungen des Satzes über lineare Fortsetzung, welche die Beschreibung von linearen Abbildungen durch Matrizen betreffen. Wir bezeichnen dazu mit $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir werden im folgenden die Mengen

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^n = (\mathbb{R}^m)^n$$