## 3.3 Austauschsatz, Basisergänzungssatz und Dimension

**Montag, 15. Dezember 2003**

Es sei $V$ ein Vektorraum. Jedes Teilsystem eines linear unabhängigen Systems von $V$ ist dann wieder linear unabhängig in $V$. Ferner führt jede Erweiterung eines Erzeugendensystems von $V$ wieder zu einem Erzeugendensystem von $V$. Wir nennen ein Erzeugendensystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von $V$ **unverkürzbar**, falls kein echtes Teilsystem von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist. Entsprechend nennen wir eine linear unabhängiges System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **maximal linear unabhängig**, falls jede echte Erweiterung linear abhängig ist.

Um die Unverkürzbarkeit eines Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$ einzusehen, reicht dabei der Nachweis, dass jedes durch Weglassen eines einzigen Mitglieds $v_i$ entstehende System $v_1, v_2, \ldots, v_i, \widehat{v_i}, v_{i+1}, \cdots, v_n$ kein Erzeugendensystem von $V$ ist. Für den Nachweis der maximalen lineare Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ reicht es zu zeigen, dass jedes Hinzufügen eines einzigen Vektors $v$ zu einem linear abhängigen System $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ führt.

**Satz 3.1 (Kennzeichnung von Basen)** *Für ein System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von Vektoren von $V$ sind äquivalent:*

(*a*) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist eine* Basis *von $V$.*

(*b*) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist ein* unverkürzbares Erzeugendensystem[11] *von $V$.*

(*c*) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *ist* maximal linear unabhängig *in $V$.*

(*d*) *Jedes $v \in V$ lässt sich aus $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eindeutig linear kombinieren.*

**Beweis.** Wir orientieren den Nachweis am folgenden Schema

$$\begin{array}{ccccc} & & (b) & & \\ & & \Updownarrow & & \\ (d) & \Leftrightarrow & (a) & \Leftrightarrow & (c). \end{array}$$

Dabei ist uns die Implikation $(a) \Rightarrow (d)$ schon aus Satz 1.14 bekannt. Wir setzen nun $(d)$ voraus. Ersichtlich ist dann $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von $V$. Ferner besitzt der Nullvektor wegen $(d)$ nur die Darstellung $0 = 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n$, woraus die lineare Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und dann auch die Basiseigenschaft, somit $(a)$, folgt.

$(a) \Rightarrow (c)$: Als Basis ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ natürlich linear unabhängig. Ist dann $v$ irgendein ein Vektor aus $V$, so können wir $v$ als Linearkombination $v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n$ schreiben, woraus sich wegen $a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n + (-1).v = 0$ die lineare Abhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ ergibt. Das System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist daher maximal linear unabhängig.

[11] Auch die Bezeichnung *minimales Erzeugendensystem* ist gebräuchlich.

$(c) \Rightarrow (a)$: Wenn $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein maximal linear unabhängiges System in $V$ ist, so ist zur Basiseigenschaft noch zu zeigen, dass sich jeder Vektor $v$ aus $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear kombinieren lässt. Nach Voraussetzung ist $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ linear abhängig. Es gibt daher eine lineare Relation $a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n + a.v = 0$, bei der nicht alle Koeffizienten verschwinden. Dabei kann $a$ nicht gleich Null sein, da sonst die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig wären. Wegen $a \neq 0$ lässt sich die obige Beziehung daher nach $v$ auflösen, was die Behauptung zeigt.

$(a) \Rightarrow (b)$: Als Basis ist zunächst $v_1, v_2, \ldots, v_n$ auch ein Erzeugendensystem. Wir nehmen an, dass es verkürzbar ist, also durch Weglassen sagen wir des $i$-ten Mitglieds ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ verbleibt[12]. Wir können dann den ausgelassenen Vektor $v_i$ als Linearkombination $v_i = a_1.v_1 + \ldots + a_{i-1}.v_{i-1} + a_{i+1}.v_{i+1} + \cdots + a_n.v_n$ der übrigen Vektoren darstellen. Bringen wir alle Terme auf eine Seite, so erschließt sich die lineare Abhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$, Widerspruch. Damit ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

$(b) \Rightarrow (a)$: Wir müssen noch die lineare Unabhängigkeit eines unverkürzbaren Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zeigen. Wir nehmen dazu $a_1.v_1 + \cdots + a_i.v_i + \cdots + a_n.v_n = 0$ und $a_i \neq 0$ an. Durch Auflösen dieser Gleichung nach $v_i$ ergibt sich, dass $v_i$ eine Linearkombination von $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ ist. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — und damit alle Vektoren aus $V$ — liegen somit sämtlich in der linearen Hülle $\langle v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n \rangle$. Dies widerspricht der vorausgesetzten Minimalität des Erzeugendensystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$. □

**Bemerkung 3.2** Es reicht nicht, nur eine einzige der vier Kennzeichnungen von Basen zu kennen.

Je nach Sachlage ist die eine oder die andere von ihnen — oft sogar sehr viel — vorteilhafter; wir sollten daher alle vier Kennzeichnungen kennen und sachgerecht anwenden können.

**Donnerstag, 18. Dezember 2003**

**Folgerung 3.3** *Jedes endliche Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$ enthält eine Basis von $V$.*

**Beweis.** Wir lassen solange Elemente eines endlichen Erzeugendensystems weg, bis ein minimales Erzeugendensystem entsteht[13]. □

Wir machen hier auf eine weit verbreitete Fehlinterpretation von Satz 3.1 aufmerksam. Die dort angeführte Kennzeichnung einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ als

[12] Auch später werden wir — wo dies nicht zu Mißverständnissen führt — durch $\widehat{\ }$ das Weglassen des Elements aus einer Folge bezeichnen.

[13] Im Einklang mit den getroffenen Definitionen ist die leere Menge Basis jedes nur aus dem Nullvektor bestehenden Vektorraums $\{0\}$.

*minimales* (unverkürzbares) Erzeugendensystem bezieht sich nicht auf die *Anzahl der Basiselemente*, sondern auf die Minimalität von $B$ bezüglich Inklusion $\subseteq$. Entsprechendes gilt für Eigenschaft einer Basis *maximal* linear unabhängig zu sein. Der Satz taugt daher nicht zu einer Begründung, dass je zwei Basen $B$ und $B'$ von $V$ dieselbe Mitgliederzahl haben. Dieses zutreffende Faktum herzuleiten, erfordert weitere Argumente (Austauschsatz), die wir gleich im Anschluss behandeln.

**Lemma 3.4 (Austauschlemma)** *Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von $V$ und $w$ ein von Null verschiedener Vektor aus $V$, den wir als Linearkombination*

$$(*) \qquad w = a_1.v_1 + \cdots + a_i.v_i + \cdots + a_n.v_n$$

*der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Falls $a_i \neq 0$, entsteht durch Austausch von $w$ mit $v_i$ aus der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine neue Basis $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$ von $V$.*

**Beweis.** Wegen $a_i \neq 0$ lässt sich $(*)$ nach $v_i$ auflösen. Es ergibt sich $v_i$ als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Folglich liegen alle $v_j$, $j = 1, \ldots, n$, im Unterraum $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$ und damit auch $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. Das System $v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ist folglich ein Erzeugendensystem von $V$.

Um die lineare Unabhängigkeit des Systems zu zeigen, nehmen wir nun an, dass

$$c_1.v_1 + \cdots + c_{i-1}.v_{i-1} + c.w + c_{i+1}.v_{i+1} + \cdots + c_n.v_n = 0$$

ist. Falls $c = 0$ ist, erhalten wir aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ das Verschwinden aller $c_j$. Falls $c \neq 0$ ist, können wir $w$ als Linearkombination $w = a'_1.v_1 + \cdots + 0.v_i + \cdots + a'_n.v_n$ darstellen, was der Eindeutigkeit der Darstellung von $w$ in der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ widerspricht. □

**Satz 3.5 (Austauschsatz)** *Es sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sei eine Basis von $V$. Ist zudem $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ein in $V$ linear unabhängiges System, so können wir durch Umnummerierung der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erreichen, dass durch Austausch von $w_1, w_2, \ldots, w_r$ mit den ersten $r$ Elementen der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ eine neue Basis*

$$w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$$

*von $V$ entsteht. Insbesondere ist $r \leq n$.*

**Beweis** durch **Induktion nach** $r$.
*Induktionsverankerung*: Der Fall $r = 0$ ist klar.
*Induktionsschritt*: Nun sei $r \geq 1$ und per Induktionsannahme der Satz für jedes System von $r - 1$ auszutauschenden Vektoren gültig. Wir können daher — nach Umnummerierung der $v_j$ — das linear unabhängige System $w_1, \ldots, w_{r-1}$ zu einer

Basis der Form $w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n$ von $V$ ergänzen, und insbesondere $w_r$ in der Form

$$w_r = a_1.w_1 + \dots + a_{r-1}.w_{r-1} + a_r.v_r + \dots + a_n.v_n$$

darstellen. Dabei können $a_r, \dots, a_n$ nicht alle 0 sein, da andernfalls die Vektoren $w_1, w_2, \dots, w_r$ linear abhängig wären. Nach erneutem Umnummerieren können wir daher $a_r \neq 0$ annehmen. Per Austauschlemma können wir dann den Vektor $v_r$ der aktuellen Basis gegen $w_r$ austauschen. Es folgt, dass $w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ eine Basis von $V$ ist. □

**Folgerung 3.6 (Invarianz der Dimension)** *Je zwei endliche Basen von $V$ haben dieselbe Anzahl von Mitgliedern.*

**Beweis.** Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ und $w_1, w_2, \dots, w_m$ endliche Basen von $V$, so folgt aus dem Austauschsatz $n \leq m$ und $m \leq n$, also $n = m$. □

Dieses Faktum erst ermöglicht die Definition der Dimension von Vektorräumen, die sich überhaupt als wichtigste Eigenschaft eines Vektorraums herausstellen wird.

**Definition 3.7 (Dimension)** *Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die Anzahl der Mitglieder einer Basis von $V$ heißt die **Dimension** von $V$. Schreibweise:* $\dim_{\mathbb{R}} V$ *oder* $\dim V$.

**Beispiel 3.8** Im $\mathbb{R}^n$ bilden die “Einheitsvektoren” $e_1, e_2, \dots, e_n$ die Standardbasis. Somit ist $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Einen Spezialfall der folgenden Aussage haben wir mit dem Dimensionsaxiom der anschaulichen Vektorrechnung (6.6) schon kennengelernt.

**Satz 3.9** *Ist $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$, so sind je $n+1$ Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ linear abhängig.* □

**Satz 3.10 (Basisergänzungssatz)** *$V$ sei ein endlichdimensionaler Vektorraum. Jeder Unterraum $U$ von $V$ ist dann ebenfalls endlichdimensional. Ferner lässt sich jede Basis $w_1, w_2, \dots, w_r$ von $U$ zu einer Basis*

$$w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$$

*von $V$ ergänzen.*

**Beweis.** Sei $n = \dim V$, Wegen des Austauschsatzes hat jedes (endliche) linear unabhängige System $w_1, w_2, \dots, w_r$ von $U$ höchstens $r \leq n$ Mitglieder. Wir können daher annehmen, dass $r$ maximal gewählt ist. Als maximal linear unabhängiges System von $U$ ist $w_1, w_2, \dots, w_r$ nach Satz 3.1 eine Basis von $U$.

Per Austauschsatz 3.5 lässt sich ferner das in $V$ linear unabhängige System $w_1, w_2, \dots, w_r$ zu einer Basis der Form $w_1, w_2, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ von $V$ ergänzen. □

**Satz 3.11 (Dimension von Unterräumen)** *Ist $U$ ein Unterraum des endlichdimensionalen Vektorraums $V$ so folgt* $\dim U \leq \dim V$*. Gleichheit* $\dim U = \dim V$ *gilt genau dann wenn* $U = V$*.*

**Beweis.** Sei $w_1, w_2, \ldots, w_r$ eine Basis von $U$. Mittels Basisergänzungssatz können wir dieselbe zu einer Basis $w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ von $V$ ergänzen. Aus $r = \dim U = \dim V = n$ folgt dann, dass $w_1, w_2, \ldots, w_r$ zugleich eine Basis von $U$ und von $V$ ist, woraus durch Übergang zur linearen Hülle $U = \langle w_1, w_2, \ldots, w_r \rangle = V$ folgt. □

**Satz 3.12 (Dimensionsformel für Unterräume)** *Sind $U_1$, $U_2$ Unterräume des endlichdimensionalen Vektorraums $V$, so gilt*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + \dim U_1 + U_2.$$

**Beweis.** Wir veranschaulichen die Verhältnisse durch das Hasse-Diagramm

$$\begin{tikzcd} & U_1 + U_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ U_1 \arrow[dr, dash] & & U_2. \arrow[dl, dash] \\ & U_1 \cap U_2 & \end{tikzcd}$$

wobei die Verbindungslinien die vorhandenen Inklusionen angeben. Zum Beweis der Dimensionsformel starten mit einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s$ von $U_1 \cap U_2$, dem kleinsten der beteiligten Unterräume. Wir können dann $e_1, e_2, \ldots, e_s$ sowohl zu einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p$ von $U_1$ als auch zu einer Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s$, $g_1, g_2, \ldots, g_q$ von $U_2$ ergänzen. Wir behaupten nun, dass die in dieser Konstruktion insgesamt auftretenden Vektoren

$$(*) \qquad e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ bilden, woraus sich die behauptete Formel sofort ergibt.

**Montag, 5. Januar 2004**

Jedes Element aus $U_1$ (bzw. $U_2$) lässt sich aus $e_1, e_2, \ldots, e_s$ und $f_1, f_2, \ldots, f_p$ (bzw. aus $e_1, e_2, \ldots, e_s$ und $g_1, g_2, \ldots, g_q$) linear kombinieren. Jedes $x \in U_1 + U_2$ ist daher eine Linearkombination der Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p$ und $g_1, g_2, \ldots, g_q$. Damit ist $(*)$ ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von $(*)$ betrachten wir eine verschwindende Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{s} a_i.e_i + \sum_{j=1}^{p} b_j.f_j + \sum_{k=1}^{q} c_k.g_k = 0.$$

Es folgt, dass das Element

$$\sum_{i=1}^{s} a_i.e_i + \sum_{j=1}^{p} b_j.f_j = \sum_{k=1}^{q} (-c_k).g_k$$

sowohl in $U_1$ (betrachte dazu die linke Seite des Ausdrucks) als auch in $U_2$ (betrachte dazu die rechte Seite) und folglich in $U_1 \cap U_2$ gelegen ist. Daher ist zunächst $c_k = 0$ für $k = 1, \ldots, q$ und dann wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis $e_1, e_2, \ldots, e_s, f_1, f_2, \ldots, f_p$ auch $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ und $b_j = 0$ $(j = 1, \ldots, p)$. Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit von $e_1, e_2, \ldots, e_s,\ f_1, f_2, \ldots, f_p,$ $g_1, g_2, \ldots, g_q$. $\square$

**Anwendung 3.13 (Schnitt von Ebenen)** **(a)** $U_1$ und $U_2$ seien zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^3$, also Ebenen durch 0. Falls die beiden Ebenen nicht übereinstimmen, ist ihr Schnittgebilde eine Gerade durch 0. Wegen der Dimensionsformel sind nämlich nur die Möglichkeiten $U_1 = U_2$ bzw. $\dim U_1 \cap U_2 = 1$ möglich.

**(b)** In höheren Dimensionen, so dem $\mathbb{R}^4$, kann es dagegen vorkommen, dass zwei Ebenen durch 0 nur den Nullpunkt gemeinsam haben. Als Beispiel betrachten wir die zweidimensionalen Unterräume $U_1 = \mathbb{R}.e_1 + \mathbb{R}.e_2$ und $U_2 = \mathbb{R}.e_3 + \mathbb{R}.e_4$ mit dem Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Wie früher bezeichnet hier $e_1, e_2, e_3, e_4$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$.