Zeilenstufenform

Wir beweisen nun den — schon früher angekündigten — Satz.

Satz. *Jede $m \times n$-Matrix A lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf* Zeilenstufenform *und analog durch elementare Spaltenumformungen auf* Spaltenstufenform* *bringen.*

Es reicht natürlich, dass wir uns mit der Reduktion auf Zeilenstufenform befassen.

Beweis: Reduktion auf Zeilenstufenform

Wir starten mit einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$ mit dem Spaltenaufbau $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n]$. Falls alle Spalten Null sind, sind wir fertig. Andernfalls sei i_1 der kleinste Index, für den die zugehörige Spalte ungleich Null ist. Durch Vertauschen von Zeilen können wir erreichen, dass der erste Eintrag von $\mathfrak{a}_{i_1}$ ungleich Null und nach Multiplikation der ersten Zeile mit einem geeigneten Faktor sogar $a_{1,i_1} = 1$ gilt.

Die übrigen Einträge dieser Spalte können wir durch elementare Zeilenumformungen zu Null machen. Es ergibt sich dann eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & B & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Fortsetzung des Beweises

Hierbei ist B eine $(m-1)\times(n-i_1)$-Matrix. Durch Induktion nach der Zeilenzahl m können wir daher annehmen, dass sich B durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform B' bringen lässt. Diese Zeilenumformungen wenden wir auf die ganze Matrix an.

Für jede Stufe von B' können wir wegen des dort vorhandenen Eintrags 1 erreichen, dass durch elementare Zeilenumformung auch der Eintrag der ersten Zeile der großen Matrix Null wird. Das Ergebnis ist eine Matrix in Zeilenstufenform. $\square$

Zeilen- und Spaltenumformungen

Satz. Jede $m \times n$-Matrix A lässt sich durch zulässige Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist und die Symbole 0 für Nullmatrizen geeigneten Formats stehen.

Beweis. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A zunächst auf Zeilenstufenform. In den r Stufen dieser Matrix stehen die ersten r Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

Diese Spalten bringen wir anschließend durch elementare Spaltenumformungen in die ersten r Positionen; von den verbleibenden Spalten wissen wir, dass sie Linearkombinationen von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$ sind. Dieselben können daher durch weitere elementare Spaltenumformungen zu Null umgeformt werden. $\square$

Die drei Schritte des Gauß-Algorithmus

- Bringe erweiterte Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ des linearen Gleichungssystems (*) auf Zeilenstufenform $[A'|\mathfrak{b}']$. Das System (*) ist genau dann lösbar, wenn die letzte Spalte $\mathfrak{b}'$ *kein* Stufenvektor ist.

- Falls $\mathfrak{b}'$ kein Stufenvektor ist, führt geeignetes Streichen/Einfügen von Nullzeilen zu erweiterter Matrix $[A''|\mathfrak{b}'']$, wobei A'' eine quadratische Matrix ist und der Hauptdiagonaleintrag jedes Stufenvektors Eins ist.

- $\mathfrak{b}''$ ist dann eine spezielle Lösung. Ferner führt Ersetzen der Hauptdiagonaleinträge Null (der Nichtstufenvektoren) durch -1 zu einer Basis des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems (**).

Schritt 1: Zeilenstufenform

Gegeben sei die erweiterte Matrix $[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Umformung in Zeilenstufenform: *

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|r} |\underline{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|r} |\underline{1} & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|r} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lesen ab: Das System ist lösbar!

*Beachten Sie, dass die Summe der ersten drei Zeilen gleich der vierten ist.

Schritt 2: Streichen/Einfügen von Nullzeilen

Aus

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

wird die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die rechte Seite $\mathfrak{x}_0 = [3, -1, 0, -1, 0]$ ist eine spezielle Lösung.

Schritt 3: Lösungsraum des homogenen Systems

Die beiden Vektoren

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.

Das lineare Gleichungssystem (*) ist durch Angabe von $[\mathfrak{x}_0; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2]$ vollständig gelöst!

Die Rolle der $\mathfrak{h}_i$

Die im Gauß-Algorithmus konstruierten Lösungen

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$$

des homogenen Gleichungssystems zu $[A|\mathfrak{o}]$ sind linear unabhängig. (Beweis vorführen!)

Sie bilden daher eine Basis des Lösungsraums $H = \langle \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r} \rangle$ des homogenen Systems $(**)$, der aus allen Linearkombinationen

$$\sum_{i=0}^{n-r} a_i \, \mathfrak{h}_i$$

besteht.

Gleichwertigkeit von Lösungsdaten

Sei (*) ein lineares Gleichungssystem. Wir nehmen an, dass wir ein "Lösungssystem" $[\mathfrak{x}_0; \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}]$ kennen.
Wir setzen also voraus, dass $\mathfrak{x}_0$ eine spezielle Lösung von (*) ist und die $\mathfrak{h}_i$'s eine Basis für den Lösungsraum des homogenen Systems (**) bilden.

Wie können wir entscheiden, dass ein anderes System $[\mathfrak{x}'_0; \mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2, \ldots, \mathfrak{h}'_{n-r}]$ dieselbe Lösungsmenge beschreibt?

Sicher können wir nicht die — im allgemeinen — unendliche Lösungsmenge Element für Element abprüfen, um hier sicher zu gehen.

Nachzuprüfen haben wir zwei Dinge:

(a) Es gilt $\langle \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r} \rangle = \langle \mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2, \ldots, \mathfrak{h}'_{n-r} \rangle$.

(b) $\mathfrak{x}'_0 - \mathfrak{x}_0$ liegt in $H := \langle \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r} \rangle$.