Lineare Gleichungssysteme

Wir befassen uns anschließend mit der Lösung — im allgemeinen nichthomogener — linearer Gleichungssysteme in zweifacher Hinsicht.

Wir studieren einmal

- den begrifflichen Aspekt, d.h. befassen uns mit der Struktur der Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems;

Zum anderen untersuchen wir

- den praktischen Aspekt, d.h. algorithmische Verfahren zur schnellen Lösung eines konkreten Systems.

Wir werden sehen, dass schon mit geringem begrifflichen Aufwand die praktische Lösung solcher Gleichungssysteme gelingt.

Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

aus m Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ist bestimmt durch seine Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ und die rechte Seite } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Durch Zusammenfassen erhalten wir die erweiterte Matrix

$$[A|\mathfrak{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{1n} & b_m \end{array}\right].$$

Spezialfall

Die Matrix

$$E_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

heißt $n \times n$-Einheitsmatrix Das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $[E_n \,|\, \mathfrak{b}]$ besteht aus den Gleichungen $x_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Es ist daher eindeutig lösbar mit Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$.

Elementare Zeilenoperationen

Die **Lösungsmenge** eines linearen Gleichungssystems **ändert sich nicht** bei einer der folgenden Operationen

(a) Vertauschen zweier Gleichungen.

(b) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$.

(c) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer *anderen* Gleichung.

Ein gegebenes System werden wir daher mit solchen elementaren Zeilenumformungen solange vereinfachen, bis wir die Lösungsmenge des vereinfachten — und damit auch des ursprünglichen — Systems ablesen können.

Elementare Zeilenumformungen

Für die zugehörige erweiterte Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ des Gleichungssystems liest sich das so:

Jede Operation vom Typ

- Vertauschen zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\neq 0$,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile,

macht aus $[A, \mathfrak{b}]$ eine neue "erweiterte" Matrix $[A'|\mathfrak{b}']$, für welche das zugeordnete Gleichungssystem dieselbe Lösungsmenge hat wie das ursprüngliche System. $\square$

Vorläufiger Lösungsansatz

Zusammengefasst werden wir zu folgendem — allerdings vorläufigem — **Lösungsansatz** für das lineare Gleichungssystem zu $[A|\mathfrak{b}]$ mit quadratischer Matrix A geführt:

Idee: Forme $[A|\mathfrak{b}]$ solange durch **elementare Zeilenumformungen** um bis die Form

$$[E_n|\mathfrak{c}]$$

erreicht ist, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. In diesem Fall ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$$

die eindeutig bestimmte Lösung.

Überprüfung der Idee I

Häufig klappt's: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 3 \end{aligned}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

und den markierten elementaren Zeilenumformungen. Folglich ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar mit Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Idee II

Mitunter klappt's nicht: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 1x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 & = & 13 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 & = & 10 \end{array}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 18 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & 6 & 18 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & -12 \end{array}\right]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

und den markierten elementaren Zeilenumformungen. Die erhaltene Matrix $[A', \mathfrak{b}']$ lässt sich nicht auf die Form $[E_n|\mathfrak{c}]$ bringen.
Grund: Das zu $[A'|\mathfrak{b}']$ gehörige Gleichungssystem ist **nicht lösbar**, da schon allein seine letzte Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$ nicht lösbar ist.

Überprüfung der Idee III

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 1x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 & = & 13 \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

führt zur erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 18 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & 6 & 18 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungen des Ausgangssystems stimmen daher mit den Lösungen des umgeformten Gleichungssystems $x_1 + 2x_3 = 5$, $x_2 = 3$ überein. Setzen wir abkürzend $x := -x_3$, so sind die Lösungen durch die Menge aller

$$\begin{pmatrix} 5 - 2x \\ 3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei x ein beliebiger Skalar ist.

Wir haben hier somit unendlich viele Lösungen.

Bewertung der Beispiele

Unsere Idee 'Umformung in Richtung Einheitsmatrix' war zu optimistisch. Nur für Systeme mit quadratischer Matrix A, die zudem eindeutig lösbar sind, kann die Reduktion der erweiterten Matrix auf die Form $[E|\mathfrak{c}]$ überhaupt gelingen.

Gleichwohl zeigen Beispiele II und III, dass die eingeschlagene Strategie auch dort trägt, wo die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist. Sogar die Nichtlösbarkeit eines Systems konnten wir auf diesem Wege entscheiden.

Neue Umformstrategie: Bringe die erweiterte Matrix auf eine Form, die der Einheitsmatrix möglichst nahe kommt. Dies Ziel werden wir mit der Zeilenstufenform erreichen.

Matrizen in Zeilenstufenform

Wir sehen hier ein typisches Beispiel einer $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform.

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & |1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & i_1 & & i_2 & & & i_3 & & i_4 & \end{array} \end{array}$$

Eine Treppenlinie trennt einen unteren Bereich ab, der nur aus Nulleinträgen besteht.

In unserem Fall haben wir $r = 4$ Stufen an den Positionen

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n.$$

Wir nennen r den **Rang** der Matrix A. In der i-ten Stufe steht der i-te Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$.

Eigenschaften der Stufenform

(S1) In den r Stufen der Treppe, d.h. an den markierten Stellen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ stehen der Reihe nach die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

(S2) Die übrigen Einträge des oberen Bereichs können beliebig gewählt werden. Im Bereich unterhalb der Treppenlinie gibt es nur Einträge gleich Null.

(S3) Jeder Spaltenvektor ist Linearkombination der vorangehenden Stufenvektoren.

(S4) Kein Stufenvektor ist Linearkombination der vorangehenden Spaltenvektoren.

Der Rang einer Matrix von Stufenform wird erklärt als Anzahl der Stufen*.

*Der Rang einer beliebigen Matrix wird erst später erklärt

Elementare Zeilenumformungen und Zeilenstufenform

Satz. Jede $m \times n$-Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

Wir üben das Verfahren zunächst an Beispielen und diskutieren Anwendungen, bevor wir uns mit dem Beweis befassen.

Vorschau: Es wird sich herausstellen, dass die entsprechende Umformung in Zeilenstufenform genau die Technik ist, die wir zur vollständigen Lösung eines linearen Gleichungssystems benötigen.

Umformung in Zeilenstufenform

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mapsto
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\mapsto
\begin{pmatrix} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Die letzte Matrix ist in Zeilenstufenform mit drei Stufen in den Spalten $1, 2$ und 4. Sie hat daher den Rang drei.

Lösbarkeitskriterium

Satz. Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn nach Umformung der seiner erweiterten Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ in Treppenform $[B|\mathfrak{c}]$ die letzte Spalte $\mathfrak{c}$ kein Stufenvektor ist.

Beweis. Da sich die Lösungsmenge durch elementare Zeilenumformungen nicht verändert, ist das System zu $[A, \mathfrak{b}]$ genau dann lösbar, wenn dasjenige zu $[B|\mathfrak{c}]$ lösbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass sich $\mathfrak{c}$ aus den Spaltenvektoren von B linear kombinieren lässt.

Nach **(S3)** und **(S4)** ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{c}$ kein Stufenvektor ist. $\square$

Wir werden gleich sehen, wie wir im lösbaren Fall eine spezielle Lösung finden.

Finden einer speziellen Lösung

A sei eine $m \times n$-Matrix und $\mathfrak{b}$ eine n-Spalte. Die erweiterte Matrix $[A|\mathfrak{b}]$ befinde sich in Zeilenstufenform, wobei sich die Stufen in den Positionen $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ befinden, also $\mathfrak{b}$ kein Stufenvektor ist.
Weglassen aller Nullzeilen führt zu einer $r \times (n+1)$-Matrix, mit $r \leq n$.

Wir füllen nun die resultierende Matrix solange mit Nullzeilen auf, bis in der i-ten Stufe stets der Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$ steht (für alle $i = 1, \ldots, r$) und wir insgesamt n Zeilen haben. Dies liefert eine erweiterte Matrix $[B|\mathfrak{c}]$, wobei B das Format $n \times n$ hat.

Achtung: Falls $c_i \neq 0$, so ist die i-te Spalte von B eine Stufe, also gleich $\mathfrak{e}_i$.
Es folgt, dass $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ eine spezielle Lösung des Systems ist.

Anwendungsbeispiel: spezielle Lösung

Die erweiterte Matrix

$$[A|\mathfrak{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

befinde sich schon in Zeilenstufenform. Die letzte Spalte ist keine Stufe, daher ist das System lösbar. Auffüllen mit Nullzeilen liefert das äquivalente System:

$$[A'|\mathfrak{b}'] = \left(\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir beachten, dass Nullen in der Hauptdiagonalen von A' in derselben Zeile einen Nulleintrag in $\mathfrak{b}'$ hervorrufen.

Interpretation als **Linearkombinationsaufgabe** liefert: $\mathfrak{b}'$ ist eine spezielle Lösung.

Anwendungsbeispiel: homogenes System

Das Streichen von bzw. das Auffüllen mit Nullzeilen sei schon erfolgt:

$$[A'|\mathfrak{b}'] = \left(\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die zugehörigen linearen Gleichungen sind gerade $x_4 + 3x_5 = 0$, $x_2 + 2x_5 = 0$, $x_1 + x_3 + x_5 = 0$. Mit $\alpha_1 = -x_3$ und $\alpha_2 = -x_5$ sind die Lösungen genau durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathfrak{h}_1 + \alpha_2 \mathfrak{h}_2 \text{ mit } \mathfrak{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Anwendungsbeispiel: Allgemeine Lösung

$$[A'|\mathfrak{b}'] = \left(\begin{array}{ccccc|c} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \colorbox{yellow}{0} & |0 & 0 & \colorbox{yellow}{0} \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{3} & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \colorbox{yellow}{0} & \colorbox{yellow}{0} \end{array}\right)$$

Lösbares System: Es ist $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{b}$ eine **spezielle Lösung**.

Lösungsmenge H des homogenen Systems: In den $n-r$ Nicht-Stufenvektoren diagonale (gelb markierte) Null durch -1 ersetzen. Führt zu $n-r$ Lösungen $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_{n-r}$ des homogenen Systems. H besteht aus allen

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \mathfrak{h}_i, \text{ wobei } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Die **allgemeine Lösung** besteht aus allen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h} \in H$.