Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 26. Januar 2004
Besprechung ab dem 03. Februar 2004

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

WS 2003/2004

Blatt 14

AUFGABE 1:
Entscheiden Sie, ob die folgenden 10 Aussagen richtig (= 1) oder falsch (=0) sind. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie zwei Pluspunkte, für jede falsche zwei Minuspunkte. Enthalten Sie sich, so wird dieses mit 0 Punkten bewertet.

	Aussage	**0 / 1?**
1	Das Vektorprodukt von Vektoren des Anschaungsraumes ist kommutativ.	
2	Eine linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ hat mindestens n Elemente.	
3	Die Menge der ganzen Zahlen bildet mit den üblichen Verknüpfungen + und $\cdot$ einen Körper.	
4	Ein lineares Gleichungssystem ist lösbar, falls sich die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A, b]$ auf Zeilenstufen bringen lässt.	
5	Je zwei Matrizen lassen sich multiplizieren.	
6	Für alle $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ gilt: $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$.	
7	Die Menge $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 - 3 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.	
8	Zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W mit $dim(V) \geq dim(W)$ sind isomorph.	
9	Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Dann ist T linear abhängig, wenn $0 \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ gilt.	
10	Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, so gilt für alle $v, w \in V : v+w \notin U, v \in U \Rightarrow w \notin U$.	

AUFGABE 2:
Ergänzen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraum heißen linear abhängig, wenn

b) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Teilmenge U von V heißt Unterraum von V, wenn

c) Nennen Sie vier Eigenschaften des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im Anschauungsraum:

1.

2.

3.

4.

d) Formulieren Sie den Basisergänzungssatz: V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum.

e) Gegeben sei eine Ebene E durch die Gleichung $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle = b$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Der Abstand eines Punktes $\mathfrak{p}$ von E ist

AUFGABE 3:
Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -w & + & 4x & + & 6y & + & 2z & = & b_1 \\ 5w & - & x & - & 3y & - & z & = & b_2 \\ 4w & + & 3x & + & 3y & + & z & = & b_3 \end{array}$$

über den reellen Zahlen.

a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

b) Für welche Vektoren $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist obige lineare Gleichungssystem lösbar? Geben Sie im lösbaren Fall die Lösungmenge an.

c) Erläutern Sie die Bestandteile Ihrer Lösungmenge.

AUFGABE 4:
Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$? Was lässt sich hieraus für die Vektoren aus U folgern?

b) Gegen welche Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ lässt sich der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ austauschen, so dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht?

AUFGABE 5:
Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von $U_1 + U_2$. Was lässt sich dann für $dim(U_1 \cap U_2)$ sagen?

b) Geben Sie konkrete Unterräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^8$ mit $dim(U_1) = 3$ und $dim(U_2) = 5$ an.

AUFGABE 6:
Es bezeichne $\{e_1, \ldots, e_5\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ und $\{e'_1, \ldots, e'_4\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Sei $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die durch lineare Forsetzung definierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $f(e_1) = e'_1 + e'_2, f(e_2) = e'_2 + e'_3, f(e_3) = e'_3 + e'_4, f(e_4) = e'_4 + e'_1, f(e_5) = e'_1 + e'_3$.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f.

b) Berechnen Sie $f(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Bestimme eine Basis von $Kern(f)$. Welche Dimension hat $Bild(f)$?

d) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit $dim(Kern(f)) = 3$.

AUFGABE 7:

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Cramerschen Regel.

b) Sei A eine Matrix aus $M_n(\mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$A \text{ ist invertierbar } \Rightarrow A^n \neq 0 \,\forall n \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 8:
Sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben.

a) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(v_i) = i$, $1 \leq i \leq n$ an.

b) Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $Kern(f) = \{0\}$ gilt, und beweisen Sie diese.

AUFGABE 9:
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Keine Abgabe mehr!