Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 19. Januar 2004
Abgabe bis 27. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 13

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -10 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

aus $M_4(\mathbb{R})$ invertierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die inverse Matrix an.

b) Gegeben sei die folgende obere Dreiecksmatrix

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \subseteq M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: Falls D invertierbar ist, so ist D^{-1} wieder eine obere Dreiecksmatrix.

c) Gibt es in $M_2(\mathbb{R})$ Matrizen A, B mit den folgenden Eigenschaften:

$$A^2 = B^2 = -E_2 \text{ und } AB = -BA?$$

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

b) Es sei die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^5 = 0$ gegeben. Wir setzen

$$B = E_n + A + A^2 + A^3 + A^4.$$

Zeigen Sie, dass B zu der Matrix $E_n - A$ invers ist.

c) Geben Sie eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $A^2 = 0$ an, die mehr als einen Eintrag $\neq 0$ hat.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben seien die endlichdimensionalen Vektorräume V und W sowie eine surjektive lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$. Geben Sie eine lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ mit $f \circ g = 1_W$ an. *Hinweis: Satz 6.1*

b) Geben Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit $AB = E_2$ an. Kann für ein solches B auch $BA = E_2$ gelten?

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^5$ sowie den Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Für welche $d \in \{1, 2, 3\}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mit $Kern(f) = U$ und $dim_{\mathbb{R}}\, Bild(f) = d$? Eine genaue Begründung ist erforderlich.

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.