Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 12. Januar 2004
Abgabe bis 20. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 12

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 6x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 7x_5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $Kern f$ und $Bild\, f$.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten Vektorräume V und W der Dimension n bzw. m. Beweisen Sie:

a) Für $n \leq m$ gibt es eine injektive lineare Abbildung von V nach W.

b) Für $n \geq m$ gibt es eine surjektive lineare Abbildung von V nach W.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**

a) Gegeben seien zwei lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von f, g und $g \circ f$.

b) Gegeben sei die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{pmatrix}$ einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $f(x)$ mit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Geben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

a) $V = Kern\, f + Bild\, f$

b) $Kern f \cap Bild\, f = \{0\}$.

Geben Sie konkret eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $f \circ f = f$ an, die zusätzlich $Kern\, f \neq \{0\} \neq Bild\, f$ erfüllt.

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.