Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 5. Januar 2004
Abgabe bis 13. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 11

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, wobei $n \geq 2$ ist. Ferner seien für $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \text{ und } y_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

gegeben. Beweisen Sie, dass beim Austauschen der Vektoren v_1, v_2 durch die Vektoren y_1, y_2 genau dann eine Basis entsteht, falls $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$ gilt.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**

a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, dass für Unterräume $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ der Dimension $n-1$ die Formel

$$dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m) \geq n - m$$

gilt.

b) Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ Unterräume der Dimension 3. Welche Dimensionen können $U_1 \cap U_2$ bzw. $U_1 + U_2$ haben? Geben Sie für jede auftretende Dimensionszahl von $U_1 \cap U_2$ ein konkretes Beispiel an.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir betrachten die folgenden Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq V^3.$$

a) Weisen Sie nach, dass U ein Unterraum von V^3 ist.

b) Bestimmen Sie mit einer Basis $v_1, \cdots, v_n$ von V eine Basis von U.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $dim(U)$ und $dim(V)$?

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

a) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{R}$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 - 2 \\ -3x_3 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.