Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 15. Dezember 2003
Abgabe bis 6. Januar 2004, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 10

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Für $T \subseteq A$ und $S \subseteq B$ betrachten wir die Mengen

$$f(T) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in T\}$$

und

$$f^{-1}(S) = \{x \mid x \in A \text{ mit } f(x) \in S\}.$$

Seien $T_1, T_2 \subseteq A$ und $S_1, S_2 \subseteq B$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

a) $f(T_1 \cup T_2) = f(T_1) \cup f(T_2)$

b) $f(T_1 \cap T_2) = f(T_1) \cap f(T_2)$

c) $f^{-1}(S_1 \cup S_2) = f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2)$

d) $f^{-1}(S_1 \cap S_2) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2)$

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } b_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Möglichkeiten an, wie Sie die linear unabhängigen Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 unter 2-facher Anwendung des Austauschlemmas zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen können.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V mit den Basen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ bzw. $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

a) Zeigen Sie: Die Vektoren $c_1, c_2, \ldots, c_m, d_1, d_2, \ldots, d_n$ bilden genau dann eine Basis von $U_1 + U_2$, falls $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Unterräume $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 + U_2$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Seien U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines Vektorraumes V mit $U_1 \subseteq U_3$. Zeigen Sie, dass dann

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3) \tag{1}$$

gilt. Ist die Voraussetzung $U_1 \subseteq U_3$ für die Gültigkeit der Formel (1) auch notwendig?

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.

***

Wir wünschen euch frohe Weihnachten

und

einen guten Rutsch ins Jahr 2004!

***