Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 8. Dezember 2003
Abgabe bis 16. Dezember 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 9

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**

a) Weisen Sie nach, dass die 2×2-Matrizen bezüglich der folgenden Addition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

und skalaren Multiplikation

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ bilden.

b) Geben Sie eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ an.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren. Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Beweisen Sie, dass das System der Vektoren $v_1 - w, \dots, v_n - w$ genau dann linear abhängig ist, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ gilt.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^4$, nämlich

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\} \text{ und } W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0, x_2 = 2x_3 \right\}$$

Bestimmen Sie eine Basis für $V \cap W$.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**

a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraumes V_1. Wir betrachten für ein $r \in \{1, \dots, n\}$ den Unterraum $U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ von V_1. Beweisen Sie, dass es einen Unterraum W von V_1 gibt, so dass

$$U \cap W = \{0\} \text{ und } U + W = V_1 \text{ gilt.}$$

b) Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraumes V_2. Weisen Sie nach, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V_2 ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.