Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 1. Dezember 2003
Abgabe bis 9. Dezember 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

WS 2003/2004

Blatt 8

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Seien $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass das System der folgenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass eine reelle Polynomfunktion $f \neq 0$ vom Grad kleiner gleich n höchstens n Nullstellen hat.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Zahl $\sqrt{p}$ ist nicht rational.

b) Die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet einen Körper.

Sie dürfen verwenden: Falls p ein Produkt teilt, so teilt p auch mindestens einen Faktor.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Wir betrachten die Menge $\mathbb{F}_3 := \{0, 1, 2\}$ und versehen diese wie folgt mit einer Addition und einer Multiplikation

$$+_3 : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3, (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y & \text{für } 0 \leq x + y < 3 \\ x + y - 3 & \text{für } x + y \geq 3 \end{cases}$$

$$\cdot_3 : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3, (x, y) \mapsto \begin{cases} x \cdot y & \text{für } x \neq 2 \,\text{oder}\, y \neq 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_3, +_3)$ den Axiomen (A1)-(A4) genügt.

b) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_3, \cdot_3)$ die Forderungen (M1)-(M4) erfüllt.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**

a) Sei V_n die Menge aller Polynomfunktionen f mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ über den reellen Zahlen vom Grad kleiner gleich n. Zeigen Sie, dass V_n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Zu gegebenen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ betrachten wir folgende Teilmengemenge des $\mathbb{R}^3$

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3^2 = 0 \right\}.$$

Für welche a_1, a_2, a_3 bildet W bezüglich der koordinatenweisen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.