Prof. Dr. Helmut Lenzing
Markus Diekämper, Andrew Hubery, Marc Jesse

Paderborn, den 24. November 2003
Abgabe bis 2. Dezember 2003, 11 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
WS 2003/2004
Blatt 7

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Gegeben seien die vier Vektoren

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass jede Linearkombination von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auch eine von $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ ist und umgekehrt.

AUFGABE 2 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei die Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & -1 & 16 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & -11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zuerst die Zeilenstufenform von A und geben anschließend deren Rang an.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Gegeben seien die Vektoren $\mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} 4+\lambda \\ 2\lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda - 3 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ eine Basis? Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung an!

b) Geben Sie für $\lambda = -1$ und $\lambda = 1$ die Basen an und stellen Sie den Vektor $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der beiden Basen dar.

AUFGABE 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Gleichungssystem durch seine erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \,|\, \mathfrak{b}]$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, so dass die Lösungsmenge einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Abgabeort: In den orangen mit den Nummern 10 oder 15 versehenden Kästen auf dem D1-Flur.